泛函分析

上 册

〔苏〕Л. В. Канторович
Г. П. Акилов

高等教育出版社



泛函分析

上　册

[苏] Л. В. Канторович　Г. П. Акилов
刘证 郑权 张云生　译



高等教育出版社

内容提要

本书系根据 Л. В. Канторович, Г. П. Акилов 著"泛函分析"第二版(1977 年)译出，分上、下两册出版.

本书实际上是 1959 年出版的"赋范空间中的泛函分析"一书的修订本. 书中的叙述以一般泛函空间为基础，反映了这些年来在一系列问题上的进展. 这一版中泛函分析的应用在很大程度上得到了反映，除了在计算数学与数学物理上的应用外，还注意到对数理经济问题的某些应用.

上册为"泛函分析"的第一部分——线性算子与线性泛函，共十一章. 内容有拓扑空间与度量空间，向量空间，拓扑向量空间，赋范空间，线性算子与线性泛函，泛函的解析表示，线性算子序列，Banach 空间中的弱拓扑，紧算子与共轭算子，有序赋范空间，积分算子.

下册为"泛函分析"的第二部分——泛函方程，共七章. 内容为共轭方程，第二类泛函方程，近似方法的一般理论，最速下降法，不动点原理，非线性算子的微分，Newton 法.

本书可作为高等学校数学专业、计算专业教师和研究生以及泛函专门组学生的教学参考书，也可供数学及其应用领域内的科学工作者使用.

泛函分析
上 册
[苏] Л. В. Канторович Г. П. Акилов
刘证 郑权 张云生 译
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 17.5 字数 423,000
1982 年 8 月第 1 版 1984 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—10,500
书号 13010·0782 定价 2.65元

第二版序言

从本书第一版以《赋范空间中的泛函分析》为名出版以来，已经过去了二十年. 在这段时间里，无论是数学在现代科学概念的体系中的位置，还是数学本身，都发生了根本性的变化. 这种变化首先涉及到泛函分析在数学这门学科内的地位. 如果说在本书第一版问世时，泛函分析还被当做分析的比较新的有前途的一部分，那么现在“泛函分析”和“数学分析”这两个术语实际上已有相同的含义了. 不但如此，泛函分析现在是整个连续数学的统一的语言. 关于函数论,微分方程及数学物理，计算方法，数理经济学与控制论,以及其他领域的任何一项认真的研究,如果不广泛地使用泛函分析的语言和结果就对付不了，也不可能对付. 正因为如此，一方面泛函分析才成了数学的一个蓬勃发展的分支，另一方面,泛函分析的方法在应用中起着越来越大的作用.

作者怀着自豪和不安的心情意识到所发生的变化. 自豪——这是这个重要历史事件的参与者的感觉的自然表露. 而提供给读者的这本书的命运却引起了不安——要知道现在已不可能有泛函分析的包罗万象的教科书了(甚至是引论性的). 因此在准备本版时,虽然作了相当大的修改，我们认为，保持第一版所采用的总计划，以及基本上保持第一版对材料的选择和处理仍是适宜的. 但是对一系列的问题，特别对拓扑向量空间论与积分算子论的叙述在本质上是有变化的. 如果说，以前的叙述基本上限于赋范空间论，拓扑向量空间虽然占了不小的篇幅，但仍作为随意选取的材料,那么按照泛函分析发展的逻辑,拓扑向量空间现在就已经成了

叙述的基础，这也是书名变化的原因．用于半序空间理论基础的一章是新增加的，在可测函数理想空间的基础上建立了积分算子及其表达式的理论．

同以前一样，泛函分析对应用分析的应用占去了颇大的篇幅，这正是本书第一版的特征．本书所包含的这些内容促使国内外对相应问题的探讨．在本版中这些问题的叙述在某种程度上加强了并且现代化了．本版的主要特点在于也包含了与泛函分析在数理经济学及控制论中的应用有关的某些问题，虽然对此还没有做到十分完备．部分无关紧要的材料删去了．文献有本质变化．

第一章带有引论的性质，其中叙述了拓扑空间、度量空间及抽象测度空间的理论基础，很多结果是不加证明地引入的．我们假定读者熟悉实变函数的初等理论及大致如普通的大学数学分析教程范围的 n 维欧氏空间的拓扑．更专门，更精细的理论及应用方面的问题以小字排印，初读时可以放过．对泛函分析的应用有特殊兴趣的读者也可以略去与拓扑及拓扑向量空间有关的其他一系列较抽象的章节．如果他已经熟悉赋范空间的基本理论，也可以直接阅读相应的应用的章节．

（下略）

文献目录由两部分组成，一部分是泛函分析及其相邻问题方面的专著，另一部分是本书所使用的文献，它基本上由杂志上的论文组成．在书中引证 Вулих-II 时，是指引用专著目录中列在 Б. З. Вулих 的名字下面的第 II 号专著，而引证 Левин[3]时，是指引用 В. Л. Левин 的论文，已列在所使用的文献目录中．文献目录并不追求齐全．当结果已在专门的文献中得到反映时，我们照例宁愿引用书而不引用原来的论文．

全书由十八章组成，章分成节，节分成段，用双重数码编号；第一个数表示该段所在的节的号码，第二个数表示这一节内段的顺

序．在引用时也将指出该段所在章的号码；例如，XI.4.2 表示引用第十一章第四节第二段．在节内引证时章的号码省略．至于定理，照例在每一节内编号．例如，定理 XIV.3.2 表示第十四章第三节第二个定理．当所引证的定理在同一节内时不再指出章和节的号码．

第一版序言

泛函分析是近年来兴起的一门学科．仅在近二、三十年，它才形成为数学分析的一个独立分支，但这并未妨碍它成为现代数学的中心之一．

泛函分析是现时在数学中发生的根本性转折的最明显的表现．这种转折,就其原则的意义上讲,可以和十七世纪时把变量引入数学从而导致微积分的产生相比拟．

这个转折首先表现于研究数学分析的各种问题的途径发生了变化．泛函分析不是孤立地考察各个函数以及联系它们的关系和方程,而是把这些对象作为一个总体来研究,即研究函数空间和它们的变换(泛函运算)．例如，研究微分算子或积分变换就不是对个别的函数,而是对整个的函数类进行的,即研究这类函数变换的结果,算子在某种意义下的连续性等等．

把初看起来相距甚远的问题统一起来,同时研究它们,这种高度抽象的研究分析问题的形式也是泛函分析的一个重要特点．例如，研究泛函方程 $F(x)=y$，其中 x 和 y 是某种任意领域的对象．对这个方程的研究可以把这样一些不同的问题统一起来：解微分方程,积分方程，边值问题，无限代数方程组及矩量问题等．由个别的函数转移到函数空间，虽然有时是形式上的甚至是难以捉摸的．但在原则上是重要的，就象当初从代数方程及代数关系转移到变量和函数相关一样．

这种新的观点不是由于单纯地追求一般性而产生的．把抽象性提高到新阶段的要求，是由于在分析的发展过程中产生的新问

题而自然引起的．函数系的完全性，边值问题对确定的函数类的可解性，同时研究一整类问题，例如边值问题的解对方程右边或边值条件的相依性等都是这一类新问题．正是泛函分析的方法对于提出和研究这些问题显得特别富有成效．同时，在很多情况下，考察共同性就能够揭露更一般的，同时也是更根本的更深刻的规律性和联系，因为，抛弃了每个个别问题的无关紧要的细节，就暴露了事物的本质，从而使形式和起源不同的问题的亲缘关系就变得明显了．

变分法，积分方程，正交函数论，契比雪夫逼近论，矩量问题等一系列经典数学分析领域的研究自然要求采用新的方法，它为泛函分析的建立作了准备．泛函分析的一些问题就分别产生在这些领域之内，例如变分法中的泛函概念．另一方面，实变函数论，拓扑学，抽象代数等集合论科目的发展，为采用抽象的形式系统处理这一新的方向准备了工具，特别是抽象空间理论，对于泛函分析具有根本性的意义．

泛函分析开始独立存在的时刻可从下列事情算起，即系统地建立无限维酉空间算子理论（Hilbert 等）和发展了线性赋范空间的一般理论(1918—1923)，后者是匈牙利数学家 Riesz，特别是波兰数学家 Banach 所作的工作．

当发现泛函分析（Hilbert 空间的算子理论）在量子力学中得到了重要的应用时，对它的兴趣就更高了．在最近二十年，特别在苏联数学家的工作中，创立了泛函分析的新方向，它的方法和结果在理论物理、数学物理、应用分析及其他数学领域中都得到了最重要的应用．

本书的内容不包含泛函分析的全部方向及其所有应用领域．它基本上写的是赋范空间论（它的基础是由 Riesz 和 Banach 奠定的，包含这个理论的最重要的事实，也注意到其后的工作）．本

书讨论了赋范空间论，算子论及泛函方程论．除线性算子和线性方程外，非线性算子和非线性方程也占据了不小的位置．除一般理论外，本书还重视给出具体的泛函空间和算子，特别是专门讨论了 Соболев 引进的多变量可微函数空间．这些问题与一般地研究积分算子有关．

本书是以在列宁格勒大学对数学分析专门化和计算数学专门化的学生讲的讲义为基础写成的．

Л. В. Кангорович　Г. П. Акилов

目　录

第一部分

线性算子与线性泛函

第一章　拓扑空间与度量空间

空间的概念在数学中起着最重要的作用，所谓空间就是在其元素之间以公理形式给出了某些关系的集合. 这时，称在集合上给定了相应空间的结构. 本章研究的基本对象是拓扑空间与度量空间，即对于其元素定义了邻近概念的集合. 拓扑空间是 1910 年由 Hausdorff 引进的(参见 Hausdorff)，度量空间则是更早一些由 Fréchet[1]引进的.

§1. 集合的一般知识·有序集

1.1. 在这一段里，我们回顾一下一般集合论的某些基本概念及有关的记号*). 同时我们将按照非形式的观点，认为集合或总体的概念直观上是明显的，不需要精确地定义. 研究某个集合时，我们称构成集合的那些对象为它的元素.

我们用 $\boldsymbol{N}$ 表示全体自然数的集合，$\boldsymbol{R}$ 表示全体实数的集合，$\boldsymbol{C}$ 表示全体复数的集合.

设 A、B 是集合. 记号 $a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A；$a\notin A$ 表示元素 a 不属于 A. 如果集合 A 的每个元素都属于集合 B，则称集合 A 是集合 B 的子集，并记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$). 如果 $A\subset B$ 及 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，并记为 $A=B$. 空集(即不包含任何元素的集合)用记号 $\varnothing$ 表示. 如果 (P) 是作用在集合 A 的元素上的某个命题，那么由满足 (P) 的所有 $a\in A$ 构成的子集记为 $\{a\in A: (P)a\}$，

---

*) 一般集合论的基础是由德国数学家 Cantor 在十九世纪后半期奠定的.

或简记为$\{a:(P)a\}$.

设A、B是集合．如果对于每个元素$a\in A$都按确定的规律对应唯一的元素$f(a)\in B$，则称给定了从集合A到集合B内的映射f，并且记为$f:A\to B$．对于任何$X\subset A$，它的象定义为$f(X)=\{b\in B:存在a\in X，使得b=f(a)\}$．对于任何集合$Y\subset B$，它的全原象定义为$f^{-1}(Y)=\{a\in A:f(a)\in Y\}$．映射$f:A\to B$叫做一对一的，如果$f(a_1)=f(a_2)$蕴涵$a_1=a_2$．如果$f(A)=B$，则称它是$A$到$B$上的映射．如果映射$f:A\to B$是一对一的并且还是$A$到$B$上的，则称它是双射映射．如果$f$是双射映射，则由关系式$g(f(a))=a$，$a\in A$定义的映射$g:B\to A$叫做$f$的逆映射并记为$f^{-1}$．

现在引进集合论基本运算的定义．如果对于某个非空集合A的每个元素α都对应着某个集合，则称给定了集族$\{X_\alpha\}(\alpha\in A)$．集合$\bigcup\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$叫做集族$\{X_\alpha\}$的并，它是由这样的元素$x$组成的，即至少对于一个$\alpha\in A$，使得$x\in X_\alpha$．集合$\bigcap\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$叫做集族$\{X_\alpha\}$的交，它是由这样的元素$x$组成的，即对于任何$\alpha\in A$，都有$x\in X_\alpha$．集合$\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$叫做集族$\{X_\alpha\}$的直积，它是这样的映射$f:A\to\bigcup\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$的全体，使得对于所有的$\alpha\in A$，都有$f(\alpha)\in X_\alpha$．如果$A$由整数$1,2,\cdots,n$组成，则对应的并、交与直积分别记为

$$\bigcup_{k=1}^{n}X_k=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n,\qquad \bigcap_{k=1}^{n}X_k=X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n}X_k=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$$

我们指出，可以把有限直积$\prod\limits_{k=1}^{n}X_k$与全体有序组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的集合等同起来，其中$x_k\in X_k$．

如果 A 是全体自然数的集合 $\boldsymbol{N}$，则上述运算分别记为

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k, \qquad \prod_{k=1}^{\infty} X_k.$$

两个集合 A 与 B 称为离析的（或不相交的），如果 $A\cap B=\varnothing$. 集族 X_α $(\alpha\in A)$ 称为两两离析的，如果当 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时 $X_{\alpha_1}\cap X_{\alpha_2}=\varnothing$. 两两离析的集族 $\{X_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$ 叫做集合 T 的分划，如果 $T=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$.

由所有使得 $a\notin B$ 的 $a\in A$ 构成的集合 A 的子集叫做差 $A\backslash B$. 同时在 $A\backslash B$ 的定义中并不要求 $B\subset A$. 如果 $B\subset A$，则也称集合 $A\backslash B$ 为集合 B 的余集（关于集合 A 的）. 集合

$$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

叫做集合 A 与 B 的对称差.

如果 $A\subset X$，则集合 A 的特征函数 χ_A 由下式定义：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\in A,\\ 0, & \text{如果 } x\in X\backslash A.\end{cases}$$

1.2. 如果对于集合 X 中的某些元素对 x 与 y 定义了序的关系 $x\geqslant y$（x 大于或等于 y），并且满足下列条件：

1）对于任何 $x\in X$ 有 $x\geqslant x$；

2）如果 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant z$，则 $x\geqslant z$；

3）如果 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant x$，则 $x=y$，

则称集合 X 是有序的*）.

记号 $x\leqslant y$ 表示 $y\geqslant x$；$x>y$ 表示 $x\geqslant y$ 且 $x\neq y$；$x\geqslant y, z$ 表示 $x\geqslant y$ 及 $x\geqslant z$. 实数集 $\boldsymbol{R}$ 是有序集的例子，其中任何两个元素都有关系$\leqslant$联系（即通常的比较关系）. 有序集也可以含有不可比较的元素，例如，按包含关系有序的自然数列$\boldsymbol{N}$的所有子集构成的集合

*）常常用部分有序集这个术语，这时强调的是并非所有元素对都能用“大于或等于”关系联系起来.

(即 $A \geqslant B \Longleftrightarrow A \supset B$)*).

设 X 是有序集, $A \subset X$ 是其子集. 如果存在 $x \in X$, 使得对于任何 $a \in A$ 都有 $a \leqslant x$, 则称 A 是上有界的; x 叫做 A 的上界. 类似地可以定义下有界的及下界. 如果子集 $A \subset X$ 同时是上有界的与下有界的, 则称它是(序)有界的. 设 $A \subset X$, $x \in A$, 1) 如果对于任何 $a \in A$ 都有 $x \geqslant a$, 则称 x 是(A 中的)最大元素; 2) 如果对于 $a \in A$ 从 $x \leqslant a$ 能推出 $x = a$, 则称 x 是(A 中的)极大元素. 我们指出, 任何最大元素也是极大的, 但反之一般不成立. 类似地可以定义最小元素或极小元素. 如果 A 是 X 的上有界子集, 则其最小上界(如果它存在) 叫做集合 A 的上确界并记为 $\sup A$. 如果 A 是 X 的下有界子集, 则其最大下界(如果它存在)叫做集合 A 的下确界并记为 $\inf A$. 如果集合 A 的元素配有某种下标, $A = \{x_\beta\}$ $(\beta \in B)$, 则 $\sup A$ 及 $\inf A$ 分别记为

$$\sup_{\beta \in B} x_\beta \text{ 或 } \sup x_\beta \quad \text{及} \quad \inf_{\beta \in B} x_\beta \text{ 或} \inf x_\beta.$$

如果集合 A 由有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成, 则 $\sup A$ 及 $\inf A$ 分别记为 $\sup\limits_{k=1}^{n} x_k$ 或 $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$ 及 $\inf\limits_{k=1}^{n} x_k$ 或 $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$.

我们指出, 在本段开始时引进的第二个例子中, 上确界显然就是集合的并, 而下确界是交.

如果对于有序集 X 中的任何元素 x 与 y 都有 $x \geqslant y$ 或 $x \leqslant y$, 即所有的元素彼此之间都可以比较, 则称 X 是全序集(线性有序链).

在各种各样问题中, 下面这个等价于选择公理和超穷归纳法的命题是有用的, 其证明可以在 Dunford 和 Schwartz-I (定理 I. 2. 7)及Kelley 的书中找到.

---

*) 记号⇔表示«等价», 记号⇒表示«推出», «蕴涵».

Zorn 引理. 如果有序集 X 的每个全序子集都有上界，则在 X 中存在极大元素.

为了研究拓扑空间，进而研究拓扑向量空间，方向的概念对于我们是重要的. 设 X 是任意的集合，A 是有序集，按递增有向，即对于任何 $\alpha_1, \alpha_2 \in A$，可以找到这样的 $\alpha \in A$，使得 $\alpha \geqslant \alpha_1$ 和 $\alpha \geqslant \alpha_2$. 从集合 A 到 X 内的映射 $\alpha \to x_\alpha$ 叫做有向列(或称链，广义序列)并记为 $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ 或简记为 $\{x_\alpha\}$. 如果 $A=N$，其中 N 是具有通常顺序关系的自然数的集合，则 $\{x_n\}$ $(n \in N)$ 就是通常的序列. 以后我们用希腊字母作为下标来表示任意的有向列 $\{x_\alpha\}$，$\{x_\beta\}$，$\{x_\gamma\}$，而为了表示序列，则用拉丁字母作为下标，例如 $\{x_n\}$，$\{x_m\}$，$\{x_k\}$.

按包含关系有序的 N 中所有有限子集组成的集合是有向列的一个非平凡的例子.

子序列的概念按下述方式推广到有向列上. 有向列 $\{y_\beta\}$ $(\beta \in B)$ 叫做有向列 $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ 的有向子列，如果对于任何 $\alpha \in A$ 存在这样的下标 $\beta(\alpha) \in B$，使得满足不等式 $\beta' \geqslant \beta(\alpha)$ 的任何 $\beta' \in B$ 都可以找到 $\alpha' \in A$，$\alpha' \geqslant \alpha$，使等式 $x_{\alpha'} = y_{\beta'}$ 成立. 我们指出，序列总具有其本身不是序列的有向子列.

在本章中，我们已经看到有序集的各种例子. 这一节叙述的材料在 Bourbaki-I 和 Kelley 的书中有更详细的介绍. 在 Вулих-III，Колмогоров 和 Фомин，Натансон-II 的教科书中有初级引论. 各种类型有序集的详细研究见 Birkhoff 的书.

§2. 拓 扑 空 间

2.1. 我们可以用各种不同的方法使一个集合变为拓扑空间. 一种最常用和最方便的方法是指出该空间的开集系.

集合 X 叫做拓扑空间，如果在其中指定了子集系 $\mathfrak{G}$，$\mathfrak{G}$ 的元素称为开集，并且满足下列三个条件(拓扑空间的公理)：

1）空集$\varnothing$和整个集合 $\mathbf{X}$ 属于 $\mathfrak{G}$;

2）如果 $G_\xi\in\mathfrak{G}(\xi\in\Xi)$，则 $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} G_\xi\in\mathfrak{G}$，即任意多个开集的并是开集;

3）如果 G_1，$G_2\in\mathfrak{G}$，则 $G_1\cap G_2\in\mathfrak{G}$，即有限个开集的交是开集.

如果集合 $\mathbf{X}$ 成为拓扑空间，则称在 $\mathbf{X}$ 中引进了拓扑.

两个拓扑空间 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 叫做同胚的，如果在它们的元素之间可以建立一一对应，并且在此对应下 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 的开集也是互相对应的. 从拓扑空间的理论观点来看，同胚的空间显然可以等同起来.

设在集合 $\mathbf{X}$ 中用两种一般说是不同的方法引进拓扑，结果便构成了两个拓扑空间 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$（它们的元素是相同的）. 分别以 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$ 表示空间 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 的开集系. 如果 $\mathfrak{G}_1\supset\mathfrak{G}_2$，则称 $\mathbf{X}_1$ 的拓扑强于 $\mathbf{X}_2$ 的拓扑（或者 $\mathbf{X}_2$ 的拓扑弱于 $\mathbf{X}_1$ 的拓扑）. 这时记为 $\tau(\mathbf{X}_1)\geqslant\tau(\mathbf{X}_2)$（或 $\tau(\mathbf{X}_2)\leqslant\tau(\mathbf{X}_1)$）.

设 $\mathbf{X}$ 是拓扑空间，$\mathfrak{G}$ 是其开集系. 其次，设 $\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 是任意的集合. 容易验证，由形如 $G\cap\mathbf{X}_0$ $(G\in\mathfrak{G})$ 的集合所构成的系 $\mathfrak{G}_0$ 满足拓扑空间的公理（关于集合 $\mathbf{X}_0$），因而 $\mathbf{X}_0$ 便成为拓扑空间. 称 $\mathbf{X}_0$ 的拓扑为 $\mathbf{X}$ 的诱导拓扑，而 $\mathbf{X}_0$ 是拓扑空间 $\mathbf{X}$ 的子空间.

2.2. 拓扑空间 $\mathbf{X}$ 中的集合 F 叫做闭的，如果集合 $G=\mathbf{X}\backslash F$ 是开的. 空间 $\mathbf{X}$ 的所有闭集的系 $\mathfrak{F}$ 具有下列性质:

1）$\varnothing,\mathbf{X}\in\mathfrak{F}$;

2）如果 $F_\xi\in\mathfrak{F}(\xi\in\Xi)$，则 $\bigcap\limits_{\xi\in\Xi} F_\xi\in\mathfrak{F}$，即任意多个闭集的交是闭集;

3）如果 $F_1,F_2\in\mathfrak{F}$，则 $F_1\cup F_2\in\mathfrak{F}$，即有限个闭集的并是闭集.

因为系 $\mathfrak{F}$ 唯一地决定了开集系 $\mathfrak{G}$，所以可以首先在 $\mathbf{X}$ 中给出

满足上述三个条件的系$\mathfrak{F}$来引进拓扑，$\mathfrak{F}$中的集合称为闭集．这时开集定义为闭集的余集．

如果$\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$是闭集，则在$\mathbf{X}_0$中引入$\mathbf{X}$的诱导拓扑，我们便得到空间$\mathbf{X}_0$的闭集系$\mathfrak{F}_0$，它由整个包含于$\mathbf{X}_0$中的$\mathbf{X}$的闭集所组成．

2.3. 设$\mathbf{X}$是拓扑空间．点$x\in\mathbf{X}$叫做集合$E\subset\mathbf{X}$的内点，如果存在$\mathbf{X}$中的开集G，使得$x\in G\subset E$．如果点$x\in\mathbf{X}$是某个集合$V\subset\mathbf{X}$的内点，则称集合V是x的邻域．设$\mathfrak{B}_x$是点x的邻域系，如果对于点x的任何邻域V都有邻域$V_x\in\mathfrak{B}_x$，使得$V_x\subset V$，则称$\mathfrak{B}_x$为点x的基本邻域系或邻域基底．空间所有点的基底$\mathfrak{B}_x$的总体$\mathfrak{B}$叫做空间的基底．空间的基底具有下列性质：

1）如果$V\in\mathfrak{B}_x$，则$x\in V$．

2）如果$V_1, V_2\in\mathfrak{B}_x$，则存在$V\in\mathfrak{B}_x$，使得$V\subset V_1\cap V_2$．

3）对于任意的邻域$V_x\in\mathfrak{B}_x$，存在$V'_x\in\mathfrak{B}_x$，使得$V'_x\subset V_x$，并且对于任意的$y\in V'_x$可以找到$V_y\in\mathfrak{B}_y$，使得$V_y\subset V_x$．

我们来说明最后一个性质．因为V_x是点x的邻域，所以存在包含点x的开集$G\subset V_x$．集合G是点x的邻域，因此存在$V'_x\in\mathfrak{B}_x$，使得$V'_x\subset G$，更有$V'_x\subset V_x$．如果$y\in V'_x$，则$y\in G$，且由于G是开集，因而G是y的邻域，所以可以找到$V_y\subset G$ $(V_y\in\mathfrak{B}_y)$．更加有$V_y\subset V_x$．

性质1)—3)刻划了空间基底的特征．即下述定理成立．

定理1． 设$\mathbf{X}$是某个集合．对于每个点$x\in\mathbf{X}$，以$\mathfrak{B}_x$表示与x相联系的$\mathbf{X}$的子集系，并且满足条件1)—3)．集合$G\subset\mathbf{X}$叫做开的，如果对于任何$x\in G$都存在$V\subset G(V\in\mathfrak{B}_x)$．则此开集系满足拓扑空间的公理，并且，在如此得到的拓扑空间中，每个系$\mathfrak{B}_x$都是点x的邻域基底．

证． 由条件1)—2)，显然可以推出它满足拓扑空间的公理．

我们来验证，对于任何 $x\in\mathbf{X}$，系 $\mathfrak{B}_x$ 都是点 x 的基本邻域系. 设 $V\in\mathfrak{B}_x$. 构造集合 G，它是由所有这样的点 $y\in V$ 组成的，对于这个 y 存在 $V_y\subset V(V_y\in\mathfrak{B}_y)$. 我们来证明 G 是开集. 取任意的点 $z\in G$. 存在集合 $V_z\in\mathfrak{B}_z$，使得 $V_z\subset V$. 根据条件 3）可以找到 $V'_z\in\mathfrak{B}_z$ 使得 $V'_z\subset V_z$ 且对于任何 $y\in V'_z$ 都存在 $V_y\subset V_z(V_y\in\mathfrak{B}_y)$. 这表明 $y\in G$ 且 $V'_z\subset G$，即 G 是开集，从而 V 是点 x 的邻域. 余下要验证 $\mathfrak{B}_x$ 是基本邻域系. 设 U 是点 x 的任意邻域. 存在包含点 x 的开集 $G\subset U$. 所以，根据定义可以找到 $V_x\in\mathfrak{B}_x$ 使得 $V_x\subset G$，从而更有 $V_x\subset U$.

上面证明的定理使我们能够用对于空间的每个点指出基本邻域系的方法来引进拓扑. 这种引进拓扑的方法确实是最方便的，因为常常可以选结构比较简单的集合作为邻域. 例如，欧氏空间的拓扑利用所有可能的球（容易验证，它组成了基底）来给出. 我们用基底的术语来描述在拓扑空间中所引进的基本概念.

设在集合 $\mathbf{X}$ 中指出了两个基底*）：$\{\mathfrak{B}_x\}(x\in\mathbf{X})$ 与 $\{\mathfrak{U}_x\}(x\in\mathbf{X})$. 每个基底按定理 1 都规定了 $\mathbf{X}$ 中的拓扑. 按第一种基底构成的拓扑空间记为 $\mathbf{X}_1$，而按第二种的记为 $\mathbf{X}_2$.

使 $\mathbf{X}_1$ 的拓扑弱于 $\mathbf{X}_2$ 的拓扑的充要条件是对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 及 $V\in\mathfrak{B}_x$，都可以找到含于 V 中的邻域 $U\in\mathfrak{U}_x$.

这个事实不难证明，留给读者完成.

由上述命题推知，两个基底确定同一拓扑的充要条件是，除上述条件外还满足其对称条件：对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 及 $U\in\mathfrak{U}_x$，可以找到含于 U 中的 $V\in\mathfrak{B}_x$. 这时，称这两个基底是等价的.

如果 $\mathbf{X}_0$ 是拓扑空间 $\mathbf{X}$ 中的集合，在 $\mathbf{X}$ 中给定了基底 $\{\mathfrak{B}_x\}$ $(x\in\mathbf{X})$，则 $\mathbf{X}_0$ 的诱导拓扑可以由基底 $\{\mathfrak{B}_x^{(0)}\}(x\in\mathbf{X}_0)$ 确定，其中

---

*）所谓集合 $\mathbf{X}$ 中的基底，以下理解为满足条件 1）—3）的集合的总体.

$\mathfrak{B}_x^{(0)}$ 由所有形如 $V\cap \mathbf{X}_0$ ($V\in\mathfrak{B}_x$) 的集合组成. 我们在这里留给读者证明, 这样构造的总体 $\{\mathfrak{B}_x^{(0)}\}$ 满足定理 1 的条件, 并且这个基底确定的拓扑与诱导拓扑一致.

2.4. 在用邻域的术语来指出闭集的条件之前, 还要引进一个重要概念. 拓扑空间 $\mathbf{X}$ 的点 x 叫做集合 $E\subset\mathbf{X}$ 的接触点, 如果取点 x 的任何邻域 V, 交集 $V\cap E$ 都非空. 此外, 如果这个交集永远也不归结为一个点 x, 则 x 称为集合 E 的极限点 (或者凝聚点; 也称为聚点).

在接触点(相应地极限点)的定义中, 考虑的也可以不是 x 的全部邻域, 而只是这个点的某个基本邻域系中的邻域.

集合 E 的所有接触点组成的集合叫做 E 的闭包, 记为 $\bar{E}$. 不难证明, 闭包具有下列性质:

1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$;

2) $E\subset\bar{E}$;

3) 如果 $E_1\subset E_2$, 则 $\bar{E}_1\subset\bar{E}_2$;

4) $\overline{E_1\cup E_2}=\bar{E}_1\cup\bar{E}_2$;

5) $\bar{\bar{E}}=\bar{E}$.

我们来验证最后两个不那么明显的性质. 设 $E=E_1\cup E_2$. 因为 $E_i\subset E$, 所以 $\bar{E}_i\subset\bar{E}$ ($i=1,2$), 由此 $\bar{E}_1\cup\bar{E}_2\subset\bar{E}$. 反之, 如果 $x\in\bar{E}$, 假设 $x\notin\bar{E}_1$, 则可以找到点 x 的邻域 V_0, 使得 $V_0\cap E_1=\varnothing$. 设 V 是点 x 的任意的邻域. 可以认为 $V\subset V_0$ (否则我们取交 $V\cap V_0$). 因为 $V\cap E\neq\varnothing$, 所以应有 $V\cap E_2\neq\varnothing$, 从而 $x\in\bar{E}_2\subset\bar{E}_1\cup\bar{E}_2$.

验证最后一个性质, 只需证明 $\bar{\bar{E}}\subset\bar{E}$. 设 $x\in\bar{\bar{E}}$. 取点 x 的任意的邻域 V. 可以认为, V 是开集且因而它是自己所有点的邻域. 交 $V\cap\bar{E}\neq\varnothing$; 设 $y\in V\cap\bar{E}$. 因为 $y\in\bar{E}$, 而 V 是点 y 的邻域, 所以 $V\cap E\neq\varnothing$, 这就表明 $x\in\bar{E}$.

集合 $F\subset\mathbf{X}$ 是闭的, 当且仅当 $\bar{F}=F$. 事实上, 如果 $x\notin F=\bar{F}$, 则

存在点 x 的邻域 V，它与 F 不相交．这表明集合 $G=\mathbf{X}\backslash F$ 是开的，从而 F 是闭的．将上述论证倒过来叙述便得到逆命题．

我们再指出一个明显的事实，集合 E 的闭包可以由在 E 中添加 E 的所有极限点而得到，于是，闭集可以看成这样的集合，它包含了自己的所有极限点．

对于 $E\subset\mathbf{X}$，以 $\mathring{E}$ 表示集合 E 的所有内点的集合，称其为 E 的内部．留给读者验证，$\mathring{E}$ 是含于 E 中的最大开集．

设 $\mathbf{X}$ 是拓扑空间．集合 $E\subset\mathbf{X}$ 叫做在集合 $\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 中稠密，如果 $\bar{E}\supset\mathbf{X}_0$．如果 $\bar{E}=\mathbf{X}$，则称 E 处处稠密．集合 $E\subset\mathbf{X}$ 叫做无处稠密的，如果其闭包的内部是空集(或者，等价地，如果 $\mathbf{X}\backslash\bar{E}$ 处处稠密)．集合 $E\subset\mathbf{X}$ 叫做第一纲集合，如果 E 可以表示为可数个无处稠密的集合的并．集合 $E\subset\mathbf{X}$，如果不是第一纲集合，叫做第二纲集合(在 $\mathbf{X}$ 中)．

拓扑空间 $\mathbf{X}$ 叫做可分的，如果其中存在可数的处处稠密的集合．后面我们还要详细地讨论这些概念．

2.5. 设 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 是拓扑空间．映射 $f:\ \mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 叫做连续的，如果每个开集的原象仍是开集．映射 $f:\ \mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 叫做在点 $x\in\mathbf{X}$ 处连续，如果点 $f(x)$ 的任意邻域的原象是点 x 的邻域(显然，如果在后一定义中以点 $f(x)$ 的某个邻域基底中的邻域代替点 $f(x)$ 的任意邻域，定义仍有效)．下面的定理给出等价于连续性的各种条件．

定理 2．设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是拓扑空间，f 是 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的映射，则下列命题是等价的：

1) 映射 f 连续；

2) 每个闭集的原象仍是闭集；

3) 映射 f 在每一点 $x\in\mathbf{X}$ 处连续；

4) 对于任何点 $x\in\mathbf{X}$ 和点 $f(x)$ 的任何邻域 U，存在点 x 的邻

域 V，使得 $f(V)\subset U$.

证. 对于任何 $B\subset \mathbf{Y}$，由于关系式 $\mathbf{X}\backslash f^{-1}(B)=f^{-1}(\mathbf{Y}\backslash B)$，所以命题 1)与 2)等价. 3)与 4)的等价性显然. 因为由 1)显然能推出 3)，所以我们只要证明 3) 蕴涵 1). 设 G 是 $\mathbf{Y}$ 的开子集. 我们证明 $f^{-1}(G)$ 是开的. 如果 $x\in f^{-1}(G)$，则可以找到 $y\in G$，满足 $y=f(x)$. 因为 G 是点 y 的邻域，所以根据在点 x 处连续性的定义，$f^{-1}(G)$ 是点 x 的邻域. 于是，点 x 是内点，从而集合 $f^{-1}(G)$ 是开的.

设 f 是 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 上的双射映射. 如果两个映射 f 与 f^{-1} 都连续，则映射 f 叫做同胚. 显然，空间 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 同胚，当且仅当它们彼此可以同胚地映射.

2.6. 以后我们常用有向列收敛(Moore-Smith 收敛)的术语来描述拓扑空间和许多拓扑概念.

拓扑空间 $\mathbf{X}$ 的元素的有向列 $\{x_\alpha\}(\alpha\in A)$ 叫做收敛于 $x\in\mathbf{X}$，如果对于点 x 的任何邻域 V 都存在 $\alpha_V\in A$，使得当 $\alpha\geqslant\alpha_V$ 时 $x_\alpha\in V$. 这个事实记为 $x_\alpha\underset{A}{\rightarrow}x$ 或 $x=\lim\limits_{\alpha}x_\alpha$ (以后在这个记号中常略去指标集). 点 x 叫做有向列 $\{x_\alpha\}$ 的极限.

我们指出收敛的有向列的某些性质.

性质 1. 如果 $x_\alpha\underset{A}{\rightarrow}x$ 且 $\{y_\beta\}(\beta\in B)$ 是 $\{x_\alpha\}$ 中的有向子列，则 $y_\beta\underset{B}{\rightarrow}x$.

性质 2. 设 $E\subset\mathbf{X}$；使 $x\in\bar{E}$ 的充要条件是存在一个满足条件 $x_\alpha\to x$ 且 $x_\alpha\in E$ 的有向列 $\{x_\alpha\}$.

事实上，如果存在这样的有向列，则对于点 x 的任何邻域 V，交 $V\cap E\neq\varnothing$，因为它包含了该有向列的元素. 故 $x\in\bar{E}$.

现在设 $x\in\bar{E}$；$\mathfrak{V}_x$ 是点 x 的基本邻域系. 对于 U，$V\in\mathfrak{V}_x$，如果 $U\supset V$，则认为 $U\leqslant V$. 显然，按此方式赋序，$\mathfrak{V}_x$ 成为有向列. 由于 $x\in\bar{E}$，交 $U\cap E$ 非空，在其中选取点 x_U. 对于每个 $U\in\mathfrak{V}_x$ 都这样做，我们得到收敛于点 x 的有向列 $\{x_U\}(U\in\mathfrak{V}_x)$.

从上述证明推出:

性质 3. 集合 $F\subset \mathbf{X}$ 是闭集的充要条件为对于任何有向列 $\{x_\alpha\}(\alpha\in A)$，由 $x_\alpha\to x$ 及 $x_\alpha\in F\ (\alpha\in A)$ 推出 $x\in F$.

只满足拓扑空间三条公理的拓扑空间可能具有最奥妙的结构，或者相反，它们的拓扑结构也可能如此简单，以致用拓扑方法来研究它是不可能的. 例如，只有两个开集(空集和全空间)的空间便是这样的.

因此，通常还要引进某些补充的公理，它区分出更窄一些的拓扑空间类，例如，下述的 Hausdorff 分离公理，它保证了有向列极限的唯一性这个重要性质.

拓扑空间 $\mathbf{X}$ 叫做 Hausdorff 空间(或可分离空间)，如果对于任何两个不同的点 x, $y\in\mathbf{X}$，可以找到点 x 的邻域 U 和点 y 的邻域 V，使得 $U\cap V=\varnothing$.

性质 4. 使每个收敛的有向列都收敛于唯一的极限的充要条件为空间 $\mathbf{X}$ 是 Hausdorff 空间.

当 $\mathbf{X}$ 是 Hausdorff 空间时，极限的唯一性可直接从极限的定义推出.

我们证明逆命题. 设 $\mathbf{X}$ 不是 Hausdorff 空间. 则存在一对不同的点 $x,y\in\mathbf{X}$，使得对于 x, y 的任何邻域 U,V，交 $U\cap V\neq\varnothing$. 以 A 表示邻域对 (U,V) 的总体，其中 U 是点 x 的邻域，而 V 是点 y 的邻域. 如果 $\alpha'=(U',V')$ 与 $\alpha''=(U'',V'')$ 是 A 中的元素，则当同时有 $U'\supset U''$, $V'\supset V''$ 时便认为 $\alpha'\leqslant\alpha''$. 设 $\alpha=(U,V)\in A$. 因为 $U\cap V\neq\varnothing$，可以选取 $x_\alpha\in U\cap V$. 这时 $x_\alpha\underset{A}{\to}x$，同时还有 $x_\alpha\underset{A}{\to}y$. 例如，我们来验证第一个关系式. 对于点 x 的任何邻域 U_0 存在 $x_\alpha\in U_0$. 可以认为 $\alpha_0=(U_0,V_0)$，其中 V_0 是点 y 的某个邻域. 因为 $\alpha=(U,V)\geqslant\alpha_0$ 特别表示 $U\subset U_0$，所以 $x_\alpha\in U\subset U_0$，即 $x_\alpha\underset{A}{\to}x$.

拓扑空间$\mathbf{X}$到拓扑空间$\mathbf{Y}$内的映射f的连续性条件可以用收敛的概念来叙述.

性质 5. 映射f连续的充要条件是对于任何$x\in\mathbf{X}$及任何有向列$\{x_\alpha\}(\alpha\in A)$，由$x_\alpha \underset{A}{\to} x$推出$f(x_\alpha)\underset{A}{\to}f(x)$.

证明充分性. 设$\Phi\subset\mathbf{Y}$是闭集，且$F=f^{-1}(\Phi)$. 我们研究集合F中收敛于$x\in\mathbf{X}$的有向列$\{x_\alpha\}(\alpha\in A)$. 因为根据条件$f(x_\alpha)\underset{A}{\to}f(x)$及$f(x_\alpha)\in\Phi(\alpha\in A)$，所以$f(x)\in\Phi$; 于是，$x\in F$. 由此可见集合$F$是闭的，从而映射$f$连续.

假设f是连续映射. 取任意的$x\in\mathbf{X}$及收敛于x的有向列$\{x_\alpha\}(\alpha\in A)$. 设$U$是点$y=f(x)$的邻域. 存在点$x$的邻域$V$，使得$f(V)\subset U$. 其次，可以找到$\alpha_V\in A$，使得当$\alpha\geqslant\alpha_V$时$x_\alpha\in V$. 对于这些$\alpha$有$f(x_\alpha)\in U$，由此推出$f(x_\alpha)\underset{A}{\to}f(x)$*).

性质 6. 如果空间$\mathbf{X}$的每个点都具有可数的基本邻域系，则在性质 2—5 中的叙述可以用通常的序列代替有向列.

事实上，设$\mathfrak{V}_x=\{V_n\}(n\in N)$是点$x$的邻域基底. 令$U_n=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n$. 如果有向列$x_\alpha\underset{A}{\to}x$，则对于每个$n\in N$取$\alpha_n\in A$，使得$y_n=x_{\alpha_n}\in U_n$. 于是序列$y_n\to x$. 利用它，由对于有向列的性质 2—5，容易得出对于序列的类似性质.

由预先给定的收敛性出发，利用有向列收敛的性质 3 可以引进拓扑. 这就是说，设在集合$\mathbf{X}$中定义了收敛性，即划分出一类有向列把它叫做收敛的，并且对于每个这样的有向列指出它的极限(为了简单起见，假设它是唯一的). 此外，我们还认为这种收敛具有性质 1. 集合$F\subset\mathbf{X}$叫做闭的，如果F包含了以其自身元素构成的任何收敛有向列的极限. 不难验证，如此定义的闭集系满足 2.2 中的条件 1)—3)，因而我们事实上有了一个拓扑空间. 因为

*) 如果条件对于给定点x成立，则由此证明推出，映射f在该点连续.

$\mathbf{X}$已成为拓扑空间，可以在其中引进收敛性，就象在任何拓扑空间中所做的那样. 我们指出，原有的收敛与由它产生的拓扑收敛，一般说来是不同的.

2.7. 紧空间的概念是一般拓扑中最重要的概念之一，它是在1920年初由П. С. Александров和П. С. Урысон引进的.

拓扑空间$\mathbf{X}$叫做紧的，如果对于任何构成了空间$\mathbf{X}$的覆盖的开集系$\{G_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$，即

$$\bigcup_{\xi\in\Xi} G_\xi=\mathbf{X},$$

其中必存在有限个开集$G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \cdots, G_{\xi_n}$也能覆盖空间$\mathbf{X}$.

称集合系$\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$形成有心系(或中心化的)，如果这个系中任意有限个集合的交非空.

由于集合系$\{G_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$构成空间$\mathbf{X}$的覆盖等价于集合G_ξ的余集F_ξ的交是空集. 所以，空间$\mathbf{X}$是紧的，当且仅当该空间的任何有心闭集系都有非空的交.

设$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$是拓扑空间$\mathbf{X}$中元素的任意一个有向列. 称有向列$\{x_\alpha\}$与子集$E\subset\mathbf{X}$是经常相遇的，如果对于任何$\alpha\in A$，可以找到指标$\alpha'\in A$，使得$\alpha'\geqslant\alpha$并且$x_{\alpha'}\in E$. 点$x\in\mathbf{X}$叫做有向列$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$的极限点，如果$\{x_\alpha\}$与点x的每个邻域都经常相遇(不要与集合$\{x_\alpha:\ \alpha\in A\}$的极限点相混淆!). 一个有向列可以有多于一个的极限点、一个极限点或没有极限点. 例如，序列$x_n=n$ $(n\in N)$在$\boldsymbol{R}$中没有极限点. 另一方面，将全体有理数按任意方式编成序列，则任何实数都是这个序列的极限点. 如果有向列收敛于某一点，则该点是它的极限点(在Hausdorff空间中它是唯一的).

引理1. 拓扑空间$\mathbf{X}$的点x是有向列$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$的极限点，当且仅当存在收敛于x的有向子列$\{y_\beta\}$ $(\beta\in B)$.

证. 设x是有向列$\{x_\alpha\}$的极限点，$\mathfrak{B}_x$是点x的所有邻域的

系. 研究由所有对(α, U)组成的集合B, 其中$\alpha\in A$, $U\in\mathfrak{B}_x$且$x_\alpha\in U$. 如果我们在B中按下列方式赋序: $(\alpha, U)\geqslant(\alpha_1, U_1)$当且仅当$\alpha\geqslant\alpha_1$及$U\subset U_1$, 则$B$成为按递增有向的集合. 事实上, 如果$(\alpha, U), (\alpha_1, U_1)\in B$, 则可以找到$U_2\in\mathfrak{B}_x$, 使得$U_2\subset U\cap U_1$. 因为$A$按递增有向, 所以存在$\alpha_0\geqslant\alpha, \alpha_1$. 由于$\{x_\alpha\}$与$U_2$经常相遇, 可以找到$\alpha_2\geqslant\alpha_0$, 并且$x_{\alpha_2}\in U_2$. 于是$(\alpha_2, U_2)\geqslant(\alpha, U), (\alpha_1, U_1)$.

令$y_{(\alpha,U)}=x_\alpha$, 其中$(\alpha, U)\in B$. 于是$\{y_{(\alpha,U)}\}$ $((\alpha, U)\in B)$是有向列$\{x_\alpha\}$的有向子列. 事实上, 对于任意的$\alpha\in A$取(α, U), 其中邻域$U\in\mathfrak{B}_x$适合$x_\alpha\in U$(例如, $U=\mathbf{X}$). 这样, 如果$(\alpha_1, U_1)\geqslant(\alpha, U)$, 则$\alpha_1\geqslant\alpha$且$y_{(\alpha_1,U_1)}=x_{\alpha_1}$. 我们来证明有向列$\{y_{(\alpha,U)}\}$收敛于$x$. 取$U\in\mathfrak{B}_x$. 因为$x$是$\{x_\alpha\}$的极限点, 所以可以找到$\alpha\in A$, 使得$x_\alpha\in U$. 如果$(\alpha_1, U_1)\geqslant(\alpha, U)$, 则$y_{(\alpha_1,U_1)}=x_{\alpha_1}\in U_1\subset U$, 从而证明了收敛性.

反之, 设有向子列$y_\beta\to x$. 对于任何$\alpha\in A$可以找到$\beta(\alpha)\in B$, 使得对于所有的$\beta\geqslant\beta(\alpha)$都有$y_\beta=x_{\alpha'}$且$\alpha'\geqslant\alpha$. 如果$U$是点$x$的任意的邻域, 则存在$\beta_0\in B$, 使得对于$\beta\geqslant\beta_0$有$y_\beta\in U$. 取$\beta\geqslant\beta(\alpha), \beta_0$. 于是可以找到$\alpha'\geqslant\alpha$, 使得$x_{\alpha'}=y_\beta\in U$, 从而证明了$x$是有向列$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$的极限点.

引理 2. 拓扑空间$\mathbf{X}$是紧的, 当且仅当$\mathbf{X}$中的任何有向列都具有极限点.

证. 设$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$是紧拓扑空间$\mathbf{X}$中任意的有向列. 因为集合A按递增有向, 所以集合系$B_\alpha=\{x_{\alpha'}:\ \alpha'\geqslant\alpha\}$是有心的. 它们的闭包$\overline{B}_\alpha$更是有心系. 于是, 由于$\mathbf{X}$的紧性, 所有$\overline{B}_\alpha$的交必包含某个点$x$. 我们来证明$x$是有向列$\{x_\alpha\}$的极限点.

以$\mathfrak{B}_x$表示点x的所有邻域的系. 需要验证, 对于任何邻域$U\in\mathfrak{B}_x$及任何$\alpha\in A$, 可以找到$\alpha_1\in A$, 使得$\alpha_1\geqslant\alpha$和$x_{\alpha_1}\in U$. 事实上, 因为对于任何$\alpha\in A$都有$x\in\overline{B}_\alpha$, 所以对于$U\in\mathfrak{B}_x$可以找到$\alpha_1\geqslant\alpha$,

使得 $x_{\alpha_1}\in U$.

现在证明逆命题. 设X是拓扑空间, 其中的每个有向列都有极限点. 为了证明X的紧性, 我们来验证X中任意的有心的闭子集系 $\mathfrak{F}_0$ 都具有非空的交. 设 A 是 $\mathfrak{F}_0$ 中元素的所有可能的有限交组成的系.

显然, 只要证明 A 中所有集合的交非空. 因为系 $\mathfrak{F}_0$ 是有心的, 所以如果我们将 A 按包含关系赋序(如果 $\alpha_1, \alpha_2\in A$, $\alpha_1\supset\alpha_2$, 则 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$), 则 A 按递增有向. 如果对于任何 $\alpha\in A$ 取任意的元素 $x_\alpha\in\alpha$, 则得有向列 $\{x_\alpha\}(\alpha\in A)$. 根据条件它有极限点 x. 取任何集合 $\alpha\in A$, 我们来证明 x 是 α 的接触点, 从而由于 α 的闭性便得 $x\in\alpha$. 于是由于 α 的任意性, 点 x 属于 A 中所有集合的交, 即交是非空的.

这样, 取点 x 的任意的邻域 U. 于是可以找到 $\alpha'\in A$, $\alpha'\geqslant\alpha$, 使得 $x_{\alpha'}\in U$, 由此 $x_{\alpha'}\in\alpha'\subset\alpha$ 且 $x_{\alpha'}\in U\cap\alpha$, 从而证明了 x 是集合 α 的接触点.

推论. 如果紧空间X中的有向列 $\{x_\alpha\}$ 只有唯一的极限点 x, 则 $x_\alpha\to x$.

证. 如果 $\{x_\alpha\}$ 不收敛于 x, 则可以找到点 x 的邻域 U, 使得集合 $\{x_\alpha: x_\alpha\notin U\}$ 是 $\{x_\alpha\}$ 的有向子列, 根据引理 2 它应有极限点, 但该点不可能是 x.

从引理 1 与 2 推得:

定理 3. 拓扑空间X是紧的, 当且仅当X中每个有向列都包含收敛于空间X的某个点的有向子列.

紧的 Hausdorff 空间就叫做紧空间.

拓扑空间X中的集合 E 叫做紧的, 如果把它看作拓扑空间(以空间X的诱导拓扑为拓扑)是紧的. 因为 E 中的开集具有形式 $G\cap E$, 其中 G 是X中的开集, 所以可以按下述方式定义集合 E 的

紧性：对于覆盖E的任何(**X**中的)开集系$\{G_\xi\}$，即$\bigcup_\xi G_\xi\supset E$，存在有限个集合$G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \cdots, G_{\xi_n}$，也能覆盖$E$.

定理 4. 如果**X**是Hausdorff空间，则一切紧集$E\subset$**X**都是闭的.

证. 假设集E有接触点$x_0\notin E$. 对于每个$x\in E$，可以找到开的互不相交的点x的邻域V_x与点x_0的邻域$V_{x_0}^{(x)}$. 显然，集系$\{V_x\}(x\in E)$覆盖了集E，所以存在有限个点$x_1, x_2, \cdots, x_n\in E$，使得

$$G=\bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}\supset E.$$

交

$$V_0=\bigcap_{k=1}^{n} V_{x_0}^{(x_k)}$$

显然是点x_0的邻域. 但是$V_0\cap E\subset V_0\cap G=\varnothing$，这与$x_0$是集$E$的接触点相矛盾.

注. 如果**X**是紧空间，E是**X**中的闭集，则E是紧的.

事实上，E中的闭集在**X**中也是闭的. 因此，如果$\{F_\xi\}(\xi\in\Xi)$是E中的有心闭集系，则它具有包含在E中的非空的交.

拓扑空间**X**的集合E叫做相对紧的，如果它的闭包是紧的. 显然，紧空间中的任何集合都是相对紧的.

设**X**是紧空间，f是空间**X**到拓扑空间**Y**内的连续映射. 则有

定理 5. 集合$f(\mathbf{X})$在空间**Y**中是紧的.

证. 令$A=f(\mathbf{X})$，设$\{G_\xi\}(\xi\in\Xi)$是覆盖A的开集系. 设$G'_\xi=f^{-1}(G_\xi)$. 集合$G'_\xi(\xi\in\Xi)$是开的，此外，$\bigcup_{\xi\in\Xi} G'_\xi=\mathbf{X}$. 因而，存在指标$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，使得$\bigcup_{k=1}^{n} G'_{\xi_k}=\mathbf{X}$. 但这时也有$\bigcup_{k=1}^{n} G_{\xi_k}\supset A$. 定

理证毕.

推论 1. 如果E是拓扑空间$\mathbf{X}$中的紧集，则$f(E)$是空间$\mathbf{Y}$中的紧集.

利用定理 4，得

推论 2. 如果$\mathbf{Y}$是Hausdorff 空间，则紧集 $E\subset\mathbf{X}$ 的象$f(E)$是闭的.

推论 3. 如果空间$\mathbf{X}$是紧的，而$\mathbf{Y}$是Hausdorff 空间，并且f是$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$上的一对一的连续映射，则逆映射f^{-1}连续，即f是同胚.

事实上，每个闭集$F\subset\mathbf{X}$都是紧的. 该集在映射f^{-1}下的原象是$f(F)$，根据推论 2 它是闭集. 由于每个闭集的原象是闭的，故映射f^{-1}连续.

此外，我们指出在紧空间上连续函数的下列重要性质，它是实变函数的 Weierstrass 定理的推广.

定理 6. 在紧空间$\mathbf{X}$上的每个连续实函数f都能取到其最大值和最小值.

证. 只证最大值情形. 设$M=\sup\{f(x):x\in\mathbf{X}\}$. 根据定理 5，数$M$有限. 对于任何$n\in\mathbf{N}$，令

$$F_n=\{x\in\mathbf{X}:\quad f(x)\geqslant M-1/n\}.$$

显然，集合F_n是闭的和非空的. 此外，当$n\geqslant m$时$F_n\subset F_m$. 因此$\{F_n\}$是一有心闭集系，从而$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$. 如果$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$，则$f(x)\geqslant M$，由此$f(x)=M$，即函数$f$在点$x$处取到最大值.

我们还需要两个与紧性概念密切相关的性质. 设$\mathbf{X}$是拓扑空间. 集$E\subset\mathbf{X}$叫做列紧的，如果E中的任何序列都含有收敛于E中点的子序列(对照定理 3). 集$E\subset\mathbf{X}$叫做相对列紧的，如果E中的任何序列都含有收敛于$\mathbf{X}$中点的子序列. 集$E\subset\mathbf{X}$叫做可数紧

的，如果E中的任何序列都具有极限点$x\in E$（对照引理2）．集$E\subset \mathbf{X}$叫做相对可数紧的，如果E中的任何序列都具有极限点$x\in \mathbf{X}$．我们指出，一般说来，紧不能推出列紧，反之也一样．如果集合是紧的，则它显然是可数紧的．上面引进的这些概念之间的关系，以后在一些特殊的情形下还要讨论．

2.8. 设$\{\mathbf{X}_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$是一族拓扑空间；我们来研究直积

$$\mathbf{X}=\prod_{\alpha\in A}\mathbf{X}_\alpha(\text{见 § 1}).$$

在$\mathbf{X}$中引进拓扑，取形如$\prod\limits_{\alpha\in A}U_\alpha$的一切集合作为点$f\in\mathbf{X}$的邻域基底，其中每个集合$U_\alpha$是点$f(\alpha)$在空间$\mathbf{X}_\alpha$中的邻域，并且使$U_\alpha$与$\mathbf{X}_\alpha$不同的指标$\alpha\in A$最多是有限个．留给读者验证，所引进的集合总体实际上是基底．容易证明，$\mathbf{X}$中的有向列$\{f_\beta\}$ $(\beta\in B)$收敛于点$f\in\mathbf{X}$，当且仅当对于每个α在拓扑空间$\mathbf{X}_\alpha$中$f_\beta(\alpha)\underset{B}{\rightarrow}f(\alpha)$．由此可见，空间$\mathbf{X}$的元素的有向列$\{f_\beta\}$的收敛是按坐标收敛，即每个"坐标"$f_\beta(\alpha)$在空间$\mathbf{X}_\alpha$中收敛于极限点$f$的对应"坐标"．

其次我们还需要下面的Тихонов定理，其证明可在Kelley的书中（第五章定理13）找到．

定理7. 如果对于任何$\alpha\in A$，$\mathbf{X}_\alpha$是紧空间，则空间$\mathbf{X}=\prod\limits_{\alpha\in A}\mathbf{X}_\alpha$也是紧的．

本节叙述的内容在Bourbaki-II及Kelley的书中有更详细的介绍．

最后我们对有关术语作一个注解．因为有时我们在同一个空间$\mathbf{X}$中同时研究几种拓扑，为了避免混乱，我们采用一种简化的记号．如果τ是空间$\mathbf{X}$中的某种拓扑，则所谓τ-闭包，τ-紧集等等将分别表示按拓扑τ的闭包，按拓扑τ的紧集等等．

§3. 度量空间

3.1. 度量空间是一类重要的拓扑空间. 集合 $\mathbf{X}$ 叫做度量空间, 如果每一对元素 $x, y\in\mathbf{X}$ 都对应一个实数 $\rho(x, y)$(元素 x 与 y 之间的距离), 满足条件:

1) $\rho(x, y)\geqslant 0$; 当且仅当 $x=y$ 时 $\rho(x, y)=0$;

2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$;

3) 对于任何 $z\in\mathbf{X}$, $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$ (三角不等式).

所引进的函数 ρ: $\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to R$ 叫做度量. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ *), 直线段, 圆周(如果取点之间最短弧的长度作为圆周上的距离)等可以作为最简单的度量空间的例子.

设 $\mathbf{X}$ 是具有度量 ρ 的度量空间. 集合

$$K_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbf{X}:\quad \rho(x, x_0)<\varepsilon\}$$

叫做以点 $x_0\in\mathbf{X}$ 为中心 $\varepsilon>0$ 为半径的开球.

集合

$$B_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbf{X}:\quad \rho(x, x_0)\leqslant\varepsilon\}$$

叫做以点 $x_0\in\mathbf{X}$ 为中心 $\varepsilon>0$ 为半径的闭球(下面通常简称为球).

定理 1. 集合 $K_{1/n}(x)(n\in N,\ x\in\mathbf{X})$ 的总体满足 2.3 中的条件1)—3), 即构成集合 $\mathbf{X}$ 中的基底.

证. 因为 $\rho(x, x)=0$, 所以条件 1)显然成立. 如果 $n, m\in N$ 且 $p=\max(n, m)$, 则 $K_{1/p}(x)\subset K_{1/n}(x)\cap K_{1/m}(x)$. 于是, 条件 2) 成立. 如果 $V_x=K_{1/n}(x)$, 则令 $V'_x=K_{1/(2n)}(x)$, 便有 $V'_x\subset V_x$. 此

---

*) 我们以 $\mathbf{R}^n$ 表示实 n 维空间, $\mathbf{C}^n$ 表示复 n 维空间.

外, 如果 $y\in V'_x$ 且 $V_y=K_{1/(2n)}(y)$, 则 $V_y\subset V_x$, 因为由三角形不等式, 对于任何 $z\in V_y$ 有 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)<1/(2n)+1/(2n)=\frac{1}{n}$. 由此可见, 条件 3)成立.

在定理 2.1 中引进的构造, 用典型的方式把度量空间$\mathbf{X}$变为以开球为基底的拓扑空间. 定理 1 也指出, $\mathbf{X}$中的每个点都具有可数的基底. 所以, 为了描述$\mathbf{X}$中的拓扑, 只须限于收敛序列(见 2.6, 性质 6). 我们指出, 在所得的拓扑空间中 $x_n\to x$ 当且仅当 $\rho(x_n,x)\to 0$.

其拓扑是由某种度量生成的拓扑空间叫做可度量化的(决不是所有的拓扑空间都是可度量化的; 这种空间的例子我们将在下面看到). 应该指出, 同一个拓扑可以由不同的度量生成.

定理 2. 1) $\rho(x,y)$是其变元的连续函数, 即如果 $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$, 则 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x_0,y_0)$.

2) 度量空间是 Hausdorff 空间(因而收敛序列只能有一个极限).

证. 1) 由三角形不等式得关系式

$$\rho(x',y')-\rho(x,y)\leqslant\rho(y,y')+\rho(x,x').$$

交换 x,y 与 x',y' 的位置, 得到相反符号的不等式, 由此

$$|\rho(x',y')-\rho(x,y)|\leqslant\rho(x,x')+\rho(y,y'). \qquad (1)$$

利用此式, 得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0)\to 0.$$

2) 如果 $x\neq x_0$, 则 $\varepsilon=\rho(x,x_0)/2>0$, 由三角形不等式推得, 开球 $K_\varepsilon(x)$与$K_\varepsilon(x_0)$不相交.

下面我们需要点到集合 $E\subset\mathbf{X}$ 的距离的概念. 如同在欧氏空间中一样, 我们把这个量定义为

$$\rho(x_0,E)=\inf_{x\in E}\rho(x_0,x).$$

一致收敛于函数 $x_0(t)$. 事实上，如果按任意的 $\varepsilon>0$ 选取 N，使得当 $n\geqslant N$ 时有 $\rho(x_n, x_0)<\varepsilon$, 则表示对于这样的 n

$$\sup_{t\in K}|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon,$$

从而对于所有的 $t\in K$, 不等式

$$|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N)$$

成立，由此推得要证明的一致收敛性.

反之显然：从连续函数列一致收敛于连续函数推得在空间 $\mathbf{C}(K)$ 中对应元素的收敛性. 如果 $K=[a, b]$, 则记为 $\mathbf{C}[a, b]$.

2) 空间 $\mathbf{s}$ 是所有的数列组成的集合，其中数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$ 与 $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots)$ 之间的距离用下式定义：

$$\rho(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}.$$

验证度量空间的公理 1)与 2)并无困难. 由于函数 $\varphi(\lambda)=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ 当 $\lambda\geqslant 0$ 时递增，所以有数值不等式

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leqslant\frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}\leqslant\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}, \tag{2}$$

从而推出条件 3)成立.

如果序列 $\{x_n\}$ $(x_n=(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots), n=1, 2, \cdots)$ 收敛于元素 $x_0=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_k^{(0)}, \cdots)$, 则表示

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k^{(0)} \qquad (k=1, 2, \cdots), \tag{3}$$

即 $\mathbf{s}$ 中点的序列的收敛是按坐标收敛，也就是点 x_n 的每个坐标都收敛于极限点 x_0 的对应的坐标.

事实上，由不等式

$$\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}{1+|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}\leqslant\rho(x_n, x_0) \qquad (k=1, 2, \cdots) \tag{4}$$

知，如果 $x_n \to x_0$，则得 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k^{(0)} \quad (k=1, 2, \cdots)$.

反之，如果条件(3)成立，由于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|} = \rho(x_n, x_0)$$

关于 n 一致收敛$\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k \text{是它的强级数}\right)$，故可逐项取极限，且因级数的每一项都趋于零，所以 $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

由上面的证明推出，空间 **s** 是可数的直线族的拓扑积.

我们还指出空间 $\mathbf{C}^{(l)}[a, b]$(为了和复空间 $\mathbf{C}^n$ 区别开，这里我们对上指标加上圆括号)，其元素是定义在$[a, b]$上且在此区间上有直到 l 阶连续导数的函数. $x, y \in \mathbf{C}^{(l)}[a, b]$ 之间的距离可以定义为：

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{l} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|$$

$$(x^{(0)}(t) = x(t), \quad y^{(0)}(t) = y(t)).$$

$\mathbf{C}^{(l)}[a, b]$中的收敛表示函数序列及其 $k(1 \leqslant k \leqslant l)$阶导数序列都一致收敛.

我们也可以研究空间 $\mathbf{C}^{(l)}(D)$，它是由在多维空间的区域D内自身及其直到 l 阶的偏导数都连续的函数所组成(见 IV. 4. 4).

我们指出，如果在 $\mathbf{C}(K)$ 中引进序：$x \geqslant y$ 当且仅当对于任何 $t \in K$ 有 $x(t) \geqslant y(t)$，而在 **s** 中约定，$x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \geqslant y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ 当且仅当对于任何 $k \in N$ 有 $\xi_k \geqslant \eta_k$，则 $\mathbf{C}(K)$与 **s** 成为有序集(但不是全序的).

§ 4. 完备性和可分性·第一纲集和第二纲集*)

从度量空间的公理可以推出距离和极限的一系列其他性质，类似于众所周知的实数的性质. 例如，如果 $x_n^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_n$, $x_n \to x_0$, 则有序列 $x_n^{(k_n)} \to x_0$. 但是，关于极限的某些重要命题，在实数集合中成立，却不能从度量空间的公理推出，因而，一般地说，在任意的度量空间中并不成立. 因此自然要从所有的度量空间中分出某些类空间，使其中的度量满足某些补充条件，推广了在实数空间中距离和收敛性的另一些非常重要的性质.

4.1. 完备性是这些性质中最重要的一个. 对于实数，完备性原理可以表示成各种形式(Dedekind 原理，有界集合存在确界等)，但其中只有一个 Cauchy 收敛准则，在叙述时不必用到度量以外的概念. 我们就采用广义 Cauchy 准则成立作为任意的度量空间完备性的定义. 这就给出下列定义.

度量空间 **X** 的点序列 $\{x_n\}$ 叫做*自收敛的***)，如果

$$\rho(x_m, x_n) \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

即如果对于任何 $\varepsilon > 0$ 可以找到 N_ε, 使得当 $m, n \geq N_\varepsilon$ 时

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

度量空间 **X** 叫做*完备的*，如果每个自收敛的序列 $\{x_n\}$ 都是收敛的，即存在点 $x_0 \in \mathbf{X}$, 使得 $x_n \to x_0$.

显然，在任何度量空间中每个收敛序列都是自收敛的.

由此可见，在完备的度量空间中 Cauchy 收敛准则成立：*序列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件为它是自收敛的.*

---

*) 第一纲集和第二纲集是 Baire 引进的.

**) 这样的序列也常常叫做 Cauchy 序列或基本序列.

从空间 $\mathbf{X}$ 转到它的闭子空间 $\mathbf{X}_0$ 时,完备的性质仍然保持.事实上,如果 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{X}_0$ 中自收敛的点序列,则由于空间 $\mathbf{X}$ 的完备性存在 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in\mathbf{X}$. 因为 $\mathbf{X}_0$ 是闭集,应有 $x_0\in\mathbf{X}_0$, 即序列 $\{x_n\}$ 在 $\mathbf{X}_0$ 中收敛.

不难看出,如果去掉集合 $\mathbf{X}_0$ 闭性的要求, 则上述结论就不正确了. 例如,只须取全体实数的空间作为 $\mathbf{X}$,而以包含在其中的有理数空间作为 $\mathbf{X}_0$,便能说明这个问题.

下面的引理常常能简化度量空间完备性的检验.

引理 1. 如果 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 包含收敛于点 x 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 则 $x_n\to x$.

证. 因为 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 所以对于每个 $\varepsilon>0$ 可以找到 N,使得当 $n, m\geqslant N$ 时 $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$. 对于 $n_k\geqslant N$ 有

$$\rho(x_n, x_{n_k})<\varepsilon. \tag{1}$$

因为 $x_{n_k}\to x$,所以,对(1)式取极限得 $\rho(x_n, x)\leqslant\varepsilon$,从而证明了 $x_n\to x$.

4.2. 在 §3 中引进的一切具体的度量空间都是完备的. 我们来验证这一点.

1) 空间 $\mathbf{C}(K)$. 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{C}(K)$ 中元素的自收敛序列. 如果 $\varepsilon>0$,则对于充分大的 m 和 n $(m, n\geqslant N_\varepsilon)$

$$\rho(x_m, x_n)=\max_{t\in K}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon.$$

由此可见,对于任何 $t\in K$ 有

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon. \tag{2}$$

现在固定 $t\in K$, 我们看到, 数列 $\{x_n(t)\}$ 是自收敛的, 因而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$ 存在,把它记为 $x_0(t)$. 余下还要证明, x_0 属于 $\mathbf{C}(K)$ 且 x_n 在此空间度量的意义下收敛于 x_0. 在不等式(2)中令 $m\to\infty$ 取极限得

$$|x_0(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon.$$

由此显然可知函数列$\{x_n(t)\}$一致收敛于函数 $x_0(t)$，从而推出函数$x_0(t)$的连续性及序列$\{x_n\}$在空间 $\mathbf{C}(K)$中收敛于 x_0.

类似地可以验证空间 $\mathbf{C}^{(l)}$的完备性.

2) 空间 $\mathbf{s}$. 证明空间 $\mathbf{s}$ 的完备性很简单. 如果 $x_n=(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots)$是自收敛序列,则利用 § 3 中形如(4)的不等式,容易验证每个数列 $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots$也是自收敛的，因而极限存在: $\xi_k^{(0)}=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}\ (k=1, 2, \cdots)$. 令 $x_0=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_k^{(0)}, \cdots)$, 我们看到, 在 $\mathbf{s}$ 中 $x_n\to x_0$(因为在 $\mathbf{s}$ 中的收敛是按坐标收敛).

4.3. 如同有理数集包含于实数集中一样, 任意的度量空间也可以包含于一个完备的度量空间之中.

包含给定空间 $\mathbf{X}$ 的最小的完备度量空间叫做空间 $\mathbf{X}$ 的完备化空间. (术语“最小的”理解为这种意思, 即完备化空间包含于所有的其他包含 $\mathbf{X}$ 的完备空间中. 同时, 如在 3.1 中所指出的, 等距的空间是等同的.)

定理 1. 每个度量空间都有完备化空间.

证*). 设 $\mathbf{X}$ 是某个度量空间. 我们称自收敛序列$\{x_n\}$和$\{x'_n\}$是等价的, 如果 $\rho(x_n, x'_n)\to 0$. 显然, 如果等价的序列中有一个是收敛的, 则另一个也收敛, 并且收敛于同一点. 事实上, 如果 $x_n\to x$, 则

$$\rho(x'_n, x)\leqslant\rho(x_n, x'_n)+\rho(x_n, x)\to 0,$$

从而 $x'_n\to x$.

把所有的自收敛序列组成的集合进行分类, 使一切彼此等价的序列属于同一类. 以Ξ表示所有的这些类组成的集合. 显然, 两个都与第三个序列等价的序列彼此也是等价的, 所以, 同一个序

*) 参见 Hausdorff. 这个证明实质上是重复 Cantor-Meray 引进实数的过程.

列不可能属于两个不同的类.

设ξ和η是Ξ中的某两个类. 在类ξ中任取一个序列$\{x_n\}$, 在η中任取一个序列$\{y_n\}$. 利用§3中的不等式(1)得

$$|\rho(x_m, y_m)-\rho(x_n, y_n)|\leqslant\rho(x_m, x_n)+\rho(y_m, y_n).$$

又因为序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都是自收敛的, 所以上式右端趋于零且数列$\{\rho(x_n, y_n)\}$收敛. 令

$$\rho(\xi, \eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n).$$

$\rho(\xi, \eta)$由类ξ与η唯一确定. 事实上, 如果序列$\{x'_n\}$等价于$\{x_n\}$, 而$\{y'_n\}$等价于$\{y_n\}$, 则对不等式

$$|\rho(x'_n, y'_n)-\rho(x_n, y_n)|\leqslant\rho(x_n, x'_n)+\rho(y_n, y'_n)$$

取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n, y'_n).$$

现在验证$\rho(\xi, \eta)$满足度量空间的公理1)—3).

在验证条件1)时需要证明, 从$\rho(\xi, \eta)=0$推出$\xi=\eta$. 保持前面的记号, 我们看到

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=0,$$

即序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$等价, 于是类ξ与η重合.

条件2)是显然的.

条件3)由不等式

$$\rho(x_n, y_n)\leqslant\rho(x_n, z_n)+\rho(y_n, z_n)$$

取极限得到. 其中$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$是分别属于类ξ, η, ζ的序列.

由此可见, 等价序列类的集合Ξ是度量空间.

我们指出, 原来的空间$\mathbf{X}$可以看作Ξ的子集.

对于任意的$x\in\mathbf{X}$以$\xi_x\in\Xi$表示含有序列$(x, x, \cdots, x, \cdots)$的序列类, 换句话说, 收敛于$x$的序列类. 显然, 等式$\xi_x=\xi_y$等价于$x=y$. 其次, $\rho(\xi_x, \xi_y)=\rho(x, y)$, 这只要取$(x, x, \cdots, x, \cdots)$与$(y, y,$

$\cdots, y, \cdots$)作为 ξ_x 与 ξ_y 的距离定义中的序列就很容易看出.

综上所述,把元素 $x\in\mathbf{X}$ 和类 $\xi_x\in\Xi$ 等同起来, 我们便把 $\mathbf{X}$ 等距地嵌入到度量空间 Ξ 中.

这样,以后可以把 $\mathbf{X}$ 看作空间 Ξ 的子集,而仍用原来的记号 x 表示元素 ξ_x. 我们还要指出下列事实. 设 $\{x_n\}$ 是确定类 ξ 的序列. 于是有 $\xi_{x_n}=x_n\to\xi$(在 Ξ 中). 事实上,当 $n, m\geqslant N_\varepsilon$ 时 $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$,但是这时当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时 $\rho(x_n, \xi)=\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_n, x_m)\leqslant\varepsilon$,因此显然就有 $x_n\to\xi$(在 Ξ 中).

由上面的证明可知, 对于任何 $\xi\in\Xi$ 可以找到 $x\in\mathbf{X}$, 使得 $\rho(x, \xi)<\varepsilon$(当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时可以取任何 x_n 作为 x).

现在证明空间 Ξ 的完备性. 设 $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(n)}, \cdots$ 是自收敛的序列类. 取数列 $\varepsilon_n\to 0$. 根据上述证明, 对于每个 n 可以找到 $x^{(n)}\in\mathbf{X}$, 使得 $\rho(x^{(n)}, \xi^{(n)})<\varepsilon_n$. 从不等式

$$\begin{aligned}\rho(x^{(n)}, x^{(m)})&\leqslant\rho(x^{(n)}, \xi^{(n)})+\rho(\xi^{(n)}, \xi^{(m)})+\rho(\xi^{(m)}, x^{(m)})\\&<\varepsilon_n+\varepsilon_m+\rho(\xi^{(n)}, \xi^{(m)})\end{aligned}$$

显然推出序列 $\{x^{(n)}\}$ 是自收敛的. 所以, 它确定了某个类 ξ, 使得 $\rho(x^{(n)}, \xi)\to 0$. 但是

$$\rho(\xi^{(n)}, \xi)\leqslant\rho(\xi^{(n)}, x^{(n)})+\rho(x^{(n)}, \xi)<\varepsilon_n+\rho(x^{(n)}, \xi).$$

由此在 Ξ 中 $\xi^{(n)}\to\xi$, 从而证明了空间 Ξ 的完备性.

如果 H 是另一个包含 $\mathbf{X}$ 的完备空间, 则把空间 H 内是 $\mathbf{X}$ 中自收敛点序列的极限的元素与等价序列类等同起来, 由于 H 的完备性便得到 $\Xi\subset H$.

空间 $\mathbf{X}$ 的完备化空间构造完毕.

4.4. 现在我们研究稠密性和可分性, 在 2.4 中对于任意的拓扑空间已引进了这两个概念.

设 $\mathbf{X}$ 是度量空间. 显然, 集合 $E\subset\mathbf{X}$ 在集合 $\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 中是稠密的, 如果对于每个 $x\in\mathbf{X}_0$ 及 $\varepsilon>0$ 存在点 $z\in E$, 满足 $\rho(x, z)<\varepsilon$, 或

者完全一样, 对于任何 $x\in\mathbf{X}_0$ 存在序列 $\{x_n\}\subset E$, 使得 $x_n\to x$.

不难看出, 每个空间 $\mathbf{X}$ 都是它的完备化空间的稠密集.

事实上, 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是属于类 $\xi\in\Xi$ 的序列, 则在证明定理 1 时已指出, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 由此得到我们的结论.

我们知道, 度量空间 $\mathbf{X}$ 是可分的, 如果在其中存在可数的稠密子集.

如果度量空间 $\mathbf{X}_0$ 包含于可分的度量空间 $\mathbf{X}$ 中, 则 $\mathbf{X}_0$ 也是可分的.

设 $\mathbf{X}_0$ 是空间 $\mathbf{X}$ 的子集, $D=\{x_k\}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的可数的稠密集. 取数列 $\varepsilon_n\to 0(\varepsilon_n>0)$, 对于每个 $k=1, 2, \cdots$ 可以找到 $\mathbf{X}_0$ 中的元素 z_{kn}, 使得

$$\rho(x_k, z_{kn})<\rho(x_k, \mathbf{X}_0)+\varepsilon_n.$$

设 $x\in\mathbf{X}_0$ 及 $\varepsilon>0$; 可以找到元素 $x_k\in D$, 使得 $\rho(x, x_k)<\varepsilon$; 取 n 充分大, 使得 $\varepsilon_n<\varepsilon$, 于是有

$$\rho(x, z_{kn})\leqslant\rho(x, x_k)+\rho(x_k, z_{kn})<\varepsilon+\rho(x_k, \mathbf{X}_0)+\varepsilon_n$$
$$\leqslant\varepsilon+\rho(x_k, x)+\varepsilon_n<3\varepsilon,$$

由此推出集合 $D_0=\{z_{kn}\}$ 在 $\mathbf{X}_0$ 中稠密.

4.5. 空间 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}[a, b]$, $\mathbf{C}^{(l)}$, $\mathbf{s}$ 都是可分的*). 对于 $\mathbf{R}^n$ 这个结论是显然的. 例如, 可以取坐标为有理数的点的全体作为其可数的稠密集.

至于 $\mathbf{C}[a, b]$, 则可以取全体有理系数的代数多项式作为其可数的稠密集. 事实上, 根据熟知的 Weierstrass 定理(见IV. 4. 1), 每个连续函数都能够用多项式一致逼近(即按 $\mathbf{C}[a, b]$ 中的距离) 到任意预先给定的精度. 其次, 该多项式显然可以用有理系数的多项式一致逼近到任意的精度. 由此可见, 对于每个连续函数 $x(t)$,

---

*) 我们仅对实空间情形进行证明, 复空间情形容易归结为实空间情形.

可以找到有理系数的多项式按 $C[a,b]$ 中的度量任意逼近 $x(t)$.

在空间 $C[a,b]$ 中也可以取所有其图形是以有理点为顶点的折线的分段线性函数的总体作为可数的稠密集.

空间 $C^{(l)}[a,b]$ 的可分性留给读者证明.

在空间 $\mathbf{s}$ 中可以取集合 $\mathbf{r}_0$ 作为可数的稠密集, $\mathbf{r}_0$ 中的元素是所有只有有限项不为零的有理数列. 事实上, 在确定元素 $x\in\mathbf{s}$ 的序列 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\ \xi_{n-1},\xi_n,\cdots)$ 中, 从第 $n+1$ 项开始都代之以零, 我们得到序列 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1},\ \xi_n,0,\ \cdots)=[x]_n$ 作为空间 $\mathbf{s}$ 的元素, 它与前者的距离小于 $1/2^n$.

因为在 $\mathbf{s}$ 中的收敛是按坐标收敛, 所以上面得到的序列(也是 $\mathbf{s}$ 中的元素)显然可以用 $\mathbf{r}_0$ 中的元素这种序列任意逼近.

4.6. 不是所有的度量空间都是可分的. 为了构造不可分空间的例子, 我们研究任意的无限集 T 及所有给定在 T 上的有界实函数组成的集合 $\mathbf{l}^\infty(T)$. 如果对于 $x,y\in\mathbf{l}^\infty(T)$ 令

$$\rho(x,y)=\sup_{t\in T}|x(t)-y(t)|,$$

则 $\mathbf{l}^\infty(T)$ 成为完备的度量空间, 其中的收敛表示对应的函数列一致收敛.

这些结论就象对于空间 $C(K)$ 一样来验证. 我们现在证明空间 $\mathbf{l}^\infty(T)$ 是不可分的.

研究所有的特征函数组成的集合 $M_0\subset\mathbf{l}^\infty(T)$, 即它们是仅取两个值 (0 与 1)的函数. 这个集合是不可数的*). 设 D 是 $\mathbf{l}^\infty(T)$ 中的稠密集. 对于每个 $x\in M_0$, 存在一个 $z\in D$ 与之对应, 使得

$$\rho(x,z)<\frac{1}{2}.$$

同时 M_0 中不同的元素 x 和 x' 对应于 D 中不同的元素 z 和 z', 因

---

*) Натансон-II, 第一章, §4, 定理 8.

为如果有

$$\rho(x,z)<\frac{1}{2} \quad 与 \quad \rho(x',z)<\frac{1}{2},$$

则有

$$\rho(x,x')\leqslant\rho(x,z)+\rho(x',z)<1,$$

可是应有

$$\rho(x,x')=1.$$

由此可见，不可数集合 M_0 与集合 D 的一部分一一对应，所以 D 是不可数的.

4.7. 容易看出，度量空间 $\mathbf{X}$ 的子集 E 是无处稠密的，如果它在每个球中都不稠密，即如果对于任何球 $K_\varepsilon(x)$ 可以找到另一个球 $K_{\varepsilon_1}(x_1)\subset K_\varepsilon(x)$，使得 $K_{\varepsilon_1}(x_1)$ 中没有集 E 的点(见 2.4).

在二维欧氏空间中(平面上)位于直线上的任何点集都可以作为无处稠密集的例子. 两个坐标都是有理数的点集是第一纲集的例子，它是可数个单点集的并. 虽然这个集合是第一纲的，但是它在 $\mathbf{R}^2$ 中稠密.

下面的定理回答了第二纲集是否存在的问题.

定理 2. 完备度量空间 $\mathbf{X}$ 是(自身中的)第二纲集.

证. 假设不然，即 $\mathbf{X}$ 是第一纲集，则 $\mathbf{X}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，其中 E_k 是无处稠密的. 因为 E_1 无处稠密，可以找到球 $K_{\varepsilon_1}(x_1)$，其中不包含集 E_1 的点. 由于 E_2 无处稠密，在球 $K_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ 内可以找到球 $K_{\varepsilon_2}(x_2)$，其中没有 E_2 的点. 同时可以认为，$\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_1/2$.

继续这样做下去，构造了一个球序列 $\{K_{\varepsilon_n}(x_n)\}$，使得

$$K_{\varepsilon_n}(x_n)\subset K_{\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}), \quad K_{\varepsilon_n}(x_n)\cap E_n=\varnothing,$$

$$\varepsilon_n\leqslant\frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \quad (n=2,3,\cdots).$$

由于球 $K_{\varepsilon_n/2}(x_n)$包含了其后所有的球，故

$$\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon_n/2. \tag{3}$$

因为，显然 $\varepsilon_n \to 0$，所以序列$\{x_n\}$自收敛，从而由于空间 $\mathbf{X}$ 的完备性存在$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$。

对(3)式取极限(令 $p\to\infty$)，得

$$\rho(x, x_n) \leqslant \varepsilon_n/2 < \varepsilon_n,$$

因而 $x \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$，所以对于任何 $n=1, 2, \cdots$，$x \notin E_n$。另一方面，$x \in \mathbf{X} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$，于是，$x$ 应该至少属于一个 E_n。这就引出了矛盾。

注．证明稍加改动就可以得到更强的结果：在完备的空间中每个非空开集都是第二纲集。

推论．在完备的空间中，第一纲集的余集总是第二纲的。

这类集合叫做剩余集．我们指出下列事实：可数个剩余集的交是剩余集．事实上，如果 A_k 都是剩余集，则 $A_k = \mathbf{X} \backslash E_k$，其中 E_k 是第一纲集．因为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbf{X} \Big\backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$，且显然 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 是第一纲的，所以 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 是剩余集。

同样明显，在完备的度量空间中开的稠密集是剩余集，因为它的余集显然是无处稠密的。

作为练习留给读者验证，其 k 进小数展开式中从某处开始以后全为零的实数组成的集合是实数空间中的第一纲集，由此推得，存在这样的数，在其 k 进小数展开式中(对于所有的 k)非零数字有无限个(这种数组成的集合是剩余集)。

§ 5．度量空间中的紧性

5.1． 在 2.7 中我们引进了紧和列紧的概念，并且指出这两个

概念一般来说是有区别的．然而把这些概念重合的空间类区分出来是重要的．现在我们来证明在度量空间中这两个概念是一致的．但是，可度量的条件对此并不是必要的（参见第八章）．

引理 1. 度量空间 $\mathbf{X}$ 的点 x 是序列 $\{x_n\}$ 的极限点的充要条件是存在收敛于 x 的子序列 $\{x_{n_k}\}$．

证. 设 x 是序列 $\{x_n\}$ 的极限点．以 U_n 表示球 $K_{1/n}(x)$．取任意的点 $x_{n_1}\in U_1$．设已取出了 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$，其中 $n_1<n_2<\cdots<n_k$ 且 $x_{n_i}\in U_i(i=1, 2, \cdots, k)$．因为 x 是极限点，所以可以找到 $m>n_k$，使得 $x_m\in U_{k+1}$．令 $n_{k+1}=m$．于是作出了子序列 $x_{n_k}\to x$．逆命题由引理 2.1 推出．

空间的紧性的要求是极强的，从而由它区分出比较狭窄的一类空间，特别它比完备的与可分的空间更狭窄．

定理 1. 紧的度量空间是完备的．

证. 设 $\{x_n\}$ 是紧的度量空间 $\mathbf{X}$ 中的 Cauchy 序列．根据引理 2.2 序列 $\{x_n\}$ 有极限点 x．由引理 1 可以找到子序列 $x_{n_k}\to x$．于是根据引理 4.1 有 $x_n\to x$．

我们引进下列重要的定义．

设 $\varepsilon>0$ 是给定的正数，而 M 是度量空间 $\mathbf{X}$ 的子集．集合 M 叫做集合 $E\subset\mathbf{X}$ 的 ε-网，如果对于每个点 $x\in E$ 可以在 M 中找到点 z，使得 $\rho(x, z)<\varepsilon$．

定理 2. 设 $\mathbf{X}$ 是度量空间．下列命题等价：

1) $\mathbf{X}$ 是紧的；

2) $\mathbf{X}$ 是列紧的；

3) $\mathbf{X}$ 是可数紧的；

4) $\mathbf{X}$ 是完备的，并且对于每个 $\varepsilon>0$，在 $\mathbf{X}$ 中存在（对于 $\mathbf{X}$ 的）有限的 ε-网．

证. 2)$\Longrightarrow$3) 在任何拓扑空间中都正确；由引理 1，3)$\Longrightarrow$

2)；1)$\Longrightarrow$3)在任何拓扑空间中都成立(见§2引理2)．现在证明，2)$\Longrightarrow$4)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$1)．

2)$\Longrightarrow$4)．X的完备性的证明类似于定理1．设条件4)不成立，即设对于某个$\varepsilon>0$不存在有限的ε-网．取任意的点$x_1\in\mathbf{X}$．由一个元素x_1组成的集合不构成X的ε-网，因而可以找到$x_2\in\mathbf{X}$，使得$\rho(x_2,x_1)\geqslant\varepsilon$．集合$\{x_1,x_2\}$同样不能是X的$\varepsilon$-网，所以，可以找到$x_3\in\mathbf{X}$，并且$\rho(x_i,x_3)\geqslant\varepsilon(i=1,2)$．这样继续讨论下去，我们得到X中的点列$\{x_n\}$，使得$\rho(x_m,x_n)\geqslant\varepsilon(m\neq n, m,n=1,2,\cdots)$．显然，从这个序列中不可能找出任何收敛的子序列，这与X是列紧的相矛盾．

4)$\Longrightarrow$2)．设条件4)成立．取集合X中元素的任意序列$\{x_n\}$，我们来证明从其中可以取出收敛的子序列．为此给出数列$\varepsilon_n\to0(\varepsilon_n>0)$并研究根据条件存在的$\varepsilon_1$-网．如果以$\varepsilon_1$-网的点为中心$\varepsilon_1$为半径作球，则集合X中的每个点都至少落在一个球中．因为球是有限个，所以其中之一包含有序列$\{x_n\}$的无限项．以$K_{\varepsilon_1}(z_1)$表示这个球．再取ε_2-网并且研究以ε_2-网的点为中心ε_2为半径的球．和上面的讨论一样，其中之一包含序列$\{x_n\}$落在$K_{\varepsilon_1}(z_1)$中的无限多个元素．设这个球是$K_{\varepsilon_2}(z_2)$．这样继续做下去，我们得到球序列$K_{\varepsilon_1}(z_1), K_{\varepsilon_2}(z_2),\cdots,K_{\varepsilon_n}(z_n),\cdots$使得其中任何有限个球的交集中包含给定序列的无限多个点．因此我们可以取

$$x_{n_1}\in K_{\varepsilon_1}(z_1),\quad x_{n_2}\in K_{\varepsilon_2}(z_2)\cap K_{\varepsilon_1}(z_1)\quad(n_2>n_1),$$

一般地取

$$x_{n_k}\in\bigcap_{i=1}^{k}K_{\varepsilon_i}(z_i)\quad(n_k>n_{k-1}>\cdots>n_1).$$

因为两个元素x_{n_k}和x_{n_l}都属于球$K_{\varepsilon_k}(z_k)(k\leqslant l)$，所以

$$\rho(x_{n_k},x_{n_l})\leqslant\rho(x_{n_k},z_k)+\rho(x_{n_l},z_k)<2\varepsilon_k,$$

这说明序列$\{x_{n_k}\}$自收敛，由于空间X是完备的，它收敛于某个元素 $x_0\in\mathbf{X}$. 由此可见，X的列紧性证毕.

这样，我们证明了 2)$\Longleftrightarrow$4). 现在由 2)及 4)推出 1)，从而结束定理 2 的证明.

首先指出，具有性质 4)的空间是可分的. 事实上，如果 $\varepsilon_k\to 0$, $M_k(k\in N)$是有限的 ε_k-网，则 $M=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k$ 显然就是该空间中可数的稠密集*).

引理 2. 设X是任意的可分的度量空间. 取覆盖空间X的开集系$\{G_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$. 则从系$\{G_\xi\}$中可以选出空间X的可数覆盖.

证. 以D表示X中可数的稠密集并研究以D内的点为中心有理数为半径的所有可能的球. 显然，这些球的集合是可数的. 将这些球编号：$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$. 对于每个 $x\in\mathbf{X}$ 及适合 $x\in G_\xi$ 的 $\xi\in\Xi$，显然可以找到球 $S_{n(x,\xi)}$ 使得

$$x\in S_{n(x,\xi)}\subset G_\xi. \tag{1}$$

当 x 取遍整个 X，而 ξ 取遍整个Ξ时，指标 $n(x,\xi)$ 取遍某个可数的集合 $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$. 同时球 $S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}, \cdots$覆盖空间 X. 对于每个 $k=1,2,\cdots$取 $\xi_k\in\Xi$使得对于某个 $x_k\in\mathbf{X}$ 有 $n(x_k, \xi_k)=n_k$. 由(1)式得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}G_{\xi_k}\supset\bigcup_{k=1}^{\infty}S_{n(x_k,\xi_k)}=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_{n_k}=\mathbf{X}.$$

现在我们来完成定理 2 的证明. 再设X是列紧的. 研究覆盖空间X的开集系$\{G_\xi\}$. 因为已证X是可分的，所以根据引理 2 可

---

*) 联系所进行的讨论，希望大家注意紧空间与可分空间概念的区别. 在可分空间的情况下，保证存在可数的集合，其元素可以无限地接近空间的任何元素. 在紧空间的条件下我们也有这种可能，只要做 ε_k-网的并集M就行了. 但是，这里利用 ε-网(元素是有限的)，我们可以同时逼近空间的每个元素，而在可分空间中，一般说来，这是不成立的.

以认为覆盖$\{G_\xi\}$是可数的，即ξ取遍自然数集合．假设对于任何$n\in N$，集合

$$F_n=\mathbf{X}\setminus\bigcup_{\xi=1}^{n}G_\xi$$

都是非空的．在集合F_n中取点x_n．从序列$\{x_n\}$中可以找出收敛的子序列$\{x_{n_k}\}$．例如设$x_{n_k}\to x$．因为对于$n_k\geqslant n$有$x_{n_k}\in F_n$，而集合F_n是闭的，所以$x\in F_n(n\in N)$．换句话说

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\mathbf{X}\setminus\bigcup_{\xi=1}^{\infty}G_\xi,$$

但是，这是不可能的，因为$\bigcup\limits_{\xi=1}^{\infty}G_\xi=\mathbf{X}$.

由此可见，对于某个n有$\mathbf{X}=\bigcup\limits_{\xi=1}^{n}G_\xi$，所以空间$\mathbf{X}$是紧的．定理 2 完全证毕．

从证明的过程我们得到

推论 1． 紧的度量空间是可分的．

推论 2． 设E是度量空间$\mathbf{X}$的子集．下列命题等价：

1) E 是相对紧的；

2) E 是相对列紧的；

3) E 是相对可数紧的．

证． 1)$\Longrightarrow$2)根据定理 2；2)$\Longrightarrow$3)显然．我们证明 3)$\Longrightarrow$1)．为此根据定理 2 只要证明闭包$\bar{E}$是可数紧的．设$\{x_n\}$是$\bar{E}$中的序列．对于每个n取$y_n\in E$，使得$\rho(x_n,y_n)<1/n$．因为E是相对可数紧的，所以序列$\{y_n\}$有极限点$x\in\bar{E}$．显然，x也是$\{x_n\}$的极限点．

引理 3． 设E是度量空间$\mathbf{X}$的子集．如果在$\mathbf{X}$中存在E的有限ε-网，则在E中存在有限(2ε)-网．

证. 设$M\subset \mathbf{X}$是E的有限ε-网. 对于每个$x\in M$指定$y_x\in E$使得$\rho(x, y_x)<\varepsilon$（如果它可以找到）. 则集合$M_1=\{y_x: x\in M\}\subset E$是有限$(2\varepsilon)$-网.

从定理2及引理3我们得到重要的Hausdorff紧性判别准则.

定理3 (Hausdorff). 度量空间$\mathbf{X}$的子集E为相对紧的必要条件是对于每个$\varepsilon>0$,在$\mathbf{X}$中存在E的有限ε-网，而如果$\mathbf{X}$是完备空间,则条件也是充分的.

注. 对于任何$\varepsilon>0$,存在相对紧的ε-网也是集合相对紧的充分条件(在空间$\mathbf{X}$完备的情形下).

事实上,对于这个相对紧的ε-网将存在有限的ε-网，它显然也是原来集合的(2ε)-网,从而证明了其相对紧性.

5.2. 现在转到研究具体空间中紧性的条件. 经典的Bolzano-Weierstrass定理断定，n维空间$\mathbf{R}^n$(或$\mathbf{C}^n$)中的子集是紧集的充要条件为它是有界闭集.

现在来指出空间$\mathbf{s}$中集合的紧性的条件. 不难看出，集$E\subset \mathbf{s}$在$\mathbf{s}$中是相对紧的,当且仅当,对于任何$k\in N$,集E的点的第k个坐标的数集是有界的,即

$$|\xi_k|\leqslant l_k \quad \text{对于 } x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)\in E.$$

换句话说,集E位于空间$\mathbf{s}$的某个无限维平行体之中.

这个条件的必要性是显然的,因为如果我们取一个元素序列,比如它的第一个坐标是无限增大的，则显然从其中就不能取出收敛的子序列(按坐标收敛).

为了证明充分性，我们构造E的ε-网. 取k充分大，使得$1/2^k<\varepsilon$,并且研究形如$[x]_k=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, 0, \cdots)$的点的集合$H$,其中$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \xi_{k+1}, \cdots)\in E$. 集合$H$相对紧(类似于$k$维空间中的有界集). 同时$H$是$E$的$\varepsilon$-网. 因为,显然

$$\rho(x, [x]_k)=\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|}$$

$$\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^k}<\varepsilon.$$

这里$[x]_k$与前面一样表示序列$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, 0, \cdots)$.

正如前面已指出的，存在相对紧ε-网是E相对紧的充分条件.

注. 从空间 **s** 中平行体的紧性可以推出下述事实. 如果有以同一个数为界的序列总体，则从其中总可以取出按坐标收敛的序列，即这样的序列$\{x_n\}$, $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$，使得同时存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k^{(0)} \qquad (k\in \mathbf{N}).$$

这个事实以后我们将不止一次地用到它.

现在给出空间$\mathbf{C}(K)$中集合紧性的条件，其中K是具有度量r的紧度量空间.

定理 4 (Arzela-Ascoli). 使连续函数的集合E在 $\mathbf{C}(K)$ 中相对紧的充要条件为:

1) 集E的函数总体有界，即存在常数M，使得

$$|x(t)|\leqslant M \qquad (x\in E, t\in K);$$

2) 集E的函数等度连续，即对于任何 $\varepsilon>0$ 可以找到 $\delta>0$，使得当$r(t, t')<\delta$时，对于所有的$x\in E$，都有$|x(t)-x(t')|<\varepsilon$.

证. 必要性. 设E是$\mathbf{C}(K)$中的相对紧集. 根据定理 2，对于集E存在有限的ε-网. 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是构成这个网的连续函数. 因为函数x_k中的每一个都是有界的，而对于任意的元素$x\in E$可以找到x_k，使得 $\rho(x, x_k)<\varepsilon$，所以

$$|x(t)|\leqslant|x_k(t)|+|x(t)-x_k(t)|$$
$$\leqslant\max_{t\in K}|x_k(t)|+\rho(x, x_k)<\max_{t\in K}|x_k(t)|+\varepsilon,$$

从而如果取函数$|x_k(t)|(k=1, \cdots, n;\ t\in K)$的公共上界加上$\varepsilon$作

为常数M,则条件 1)成立.

其次，对于每一个函数 x_k 可以找到 δ_k，使得当 $r(t',t)<\delta_k$ 时

$$|x_k(t')-x_k(t)|<\varepsilon.$$

记 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$．从集合$E$中取任意的函数 x．设 x_k 是使得 $\rho(x,x_k)<\varepsilon$ 的元素．于是

$$\begin{aligned}
&|x(t')-x(t)|\\
&\quad\leqslant|x(t')-x_k(t')|+|x_k(t')-x_k(t)|+|x_k(t)-x(t)|\\
&\quad\leqslant\rho(x,x_k)+|x_k(t')-x_k(t)|+\rho(x,x_k)\\
&\quad<2\varepsilon+|x_k(t')-x_k(t)|.
\end{aligned}$$

如果 $r(t,t')<\delta$,那么这里的第二项小于 ε,从而在此情形下

$$|x(t')-x(t)|<3\varepsilon.$$

由此可见,集E的函数是等度连续的.

充分性．因为$C(K)$是所有在K上的有界函数所成空间$l^\infty(K)$中的闭子空间,所以只要证明,E在$l^\infty(K)$中是相对紧的.因为空间$l^\infty(K)$完备,所以根据定理3的注只要证明，对于任何$\varepsilon>0$集E有相对紧的ε-网．由E等度连续的条件按$\varepsilon>0$取$\delta>0$．因为K是紧度量空间，所以根据 Hausdorff 定理存在K的有限$\delta/3$-网$\{t_k\}_{k=1}^n$．令

$$C_1=K_{\delta/3}(t_1),\ C_2=K_{\delta/3}(t_2)\backslash C_1,\cdots,C_n=K_{\delta/3}(t_n)\Big\backslash\bigcup_{k=1}^{n-1}C_k.$$

因为$K=\bigcup\limits_{k=1}^{n}K_{\delta/3}(t_k)$,所以$K=\bigcup\limits_{k=1}^{n}C_k$,并且当$k\neq m$时$C_k\cap C_m=\varnothing$,以及对于任何$k$,如果$t,t'\in C_k$,则$r(t,t')<2\delta/3$．于是,根据$\delta$的选取，如果$t$，$t'\in C_k$，则对于所有的$x\in E$都有$|x(t)-x(t')|<\varepsilon$．设$x_k$是集合$C_k$的特征函数，即如果$t\in C_k$，则$x_k(t)$

$=1$，而如果$t\notin C_k$，则$x_k(t)=0$．研究由形如$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k(t)$的函数组成的集合$H$，其中数$\lambda_k$满足条件$|\lambda_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots,n)$．因为$H$中函数列的收敛就是对应的数$\lambda_k$的序列收敛，所以集$H$在$\mathbf{l}^\infty(K)$中是紧的．

如果我们证明了H是E的(2ε)-网，那么，我们的证明便告结束．设$x\in E$．在每个集合C_k中指定任意的点t_k．（如果$C_k=\varnothing$，则我们不取它．）因为根据条件1）$|x(t_k)|\leqslant M$，所以函数$y(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k)x_k(t)$属于$H$．取任意的点$t\in K$．因为$K=\bigcup_{k=1}^{n}C_k$，所以$t$属于某个集合$C_m$．于是，由$C_m$的构造有$r(t,t_m)<2\delta/3<\delta$，再根据条件2）有

$$|x(t)-y(t)|=|x(t)-x(t_m)|<\varepsilon.$$

由于t的任意性，我们得到

$$\rho(x,y)=\sup_{t\in K}|x(t)-y(t)|\leqslant\varepsilon<2\varepsilon,$$

从而说明H是E的(2ε)-网．

下面用几个例子来说明这个定理．

研究在区间$[0,2\pi]$上定义的函数集$E=\{\sin nt\}(n=1,2,\cdots)$．有界性条件对于$E$成立．但是，因为$\sin n\frac{\pi}{2n}=1$，所以第二个条件（等度连续性）不成立．集$E$在$\mathbf{C}[0,2\pi]$中不是紧的．

现在研究函数集E，它满足Hölder条件

$$|x(t')-x(t)|\leqslant M|t'-t|^\alpha\quad(x\in E,\ t'\in[a,b],\ 0<\alpha\leqslant1)^{*)}.$$

---

*）当$\alpha=1$时得Lipschitz条件

$$|x(t')-x(t)|\leqslant M|t'-t|.$$

满足Hölder条件的函数常常叫做满足具有指数α的Lipschitz条件．这种函数全体构成的类记为Lip α．

如果集E的函数总体有界，则E是紧的. 事实上，$\delta=\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}$ 保证了集E的函数的等度连续性，因而 Arzela-Ascoli 定理的两个条件成立.

更一般地，设E是连续函数的有界集合，并设存在函数 $\omega(\delta)$，使得当 $\delta\to 0$ 时 $\omega(\delta)\to 0$，并且任何函数 $x\in E$ 的连续模 $\omega(x;\delta)$*) 满足不等式 $\omega(x;\delta)\leqslant\omega(\delta)$；于是$E$在空间 $\mathbf{C}[a,b]$中是紧的.

我们留给读者建立空间 $\mathbf{C}^{(l)}[a,b]$中集合紧性的判别准则.

§6. 测 度 空 间

6.1. Riemann 的经典定义只使比区间上的连续函数稍微广一些的函数类能够定义积分. 分析(首先是三角级数论)的要求导致法国数学家 H. Lebesgue 在 1902 年引进测度概念和区间上函数的积分概念，它比 Riemann 积分更一般. 由 E. Radon, M. Fréchet, K. Carathéodory 所作的进一步推广建立了任意集合上的测度论并按这个测度构造了积分. 抽象的测度空间在分析、方程论及概率论中显得特别富有成效. 在概率论中，它促使 A. H. Колмогоров 发展了现代的公理系统(1932 年).

在本节中我们不加证明地引进测度与积分的理论的基本事实. 要求读者不过是掌握区间上的 Lebesgue 积分 (参见 Натансон-II). 对于在第二部分叙述的泛函分析的基本应用有兴趣的读者，可以把抽象的测度空间看成 $\mathbf{R}^n$ 中的区域或者具有 Lebesgue 测度的直线上的区间. 本节所引进的材料，其详细叙述可以在下列书中找到：Акилов, Макаров 和 Хавин; Bourbaki-IV; Вулих

---

*) 函数 $x\in\mathbf{C}[a,b]$的连续模就是

$$\omega(x;\delta)=\max_{\substack{a\leqslant t,t'\leqslant b\\ |t'-t|\leqslant\delta}}|x(t')-x(t)| \qquad (0<\delta\leqslant b-a).$$

-III; Dunford 和 Schwartz-I; Zaanen-II; Колмогоров 和 Фомин; Halmos; Шилов 和 Гуревич. 我们的叙述更接近 Вулих-III 的著作。

6.2. 设T是任意的集合. 它的某些子集的非空系Σ叫做代数，如果满足下列两个条件:

1) 如果 $A, B\in\Sigma$，则 $A\cup B\in\Sigma$；

2) 如果 $A\in\Sigma$，则它的余集 $T\setminus A\in\Sigma$.

由定义容易推出，代数如果包含任何两个集A与B必包含它们的交 $A\cap B$ 与差 $A\setminus B$. 由归纳法得知，代数关于有限个集合的并与交的运算是封闭的. 还要指出，总有 $\varnothing\in\Sigma$ 及 $T\in\Sigma$.

集合T的非空子集系Σ叫做σ-代数，如果Σ是代数，它不仅关于有限并运算是封闭的，而且关于可数并的运算也是封闭的，即如果

3) 由 $A_n\in\Sigma\,(n\in N)$ 推出 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_n\in\Sigma$.

显然，σ-代数关于集合的可数交运算也是封闭的.

设$\overline{\boldsymbol{R}}=(-\infty,+\infty]$，$\Sigma$ 是集合 T 的子集的某个代数. 函数 $\varphi:\Sigma\to\overline{\boldsymbol{R}}$叫做可加的集合函数，如果对于两两离析的集合 $A_n\in\Sigma$ 的任何有限系都成立等式

$$\varphi\left(\bigcup_n A_n\right)=\sum_n\varphi(A_n).\tag{1}$$

此外，总是假设 $\varphi(\varnothing)=0$. 如果对于任何 $A\in\Sigma$ 有 $\varphi(A)\geqslant0$，我们就说φ 是非负的，并记为 $\varphi\geqslant\mathbf{0}$.

给定在 σ-代数 Σ 上的可加集合函数 $\varphi:\Sigma\to\overline{\boldsymbol{R}}$叫做可数可加的，如果等式(1)对于两两不相交的集合 $A_n\in\Sigma$ 的任何可数系也成立.

在 σ-代数Σ上给定的非负的可数可加集合函数 μ 叫做Σ上

的测度.

测度 μ 叫做有限的，如果 $\mu(T)<\infty$；叫做 σ-有限的，如果集合 T 可以表示为可数个集 $A_n\in\Sigma$ 的并，并且 $\mu(A_n)<\infty$. 测度 μ 叫做完全的，如果从 $A\subset B\in\Sigma$, $\mu(B)=0$ 推出 $A\in\Sigma$（当然，$\mu(A)=0$）. 可以把任意的测度 μ《完全化》. 就是，以 Σ^* 表示形如 $A\cup N$ 的集合总体，其中 $A\in\Sigma$，而$N\subset B\in\Sigma$, $\mu(B)=0$. 于是 Σ^* 是 σ-代数，并且，如果把 μ 的定义域扩张到Σ^*上，令 $\mu(A\cup N)=\mu(A)$，则延拓的函数是 Σ^* 上的测度.

上述情况表明，通常可以认为测度 μ 是完全的.

我们说(T, Σ, μ)是测度空间*)，如果 T 是集合，Σ 是其子集的某个 σ-代数，μ 是 Σ 上的完全测度，并且满足下列条件:

1) 如果集合 $A\subset T$ 使得对于任何集合 $B\in\Sigma$, $\mu(B)<\infty$, $A\cap B\in\Sigma$ 成立，则 $A\in\Sigma$.

2) 测度 μ 是局部有限的，即对于任何 $A\in\Sigma$ 且 $\mu(A)>0$，存在 $B\in\Sigma$，使得 $B\subset A$ 且 $0<\mu(B)<\infty$.

所加的条件并不是很苛刻的. 事实上，扩张 σ-代数 Σ，把满足 1)的集合 A 都包含进去，就得到条件 1)的满足. 如果对于集合 A 有 $\mu(A)=+\infty$使条件 2)不成立，则重新定义集合 A 的测度，令 $\mu(A)=0$.

我们指出，对于 σ-有限的测度，条件 1)、2) 自动成立. 以$\Sigma(\mu)$表示 Σ 中具有有限测度的所有集合的总体. 从 1)和 2)我们得到(T, Σ, μ)的下列性质:

如果集合 $A\subset T$ 使得对于任何 $B\in\Sigma(\mu)$都有 $A\cap B\in\Sigma$ 及 $\mu(A\cap B)=0$，则 $A\in\Sigma$ 且 $\mu(A)=0$.

6.3. 设 Σ 是集合 T 的子集的代数，$\varphi: \Sigma\to\boldsymbol{R}$是可加的集合函

*）通常在测度空间的定义中对 Σ和 μ 不加任何限制，但是这常常会引起不正常现象（特别在非 σ-有限测度的情况）.

数．根据函数φ利用公式

$$\varphi_+(A)=\sup_{B\subset A,B\in\Sigma}\varphi(B),\quad \varphi_-(A)=\sup_{B\subset A,B\in\Sigma}\{-\varphi(B)\},$$

$$|\varphi|(A)=\varphi_+(A)+\varphi_-(A)\quad (A\in\Sigma),$$

构造的函数分别叫做函数φ的正变差、负变差和全变差．所有这三个函数φ_+、φ_-、$|\varphi|$都是非负的可加集合函数．函数φ的全变差也可以用公式

$$|\varphi|(A)=\sup\sum_{i=1}^{n}|\varphi(A_i)|$$

来定义，其中上确界是针对集合A分为有限个两两不相交的集合$A_i\in\Sigma$的所有可能的分划来取的．如果对于$A\in\Sigma$，$\varphi(A)$是有限的，则

$$|\varphi|(A)=\sup_{\substack{B_1,B_2\subset A\\ B_1,B_2\in\Sigma}}\{\varphi(B_1)-\varphi(B_2)\}.$$

定理 1. 对于给定在代数Σ上的任何有限的可加集合函数φ，Jordan 分解

$$\varphi=\varphi_+-\varphi_-$$

成立．

我们指出，如果Σ是σ-代数且函数φ是可数可加的，则它的变差φ_+、φ_-和$|\varphi|$也是可数可加的．对于可数可加的函数有更强的事实成立．

定理 2(Hahn 分解)．设φ是σ-代数Σ上的可数可加集合函数．于是可以找到$A_0\in\Sigma$，使得当$A\in\Sigma$，$A\subset A_0$时，$\varphi(A)\geqslant 0$；而当$A\in\Sigma$，$A\subset T\setminus A_0$时，$\varphi(A)\leqslant 0$．

我们注意，在定理 2 的条件下，对于任何$A\in\Sigma$有$\varphi_+(A)=\varphi(A\cap A_0)$，$\varphi_-(A)=-\varphi(A\cap(T\setminus A_0))$．

6.4. 设T是集合，Σ是其子集的某个σ-代数．Σ中的集合我们将称为可测的．给定在T上的实函数$x(t)$叫做关于σ-代数

Σ 是可测的，如果对于任何数 $a\in\boldsymbol{R}$，它的 Lebesgue 集合

$$\begin{aligned}&\{t\in T: x(t)>a\}, \quad \{t\in T: x(t)<a\},\\&\{t\in T: x(t)\geqslant a\}, \quad \{t\in T: x(t)\leqslant a\}\end{aligned} \tag{2}$$

都是可测的.

形如

$$y(t)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\chi_{A_i}(t)$$

的函数叫做关于 Σ 可测的有限个值的函数，其中 $\lambda_i\in\boldsymbol{R}$, $A_i\in\Sigma(i=1,2,\cdots,k)$，并且集合 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 两两不相交.

我们说在 T 上的函数列 $\{x_n(t)\}$ 递增($x_n\uparrow$)，如果当 $m\geqslant n$ 时 $x_n(t)\leqslant x_m(t)(t\in T)$. 如果序列 $\{x_n\}$ 递增并且对于任何 $t\in T$ 有 $x_n(t)\to x(t)$，我们就记作 $x_n\uparrow x$.

定理 3. 对于任何关于 σ-代数 Σ 的有界可测函数 x，存在可测的有限个值的函数序列 $\{x_n\}$，在 T 上一致收敛于 x. 如果 $x(t)\geqslant 0(t\in T)$，则还可以认为 $x_n\uparrow x$, $x_n(t)\geqslant 0(t\in T, n\in\boldsymbol{N})$.

证. 假设 $x(t)\geqslant 0(t\in T)$. 令 $M=\sup\limits_{t\in T}x(t)$. 对于 $n=2^k$ $(k\in\boldsymbol{N})$ 及 $i=0,1,\cdots,n-1$ 令

$$A_i^n=\{t\in T: iM/n<x(t)\leqslant(i+1)M/n\}.$$

显然，$A_i^n\in\Sigma$. 按公式

$$x_n(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{iM}{n}\chi_{A_i^n}(t)$$

定义有限个值的函数 x_n.

容易看出，$x_n\uparrow$. 事实上，如果 $m\geqslant n$ 及 $t\in T$，则或者 $x(t)=0$，于是 $x_n(t)=x_m(t)=0$，或者 t 属于某个集合 A_i^m，于是因为 m 和 n 都是 2 的幂，A_i^m 包含于某个 A_j^n 中，所以 $i\geqslant j$. 因而，$x_m(t)=iM/m\geqslant jM/n=x_n(t)$.

其次，如果 $t\in A_i^n$，则

$$|x(t)-x_n(t)|=|x(t)-iM/n|\leqslant M/n,$$

由此对于任何 $t\in T$ 有

$$|x(t)-x_n(t)|\leqslant M/n.$$

因此，序列$\{x_n\}$一致收敛于 x. 如果函数 x 是任意的，则令 $x_+(t)=\max(x(t),0)$和 $x_-(t)=\max(-x(t),0)$，便得 x_+ 和 x_- 是非负的有界可测函数，并且 $x=x_+-x_-$. 把所证明的结果用到 x_+和 x_-上就完成了定理的证明.

推论. 对于任何可测函数 x，存在可测的有限个值的函数的序列$\{x_n\}$，使得对于所有的 $t\in T$ 有 $x_n(t)\to x(t)$及$|x_n(t)|\leqslant|x(t)|$. 如果 $x(t)\geqslant 0(t\in T)$，则可以认为，$x_n\uparrow x$，$x_n(t)\geqslant 0(t\in T,n\in \boldsymbol{N})$.

证. 研究函数 $x(t)$的“截断”$[x]_n(n\in \boldsymbol{N})$，它按公式

$$[x]_n(t)=\begin{cases}x(t), & 如果 |x(t)|\leqslant n,\\ 0, & 如果 |x(t)|>n\end{cases}$$

来定义.

函数$[x]_n$ 可测且有界，因此，如果 $x(t)\geqslant 0(t\in T)$，则根据定理 3，对于每个 $n\in \boldsymbol{N}$ 可以找到可测的有限个值的函数 $y_n(t)$，使得对于所有的 $t\in T$ 有$|[x]_n(t)-y_n(t)|<1/n$ 及 $0\leqslant y_n(t)\leqslant[x]_n(t)$. 显然，函数列

$$x_n(t)=\max_{k=1}^{n} y_k(t)$$

就是所要求的. 在一般情况下，如同定理 3 的证明，把 x 表示为 $x=x_+-x_-$. 如果 $0\leqslant x_n'\uparrow x_+$及 $0\leqslant y_n'\uparrow x_-$，其中 x_n'、y_n' 是有限个值的函数，则序列 $x_n(t)=x_n'(t)-y_n'(t)$就是所要求的.

积分概念是可测函数理论中最重要的概念. 设给定集合 T 的子集的 σ-代数 Σ 及 Σ 上的有限的可数可加函数 φ. 于是从所有

的可测函数的总体中可以分出一类函数，叫做(关于函数 φ)可积的，它对应某个有限数，叫做(Radon)积分*)．函数 $x(t)$(关于集合 T)的积分表示为下列形式之一：

$$\int_T x(t)d\varphi(t), \qquad \int_T x(t)d\varphi, \qquad \int_T xd\varphi.$$

关于任意的集合 $A\in\Sigma$ 的积分可以用类似方式考虑．

我们指出积分的最重要的性质．

1) 线性**)：

$$\int_A(\lambda x+\mu y)d\varphi=\lambda\int_A xd\varphi+\mu\int_A yd\varphi \qquad (\lambda, \mu\in\boldsymbol{R})$$

2) $\int_A xd\varphi=\int_A xd\varphi_+-\int_A xd\varphi_-, \qquad \left|\int_A xd\varphi\right|\leqslant\int|x|d|\varphi|.$

3) 如果 φ 是测度且 $x(t)\geqslant 0\ (t\in A)$，则 $\int_A xd\varphi\geqslant 0$．如果 φ 是测度，$x(t)\geqslant 0$ 且 $\int_A xd\varphi=0$，则 $\varphi(\{t\in A:x(t)>0\})=0$.

4) 如果 x 是有界可测函数，则存在 $\int_A xd\varphi\ (A\in\Sigma)$.

5) 集合函数 $\nu(A)=\int_A xd\varphi(A\in\Sigma)$ 是可数可加的.

还有很多其他的重要性质，后面将介绍其中一部分．

当 φ 是测度的情形，我们扩充积分的概念，允许它取无限值．

设 (T, Σ, μ) 是具有有限测度的空间．如果可测函数 $x(t)\geqslant 0$ $(t\in A)$ 在集合 $A\in\Sigma$ 上不可积，则令 $\int_A x(t)d\mu=+\infty$.

对于任意的可测函数 $x(t)$，和上面一样，定义 $x_+(t)=\max(x(t),0)$，$x_-(t)=\max(-x(t),0)$，并且如果两个积分

---

*) 我们不引进积分的定义，可以去看本节开始时指出的文献．

**) 根据定义 $(\lambda x+\mu y)(t)=\lambda x(t)+\mu y(t)$.

$\int_A x_+ d\mu$, $\int_A x_- d\mu$ 中至少有一个是有限的，则令

$$\int_A x\, d\mu = \int_A x_+ d\mu - \int_A x_- d\mu. \tag{3}$$

如果上述两个积分都是无限的，则函数 $x(t)$没有积分.

设(T, Σ, μ)是具有无限测度的空间，$\Sigma(\mu)$是所有测度有限的集合的总体. 利用 6.2 的条件 1)，我们得到函数 $x(t)$可测的充要条件是对于任何 $A \in \Sigma(\mu)$函数 $x(t)\chi_A(t)$可测.

对于集合 A(无限测度)和可测函数 $x(t) \geqslant 0 (t \in A)$，令

$$\int_A x(t) d\mu = \sup\left\{\int_B x(t) d\mu : B \in \Sigma(\mu), B \subset A\right\} \qquad (A \in \Sigma)$$

(如果 $A \in \Sigma(\mu)$，这个公式显然正确).

对于任意的可测函数 x，我们按公式(3)定义积分，和前面一样规定它的存在性. 所构造的积分具有性质 1)，3)，5). 和上面一样，积分$\int_A x\, d\mu$ 有限的函数叫做在 $A \in \Sigma$ 上是可积的，而如果 $A = T$，则简称可积的.

我们现在考虑关于把所述理论转到复值函数情形的问题. 设 $x: T \to \mathbf{C}$ 是复函数. 令 $y(t) = \operatorname{Re} x(t)$, $z(t) = \operatorname{Im} x(t)$. 函数 $x(t)$ 叫做可测的(可积的)，如果两个实函数 $y(t)$和 $z(t)$是可测的(可积的). 如果 $y(t)$和 $z(t)$可积，则令

$$\int_A x(t) d\varphi = \int_A y(t) d\varphi + i\int_A z(t) d\varphi.$$

有时也取无限值的函数来研究是方便的. 和前面一样，函数 $x: T \to [-\infty, +\infty]$ 叫做关于 σ-代数 Σ 是可测的，如果其所有 Lebesgue 集合(2)都是可测的.

设(T, Σ, μ)是测度空间. 如果对于可测函数 x: $T \to [-\infty, +\infty]$记

$$A_\infty^+ = \{t \in T: x(t) = +\infty\},$$

$$A_\infty^- = \{t \in T:\ x(t) = -\infty\}, \qquad A_\infty = A_\infty^+ \cup A_\infty^-,$$

则当 $\mu(A_\infty)=0$ 并且积分 $\int_{T\setminus A_\infty} x d\mu$ 有定义的时候，令 $\int_T x d\mu = \int_{T\setminus A_\infty} x\, d\mu$；如果$\mu(A_\infty^+)>0, \mu(A_\infty^-)=0$，令$\int_T x\, d\mu = +\infty$，最后，如果 $\mu(A_\infty^-)>0, \mu(A_\infty^+)=0$，令$\int_T x d\mu = -\infty$. 其余情况积分无定义. 和前面一样，函数 $x(t)$ 叫做可积的，如果$\int_T x d\mu$ 有限，即当$\mu(A_\infty)=0$ 及函数 $x\chi_{T\setminus A_\infty}$ 可积时. 积分$\int_{A} x d\mu$ 用类似方式定义.

设函数 $x(t)$只给定在集合 $T\setminus A$ 上，其中 $\mu(A)=0$，如果它在 $T\setminus A$ 上可测，则它叫做可测的(在 T 上). 如果$\int_{T\setminus A} x d\mu$ 有定义，则令$\int_T x d\mu = \int_{T\setminus A} x d\mu$.

在本节下面的所有定义和定理中，我们假设，函数在扩张的实轴或复数域内取值，如果对函数用不等号加以限制，则这种函数在$[-\infty, +\infty]$内取值.

6.5. 设(T, Σ, μ)是测度空间. 我们说某性质几乎处处成立(简记 a.e.)，如果除零测度集合外它到处成立. 例如，如果 x 和 y 是可测函数，则 $x(t)\geqslant y(t)$ a.e. 就表示$\mu(\{t:\ x(t)<y(t)\})=0$. 可测函数 x 与 y 叫做等价的，如果$x(t)=y(t)$ a.e. 根据 6.2. 的条件 2)这就相当于对于任何 $A\in\Sigma(\mu)$及几乎所有的 $t\in A$ 有 $x(t)=y(t)$. 积分对于几乎处处成立和处处成立的性质“不加区别”. 例如，如果 $x(t)=y(t)$ a.e.，则$\int x d\mu = \int y d\mu$.

其次，在本节中，如果没有相反的约定，我们总假定所有的函数都是可测的，几乎处处有限的，即 $\mu\{t\in T:\ x(t)=+\infty$ 或 $x(t)=-\infty\}=0$.

不仅在研究函数时，而且在研究 Σ 中的可测集合时也可以忽略零测度集合．因此我们引进下面的记号．对于 $A, B\in\Sigma$ 记号 $A\subset B(\mathrm{mod}\,\mu)$ 表示 $\mu(A\setminus B)=0$; $A=B(\mathrm{mod}\,\mu)$ 表示 $A\subset B(\mathrm{mod}\,\mu)$ 及 $B\subset A(\mathrm{mod}\,\mu)$．集合 A 与 B 叫做(μ)-离析的，如果 $\mu(A\cap B)=0$．集合系 $\{A_\xi\}(\xi\in\Xi)$, $A_\xi\in\Sigma$ 叫做集合 T 的(μ)-分划，如果集合 A_ξ 两两(μ)-离析并且 $T=\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi(\mathrm{mod}\,\mu)$．

称可测函数序列 $\{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛于函数 $x(t)$，如果 $\mu(\{t: x_n(t)\nrightarrow x(t)\})=0$．（我们指出，如果一开始甚至没有假设极限函数 $x(t)$ 的可测性，则它的可测性容易证明．）对于几乎处处收敛，我们使用记号 $x_n\to x$ a. e.

设函数 $x_n(t)(n\in N)$ 和 $x(t)$ 可测，$A\in\Sigma$, $\mu(A)<\infty$．称序列 $\{x_n(t)\}$ 在集合 A 上按测度收敛于函数 $x(t)$，如果对于任何 $\varepsilon>0$

$$\mu(\{t\in A: |x_n(t)-x(t)|\geqslant\varepsilon\})\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

当 $\mu(A)$ 为任意的测度时，如果在任何集合 $B\in\Sigma$ 上，$B\subset A$, $\mu(B)<\infty$, $\{x_n(t)\}$ 按测度收敛于 $x(t)$，则称序列 $\{x_n(t)\}$ 在集合 A 上按测度收敛于 $x(t)$*⁾．利用记号 $x_n\to x(\mu)$ 表示（在 T 上）按测度收敛．用类似的方式定义可测函数有向列 $\{x_\alpha(t)\}$ 按测度收敛于可测函数 $x(t)$ $(x_\alpha\to x(\mu))$．几乎处处收敛与按测度收敛有如下的联系．

定理 4. 1) 如果 $x_n\to x$ a. e.，则 $x_n\to x(\mu)$.

2) 如果 (T, Σ, μ) 是具有 σ-有限测度的空间且 $x_n\to x(\mu)$，则可以找到子序列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\to x$ a. e.

由定理 4 推出，两个函数的加法和乘法运算关于按测度收敛来说是连续的．

---

*）在无限测度时所述定义与通常是不同的．这是因为在此情形下通常的按测度收敛具有病态性质．

设(T,Σ,μ)是测度空间. 集合$A\in\Sigma$叫做原子, 如果$\mu(A)\neq 0$, 并且由$B\in\Sigma$, $B\subset A$推出, 或者$\mu(A)=\mu(B)$, 或者$\mu(B)=0$. 现在可以这样表述6.2的条件2): μ没有测度无限的原子. 如果$T=\bigcup_{\alpha\in A}T_\alpha\cup N$, 其中$T_\alpha(\alpha\in A)$是原子, 而$\mu(N)=0$, 则称$(T,\Sigma,\mu)$是具有离散测度的空间. 称$(T,\Sigma,\mu)$为具有连续测度的空间, 如果其中无原子. 可以指出, 在具有连续测度的空间中总存在可测函数序列$\{x_n\}$, 使得$x_n\to x(\mu)$, 而$x_n\not\to x$ a.e.

关于几乎处处收敛的种种事实列为下述定理.

定理5. 设(T,Σ,μ)是具有σ-有限测度的空间.

1)(关于收敛的稳定性定理) 如果序列$x_n\to 0$ a.e., 则存在正数的递增序列$\lambda_n\to+\infty$, 使得$\lambda_n x_n(t)\to 0$ a.e.

2)(关于正则收敛定理) 如果序列$x_n\to 0$ a.e., 则存在可测的、几乎处处有限的在T上非负的函数$y(t)$和正数序列$\varepsilon_n\to 0$, 使得$|x_n(t)|\leqslant\varepsilon_n y(t)$ a.e.

3)(关于对角线序列定理) 如果对于任何$k\in N$有$x_{n_k}\xrightarrow[n\to\infty]{}x_k$ a.e. 和$x_k\xrightarrow[k\to\infty]{}x$ a.e., 则存在序列$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 使得《对角线》序列$x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x$ a.e.

4)(Егоров定理) 如果$\mu(T)<\infty$且序列$x_n\to x$ a.e., 则对于任何$\varepsilon>0$存在$A\in\Sigma$, 使得$\mu(A)<\varepsilon$且在集合$T\setminus A$上一致有$x_n(t)\to x(t)$.

6.6. 在这一段中我们列举出关于积分号下取极限的各种定理. 设(T,Σ,μ)是测度空间.

定理6(Lebesgue). 设$\{x_n(t)\}$是可积函数序列且$x_n\to x(\mu)$. 如果存在非负可积函数$y(t)$, 使得$|x_n(t)|\leqslant y(t)$a.e. $(n\in N)$, 则函数$x(t)$也是可积的且

$$\lim\int_T x_n d\mu=\int_T x d\mu. \tag{4}$$

定理 7 (Levi). 如果 $x_n(t)\geqslant 0$ a. e. 且 $x_n\uparrow x$ a. e., 则(4)式成立.

我们指出，如果函数 x 不是几乎处处有限的，定理 7 仍然正确.

推论. 如果函数 $y_k(t)\geqslant 0$ a. e. 是可积的，并且 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_T y_k d\mu<+\infty$, 则 $x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k(t)$ 几乎处处有限，并且

$$\int_T x d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_T y_k d\mu.$$

事实上，令 $x_n(t)=\sum_{k=1}^{n}y_k(t)$. 于是 $x_n\uparrow x$ a. e., 并且函数 x 在一正测度集合上可以预先看作是无限的. 根据对定理 7 所作的注有 $\int_T x d\mu=\lim\int_T x_n d\mu=\lim\sum_{k=1}^{n}\int_T y_k d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_T y_k d\mu<\infty$. 所以，函数 x 是可积的，从而是几乎处处有限的.

定理 8 (Fatou). 如果 $x_n(t)\geqslant 0$ a. e. 且 $x_n\to x(\mu)$, 则

$$\int_T x d\mu\leqslant\sup_n\int_T x_n d\mu.$$

我们指出，对于有向列 $x_\alpha\to x(\mu)$, 容易推得类似于定理 6 和 8 的结果.

6. 7. 在这一段里我们将叙述把测度论应用于泛函分析上起着奠基作用的 Radon-Nikodým 定理.

设 (T, Σ, μ) 是测度空间，φ 是 Σ 上的可数可加函数. 如果从 $\mu(A)=0$ 推得 $\varphi(A)=0$, 则 φ 叫做关于 μ 是绝对连续的. 如果存在集合 $A_0\in\Sigma$, 使得

$$\mu(A_0)=0, \qquad \varphi(A)=\varphi(A\cap A_0), \qquad A\in\Sigma,$$

则 φ 叫做关于 μ 是奇异的.

定理 9. 如果 φ 在 Σ 上是有限的可数可加函数，则 φ 唯一地表示为和 $\varphi(A)=\nu(A)+\lambda(A)(A\in\Sigma)$ 的形式，其中 ν 和 λ 是 Σ 上的可数可加函数，并且 ν 是绝对连续的，而 λ 关于 μ 是奇异的.

表达式 $\varphi=\nu+\lambda$ 叫做 Lebesgue 意义下的分解. 显然，如果 x 是可积函数，则集合函数 $\nu(A)=\int_A x d\mu(A\in\Sigma)$ 关于 μ 是绝对连续的. Radon-Nikodým 定理指出，所有绝对连续函数都可以用这种方法得到.

定理 10(Radon-Nikodým). 设 (T, Σ, μ) 是 σ-有限测度空间，ν 是定义在 Σ 上的有限的关于 μ 为绝对连续的集合函数. 则存在（精确到零测度集合是唯一的）按测度 μ 可积的 T 上的函数 $x(t)$，使得

$$\nu(A)=\int_A x d\mu \qquad (A\in\Sigma).$$

同时集合函数 ν 是非负的当且仅当 $x(t)\geq 0$ a. e.

6.8. 这一段的目的是定义测度空间的乘积空间. 在研究积分算子时这个概念起着重要的作用.

设 (S, Σ_S, ν) 和 (T, Σ_T, μ) 是两个 σ-有限测度空间. 以 Σ_R^0 表示集合 $R=S\times T$ 的子集的最小的 σ-代数，它包含形如 $B\times A$ 的所有集合，其中 $B\in\Sigma_S$, $A\in\Sigma_T$. 可以证明，在 σ-代数 Σ_R^0 上存在唯一的测度 λ，使得对于任何 $B\in\Sigma_S$, $A\in\Sigma_T$ 有

$$\lambda(B\times A)=\nu(B)\mu(A).$$

（我们认为，如果 $a\neq 0$, $a\cdot(+\infty)=+\infty$, 且 $0\cdot(+\infty)=0$.）如同在 6.2 中那样使测度 λ"完全化". 所得到的 σ-代数记为 Σ_R，而测度仍记为 λ. 所构造的具有完全的 σ-有限测度的空间 (R, Σ_R, λ) 叫做空间 (S, Σ_S, ν) 和 (T, Σ_T, μ) 的乘积，而测度 λ 叫做测度 ν 和 μ

的乘积，有时表示为 $\lambda=\nu\times\mu$.

如果我们取具有 Lebesgue 测度的区间[0, 1]作为因子，就得到测度乘积的最熟悉的例子. 这些测度的乘积就是单位正方形上的 Lebesgue 测度。

为简单起见，关于 Σ_S, Σ_T 或 Σ_R可测的函数分别叫做 ν-可测，μ-可测或 λ-可测.

我们引入利用关于每个测度因子的两次积分来计算关于测度乘积的积分的两个定理。

定理 11(Fubini). 设函数 $K(s,\ t)$ ($s\in S$, $t\in T$) 关于测度 $\lambda=\nu\times\mu$ 可积. 则关于 ν 几乎对于所有的点 $s\in S$ 函数 $K_s(t)=K(s,t)$关于测度μ 可积. 其次，函数 $H(s)=\int_T K(s,t)d\mu(t)$关于测度 ν 可积并且

$$\int_R K(s,t)d\lambda(s,t)=\int_S\left\{\int_T K(s,t)d\mu(t)\right\}d\nu(s).$$

对于非负函数 Fubini 定理可以更加强.

定理 12(Tonelli). 设 $K(s,t)$ 是 R 上非负 λ-可测函数. 则关于 ν 几乎对于所有的点 $s\in S$ 函数 $K_s(t)=K(s,t)$ μ-可测. 此外，函数 $H_s=\int_T K(s,t)d\mu(t)$(可能在正测度集合上取无限值)ν-可测并且

$$\int_R K(s,t)d\lambda(s,t)=\int_S\left\{\int_T K(s,t)d\mu(t)\right\}d\nu(s)$$

与这个积分取有限值还是无限值无关.

我们还要指出测度空间乘积的某些性质:

1) 如果测度μ 和 ν 是有限的，则对于任何集合 $C\in\Sigma_R$及每个数 $\varepsilon>0$ 可以找到集合 $C_1=\bigcup_{k=1}^{n}(B_k\times A_k)$，其中 $B_k\in\Sigma_S$, $A_k\in\Sigma_T$,

使得$\int_R |\chi_C(s,t)-\chi_{C_1}(s,t)|d\lambda(s,t)<\varepsilon$.

2) 如果函数$K(s,t)$ λ-可积并且对于任何$A\in\Sigma_T(\mu)$, $B\in\Sigma_S(\nu)$有

$$\int_{B\times A}K(s,t)d\lambda(s,t)\geqslant 0,$$

则$K(s,t)\geqslant 0$ λ-a.e.

6.9. 测度论一开始就是与拓扑密切相关的，并且长期以来测度只是建立在某些类拓扑空间上. 后来很多数学家(首先是Carathéodory)致力于建立具有测度的抽象空间理论，在前面几段里我们简要地汇总了这些结果. 在这一段里我们引入与拓扑相联系的某些测度论的事实.

设K是紧空间. 包含K中全部闭集的最小的σ-代数$\mathscr{B}$叫做紧空间K的Borelσ-代数，而$\mathscr{B}$中的集合叫做它的Borel集.

在紧空间K的子集的某个包含其全部闭集的σ-代数Σ上定义的有限的可数可加集合函数φ叫做正则的，如果对于任何$A\in\Sigma$及任何数$\varepsilon>0$存在闭集F与开集G,使得$F\subset A\subset G$,并且$|\varphi|(G\setminus F)<\varepsilon$. 如果$\varphi$是正则的，则其变差$\varphi_+,\varphi_-,|\varphi|$也都是正则的.

设μ_0是给定在Borel σ-代数$\mathscr{B}$上的正则的测度. 如同在6.2中那样使其完全化. 所得到的更广一点的σ-代数记为Σ,而延拓了的测度记为μ. 例如，用这样的方法在$\mathbf{R}^n$中的紧集上由Borel测度得到了Lebesgue测度. $\mathbf{R}^n$中的紧集A的Lebesgue测度我们记为mes(A). 这样，设μ和Σ表示依旧. 函数在K上的可测性理解为是关于σ-代数Σ的，而术语a.e.是关于测度μ的. 显然，任何连续函数可测. 下面的Лузин定理表明，在与紧空间K关于测度μ逼近的集合上任何可测函数是连续的.

定理 13(Лузин). 对于在紧空间K上的a.e.有限的函数$x(t)$,下列命题等价:

1) $x(t)$可测;

2) 对于每个 $\varepsilon>0$ 存在闭集 $F\subset K$, 使得$\mu(K\backslash F)<\varepsilon$ 且函数 $x(t)$在F上的限制为连续的.

3) 对于每个 $\varepsilon>0$ 存在闭集 $F\subset K$ 和 K 上的连续函数 $y(t)$, 使得 $\mu(K\backslash F)<\varepsilon$, 当 $t\in F$ 时 $x(t)=y(t)$, 并且$\sup\limits_{t\in F}|x(t)|=\sup\limits_{t\in K}|y(t)|$.

由 Лузин 定理容易得到 Fréchet 定理: 任何在K上可测的a. e. 有限的函数 $x(t)$是连续函数序列 a. e. 收敛的极限.

在我们概要叙述测度与积分理论的最后, 还要提到取复数值的集合函数. 和实数的情况完全一样, 对于它们可以定义可加性, 可数可加性, 全变差, 以及正则性的概念. 如果 $\varphi:\Sigma\to\mathbf{C}$ 是可数可加的, 则我们研究实的可数可加函数 $\varphi_1(A)=\operatorname{Re}\varphi(A)$, $\varphi_2(A)=\operatorname{Im}\varphi(A)$. 于是积分可以按公式 $\int_A x(t)d\varphi=\int_A x(t)d\varphi_1+i\int_A x(t)d\varphi_2$ 来引进. 由于我们不太需要复集合函数, 因此, 如无相反的约定, 所有的集合函数都假定为实的.

6.10. 各种可测函数空间在本书中起着基本的作用. 这里我们研究所有可测函数所成空间的性质.

设(T, Σ, μ)是测度空间. 以 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$表示给定在$T$上并且几乎处处有限的所有可测函数的总体. 同时我们将彼此等价的函数等同起来, 即把它们看成空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$的同一个元素. 由此可见, 以后空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$的元素就是彼此等价的函数类, 并且如果 $x\in\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 是等价函数类, 则以 $x(t)$表示这个类中的任何可测函数(同时总可以认为, 函数 $x(t)$只取有限值).

如果测度μ是 σ-有限的, 则 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$可以成为度量空间, 其中关于度量的收敛与按测度收敛是一致的.

这样, 如果没有相反的约定, 总假定μ是 σ-有限的. 我们在

$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中建立度量. 为此取在 T 上可测的函数 $f(t)$, 满足条件:

$$f(t)>0 \quad \text{对于任何 } t\in T; \int_T f(t)d\mu(t)=1. \tag{5}$$

这样的函数 $f(t)$是存在的. 事实上, 因为测度 μ 是 σ-有限的, 所以 $T=\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, 其中集合 T_n 两两离析且 $0<\mu(T_n)<\infty(n\in \boldsymbol{N})$. 令

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{T_n}(t)/(2^n\mu(T_n)).$$

于是函数 $f(t)$满足条件(5). 如果 $\mu(T)<\infty$, 则可以令 $f(t)=1/\mu(T)(t\in T)$. 对于任何元素 $x, y\in\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$, 我们按公式

$$\rho(x, y)=\int_T \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}f(t)d\mu(t) \tag{6}$$

定义它们之间的距离.

公式(6)中的积分是有限的, 因为函数 f 是可积的, 而第一个因子取值在 0 与 1 之间. 显然 $\rho(x, y)$ 不依赖于相应类中等价的函数 $x(t)$与 $y(t)$ 的选取. 我们来验证度量空间的公理成立 (见 3.1).

因为(6)中被积函数是非负的, 所以 $\rho(x, y)\geqslant 0$. 同样明显, $\rho(x, x)=0$.

设 $\rho(x, y)=0$. 于是几乎处处有 $\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}=0$, 由此 $x(t)=y(t)$ a. e., 而这样的函数在空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中是等同的. 所以, 度量空间定义中的条件 1)成立. 条件 2)显然成立. 从 § 3 的不等式(2) 推得, 对于任何 $x, y, z\in\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 及几乎所有的 $t\in T$ 有

$$\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|} \leqslant \frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|} + \frac{|y(t)-z(t)|}{1+|y(t)-z(t)|}. \tag{7}$$

为了得到三角形不等式，只要对不等式(7)乘以 $f(t)$ 并且积分所得的不等式.

设 $f(t)$和 $g(t)$是满足条件(5)的两个函数，ρ_f 和 ρ_g 是根据它们构造的度量(6). 如果函数 f 和 g 不是等价的，则 $\rho_f \neq \rho_g$. 但是，正如下述定理所表明，这些度量生成的拓扑是一致的.

定理14. 序列$\{x_n\} \subset \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$按度量收敛于$x \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$当且仅当 $x_n \to x(\mu)$.

证. 设 $\rho(x_n, x) \to 0$. 对于 $\varepsilon > 0$ 令 $A_n(\varepsilon) = \{t \in T: |x_n(t) - x(t)| f(t) \geqslant \varepsilon\}$. 利用 $\varphi(\lambda) = \lambda/(1+\lambda)$是递增函数，有

$$\rho(x_n, x) = \int_T \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} f(t) d\mu(t)$$

$$\geqslant \int_{A_n(\varepsilon)} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} f(t) d\mu(t)$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \mu[A_n(\varepsilon)].$$

因而，$\mu[A_n(\varepsilon)] \to 0$，由此 $x_n f \to xf(\mu)$. 因为 $f(t) > 0 (t \in T)$，所以 $x_n = (x_n f)/f \to (xf)/f = x(\mu)$.

反之，如果 $x_n \to x(\mu)$，则显然

$$\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} f(t) \to 0(\mu).$$

因为函数 f 可积，所以按 Lebesgue 定理准许在积分号下取极限：

$$\rho(x_n, x) = \int_T \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} f(t) d\mu(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

注. 对于有向列类似定理 14 的命题成立.

如果 $\rho(x_\alpha, x) \to 0$，则 $x_\alpha \to x(\mu)$的证明与上述定理是一样的.

设 $x_\alpha \to x(\mu)$，但是 $\rho(x_\alpha, x) \nrightarrow 0$．于是可以找到 $\delta>0$ 及有向子列 $\{y_\beta\}$，使得对于任何 β 有 $\rho(y_\beta, x) \geqslant \delta$．因为函数 f 可积，所以可以找到集合 $A \in \Sigma(\mu)$，使得 $\int_{T \setminus A} f d\mu < \delta/2$．由于 $y_\beta \to x(\mu)$，对于每个 $n \in N$ 存在 β_n，使得 $\mu(\{t \in A: |y_{\beta_n}(t) - x(t)| > 1/n\}) < 1/n$．于是，显然，在 A 上 $y_{\beta_n} \to x(\mu)$ 并且根据定理 14

$$\rho(y_{\beta_n}, x) = \int_A \frac{|y_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f d\mu + \int_{T \setminus A} \frac{|y_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f d\mu$$

$$< \int_A \frac{|y_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f d\mu + \frac{\delta}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\delta}{2},$$

与 $\rho(y_{\beta_n}, x) \geqslant \delta > 0 (n \in N)$ 矛盾．

定理 15. $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 是完备的度量空间．

证． 取空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中元素的自收敛序列 $\{x_n\}$．

设 n_k 使得当 $n \geqslant n_k$ 时有 $\rho(x_n, x_{n_k}) < 2^{-k}$．可以认为 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，因而 $n_k \to \infty$．级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_T \frac{|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|} f(t) d\mu(t)$$

显然收敛．然而如果正函数的积分的级数收敛，则根据定理 7 的推论函数本身的级数就几乎处处收敛，即级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)$ 几乎处处收敛，其中

$$\alpha_k(t) = \frac{|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}.$$

如果对于某个 t 上述级数收敛，则对于充分大的 k 有 $|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \leqslant 1$．所以，对于这些 k 不等式 $|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \leqslant 2\alpha_k(t)$ 成立．由此可见，级数 $x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$ 几乎处处收敛．以 $x_0(t)$ 表示其和．这是个可测函数．因为由级数的收敛性

几乎处处 $x_{n_k}(t)\to x_0(t)$，所以更有按测度收敛，而这就表示在空间 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中收敛，故 $\rho(x_{n_k},x_0)\to 0$.

我们得到了子序列的收敛性. 但是因为当 $k\to\infty$ 时 $n_k\to\infty$，所以由不等式 $\rho(x_k,x_0)\leqslant\rho(x_k,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x_0)$ 推出 $\rho(x_k,x_0)\to 0$，即在 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中 $x_k\to x_0$.

如果我们取具有 Lebesgue 测度的区间 $[a,b]$ 作为 (T,Σ,μ)，便得到了一个重要的特殊情形，这时我们把 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 记为 $\mathbf{S}(a,b)$，或者，当集 $T=N$，σ-代数 Σ 是自然数列的所有子集的总体，而 T 中每个点的测度都等于 1，这时我们得到在 §3 中引进的空间 $\mathbf{s}$.

现在研究度量空间 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 的可分性问题. 我们首先指出，根据定理 3 的推论，取有限个值的可测函数的集合在 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中是稠密的.

在集合 Σ 上按公式

$$\rho_\mu(A,B)=\rho(\chi_A,\chi_B);\quad A,B\in\Sigma$$

定义度量 ρ_μ，而在 Σ 中把使得 $A=B(\mathrm{mod}\ \mu)$ 的集合 A 与 B 等同起来.

测度 μ 叫做可分的，如果它是 σ-有限的且度量空间 (Σ,ρ_μ) 是可分的.

定理16. 设测度 μ 是 σ-有限的. 度量空间 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 是可分的当且仅当测度 μ 是可分的.

证. 设空间 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 是可分的. 研究可以与 Σ 等同起来的集合 $H=\{\chi_A:\ A\in\Sigma\}$. 因为度量 ρ 和 ρ_μ 在 Σ 上完全一样并且在度量空间中可分性是继承的(见 4.4)，所以集合 H 可分，从而 Σ 也是可分的.

反之，设测度 μ 是可分的. 以 Σ_0 表示在 Σ 中可数的处处稠密

的集合. 我们研究集合$M=\left\{\sum_{k=1}^{m}r_k\chi_{A_k}:\ A_k\in\Sigma_0, m\in N\right\}$, 其中$r_k$是所有可能的有理数. 集合$M$显然是可数的. 我们来证明, M在$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$中稠密*). 已经指出过, 取有限个值的函数的集合在$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$中稠密, 从而具有有理系数的取有限个值的函数的集合也在$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$中稠密. 这样, 只须用$M$中的函数逼近形如 $y(t)=\sum_{k=1}^{m}r_k\chi_{A_k}(t)$的函数, 其中$r_k$是有理数, $A_k\in\Sigma$. 因为Σ_0在Σ中稠密, 所以可以在Σ_0中找到序列 $\{A_k^n\}_{n=1}^{\infty}(k=1, 2, \cdots, m)$,使得 $\rho_\mu(A_k^n, A_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. 于是 $\rho(\chi_{A_k^n}, \chi_{A_k})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, 从而

$M\ni\sum_{k=1}^{m}r_k\chi_{A_k^n}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}y(t)(\mu)$, 这就是所要证明的.

我们指出, $\mathbf{R}^n$ 中任意的可测子集上的 Lebesgue 测度是可分的. 事实上, 如果D是 $\mathbf{R}^n$ 中具有 Lebesgue 测度的任意的可测子集, 则以$\mathbf{S}(D)$表示对应的可测函数空间. 我们来证明$\mathbf{S}(D)$是可分的.

首先设D是$\mathbf{R}^n$中半径为m中心为零的球B_m. 于是B_m是紧度量空间. 后面要证明(见定理 IV. 4. 3), 连续函数空间$\mathbf{C}(B_m)$是可分的. 因为从$\mathbf{S}(B_m)$到$\mathbf{C}(B_m)$上的诱导拓扑显然弱于$\mathbf{C}(B_m)$的通常拓扑, 所以$\mathbf{C}(B_m)$在诱导拓扑中更是可分的. 但是, 由定理 13 后面的注, 连续函数在$\mathbf{S}(B_m)$中稠密, 从而证明$\mathbf{S}(B_m)$的可分性. 如果$x\in\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$, 则对于任何$t\in\mathbf{R}^n$有$x_m(t)=x(t)\chi_{B_m}(t)\xrightarrow[m\to\infty]{}x(t)$. 所以, $\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathbf{S}(B_m)$在$\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$中稠密, 于是按$m\in N$取的

---

*) 在复数的情形下应当研究$M=\left\{\sum_{k=1}^{m}(r_k+is_k)\chi_{A_k}:A_k\in\Sigma_0, m\in N\right\}$, 其中$r_k$与$s_k$是所有可能的有理数.

$\mathbf{S}(B_m)$中处处稠密的可数集的并在$\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$中稠密，从而证得$\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$的可分性．如果集合D是任意的，则$\mathbf{S}(D)$可分，因为它可以与$\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$的子空间等同起来．

在结束这一节之前，我们来研究实空间$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$的序的性质．

在实空间$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$中引进序，令$x\leqslant y$ $(x,y\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu))$，如果$x(t)\leqslant y(t)$ a. e.

设M是$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$中上有界的子集，即存在元素$y\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$使得对于任何$x\in M$都有$x\leqslant y$．如果集合$M$是可数的，则显然在有序空间$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$中存在$x_0=\sup M$，并且$x_0$是等价函数类，其中包含函数

$$x_0(t)=\sup\{x(t):x\in M\}\qquad(t\in T).\tag{8}$$

函数$x_0(t)$依赖于从类$x\in M$中所选取的函数$x(t)$，但是，因为集合M是可数的，所以按公式(8)我们得到了彼此等价的函数．如果M是不可数的，则这样定义$\sup M$一般来讲是不可能的，因为这时按公式(8)定义的函数可能是不可测的，或者对于代表$x(t)$ $(x\in M)$的不同选择，按公式(8)可能得到两个可测的但不等价的函数．例如，如果A是区间$[0,1]$中Lebesgue不可测的子集，而M由所有集A的单点子集的特征函数组成，则$x_0(t)=\sup\{x(t):x\in M\}$是集$A$的特征函数，因而不可测，但是$\sup M$显然是几乎处处等于零的函数类．

由于(8) $(x\vee y)(t)=\max(x(t),\ y(t))$，$(x\wedge y)(t)=\min(x(t),y(t))$．

定理17. 设测度μ是σ-有限的，M是$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$的任意的非空上有界的子集．则

a) 存在$x_0=\sup M\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$；

b) 存在可数的子集$\{x_n\}\subset M$，使得$\sup x_n=\sup M$．

证. 取任何函数 $x'\in M$ 并研究由形如 $x\vee x'$ 的所有函数组成的集合 M'，其中 $x\in M$. 显然 $\sup M$ 与 $\sup M'$ 应该同时存在并且相等. 其次考虑由形如 $x-x'$ 的所有函数组成的集合 M''，其中 $x\in M'$. 这个集合由非负的函数构成并且上有界. 如果我们证明存在 $y_0=\sup M''$，则 $\sup M=x'+y_0$. 由此可见，不失一般性，一开始就可以认为：集合 M 由非负的函数构成并且当它包含每个函数 x_1, x_2, …, x_p 时同时也包含函数 $x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_p$.

对于任何 $x\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 令 $m(x)=\rho(x,0)$. 由于函数 $\varphi(\lambda)=\lambda/(1+\lambda)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是递增的，从 $0\leqslant x_1\leqslant x_2$ 推出 $m(x_1)\leqslant m(x_2)$.

令 $m_0=\sup\{m(x):x\in M\}\leqslant 1$ 并且找出序列 $\{x_n\}\subset M$，使得 $m(x_n)\to m_0$. 必要时以 $x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n$ 代替每个 x_n，立即可以认为 $\{x_n\}$ 是递增的.

设 $x_0(t)=\sup x_n(t)=\lim x_n(t)$. 因为 $x_0\leqslant y$，所以 $x_0\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$. 根据 Lebesgue 定理 $m(x_n)\to m(x_0)$，由此 $m(x_0)=m_0$. 如果我们验证了 $x_0=\sup M$，则定理 17 便得到证明.

显然，如果 y 是集合 M 的上界，则 $y\geqslant x_0$. 我们尚需证明，x_0 是 M 的上界. 取任何元素 $x\in M$ 并且令 $x_n'=x_n\vee x$，$x_0'=x_0\vee x$. 因为 $x_n\uparrow x_0$，所以 $x_n'\uparrow x_0'$. 因此 $m(x_n')\to m(x_0')$. 根据集 M 的性质有 $x_n'\in M$，由此 $m(x_0')\leqslant m_0$. 另一方面，$x_0'\geqslant x_0$，因而 $m(x_0')\geqslant m(x_0)=m_0$，所以 $m(x_0')=m_0$. 于是

$$\int_T\left(\frac{x_0'}{1+x_0'}-\frac{x_0}{1+x_0}\right)f(t)\,d\mu=0.$$

因为被积函数非负，所以 $x_0'(t)=x(t)$ a.e.，从而证明了 $x_0=\sup M=\sup x_n$.

推论 1. 设测度 μ 是 σ-有限的，M 是 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 的任意的非空下有界的子集. 则

a′) 存在 $x_0=\inf M\in \mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$;

b′) 存在可数的子集 $\{x_n\}\subset M$, 使得 $\inf x_n=\inf M$.

为了证明推论, 只需研究集合 $-M=\{-x: x\in M\}$.

由定理 17 的证明不难推出下列更一般的命题.

推论 2. 如果 M 是 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中使得 $\sup\{x(t): x\in M\}<\infty$ a. e. 的子集, 则存在 $x_0=\sup M\in \mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$. 此外, 如果 M 是按递增有向的, 则可以选取序列 $\{x_n\}\subset M$, 使得 $x_n\uparrow x_0$ a. e.

定理 17 的命题 b) 对于任何上有界的集合 M 是正确的当且仅当测度 μ 是 σ-有限的. 命题 a) 在更为广泛的一类测度空间中是正确的.

我们说测度空间 (T,Σ,μ) 具有直和性质, 如果下列条件成立:

存在一族两两离析的集合 $T_\xi\in\Sigma$, $0<\mu(T_\xi)<\infty\ (\xi\in\Xi)$, 使得对于任何 $A\in\Sigma$, $\mu(A)<+\infty$, 都可以找到可数的指标集 $\Xi_0\subset\Xi$ 与测度为零的集合 N, 使得 $A=\bigcup_{\xi\in\Xi_0}(A\cap T_\xi)\cup N$.

显然, $\bigcup_{\xi\in\Xi}T_\xi\in\Sigma$ 并且 $\mu(T\setminus\bigcup_{\xi\in\Xi}T_\xi)=0$. 由定理 17 容易得到, 如果空间 (T,Σ,μ) 具有直和性质, 则在空间 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中定理17 的命题 a) 成立.

注. 如果在每个集合 $T_\xi\ (\xi\in\Xi)$ 上有向列 $x_\alpha\to x(\mu)$, 则 $x_\alpha\to x(\mu)$.

事实上, 如果 $A\in\Sigma(\mu)$, 则根据 $\{T_\xi\}$ 的定义有 $A=\bigcup_{\xi\in\Xi_0}(A\cap T_\xi)\cup N$, 其中 $\mu(N)=0$, 而 Ξ_0 是可数的. 因为

$$\mu(A)=\sum_{\xi\in\Xi_0}\mu(A\cap T_\xi)<\infty,$$

所以对于任何 $\delta>0$ 可以找到有限子集 $\Xi_1\subset\Xi_0$, 使得

$$\sum_{\xi\in\Xi_0\setminus\Xi_1}\mu(A\cap T_\xi)<\delta.$$

取任意的 $\varepsilon>0$. 于是，如果 n 是 Ξ_1 中元素的个数，则当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时有

$$\mu(\{t\in T_\xi: |x_\alpha(t)-x(t)|\geqslant\varepsilon\})<\delta/n \qquad (\xi\in\Xi_1).$$

所以

$$\begin{aligned}\mu(\{t\in A: &|x_\alpha(t)-x(t)|\geqslant\varepsilon\})\\ &\leqslant\sum_{\xi\in\Xi_1}\mu(\{t\in T_\xi: |x_\alpha(t)-x(t)|\geqslant\varepsilon\})\\ &\quad+\sum_{\xi\in\Xi_0\setminus\Xi_1}\mu(A\cap T_\xi)<n\delta/n+\delta=2\delta.\end{aligned}$$

第二章 向 量 空 间

§1. 基 本 定 义

1.1. 实数或复数域上的向量空间是一般三维欧氏空间的自然拓广. 在其中定义了两种代数运算: 向量加法和向量与标量(数)的乘法, 服从某些条件.

设K是实数或复数域(标量域). 如果在集$\mathbf{X}$中定义了两种运算: 对于其中每两个元素x与y定义了它们的和$x+y$也是此集的元素, 对于任何元素$x\in\mathbf{X}$与数$\lambda\in K$定义了乘积λx, 也是集$\mathbf{X}$中的元素, 并且这些运算满足下列公理:

1) $(x+y)+z=x+(y+z)$　　(加法结合律);

2) $x+y=y+x$　　(加法交换律);

3) 在$\mathbf{X}$中存在这样的元素$\mathbf{0}$, 使得对于任何$x\in\mathbf{X}$都有$0\cdot x=\mathbf{0}$;

4) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,
5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$　　(分配律);

6) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$　　(乘法结合律);

7) $1\cdot x=x$,

则称集合$\mathbf{X}$为K上的向量空间(或线性空间).

如果在集$\mathbf{X}$中引进了加法和数乘运算使之变成向量空间, 则称$\mathbf{X}$赋予了向量空间的结构. R上的向量空间称为实向量空间, 而C上的向量空间称为复向量空间. 我们使用向量空间这个术语时, 通常并不特别指出它在什么数域上或者由上下文可以看出是

什么数域.

在第一章中引进的空间 $\mathbf{C}(K)$, $\mathbf{C}^{(1)}[a,b]$, $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{l}^{\infty}(T)$都是向量空间,如果其中两个元素的和定义为对应函数的和函数,并且用类似方式定义元素与数的乘积. 在所有这些集合中,恒等于零的函数起零元素的作用.

另一个向量空间的例子是 n 维向量(坐标为K中的数)全体构成的集合 $\mathbf{K}^n$,其中向量的运算是按坐标相加与乘以K中的数. 这个向量空间是线性代数研究的主要对象.

1.2. 由公理 1)—7)得出下列简单的推论(这里 x, y, z 表示同一个向量空间 $\mathbf{X}$ 中的元素,而 $\lambda, \mu\in K$).

a) $x+\mathbf{0}=x$.

事实上, $x+\mathbf{0}=1\cdot x+0\cdot x=(1+0)x=1\cdot x=x$ (公理 3), 4), 7)).

b) 每一个 x 对应唯一的元素 x', 使得 $x+x'=\mathbf{0}$. 即 $x'=(-1)\cdot x$. 通常用 $-x$ 表示元素 x' 并称它为(关于 x 的)反元素.

如上所述,取 $x'=(-1)\cdot x$. 再根据公理 3), 4), 7)有 $x+x'=1\cdot x+(-1)\cdot x=(1+(-1))\cdot x=0\cdot x=\mathbf{0}$. 如果还有元素 $\bar{x}$, 也使得 $x+\bar{x}=\mathbf{0}$,则由于加法的结合律和交换律,利用 a),

$$\begin{aligned}x'&=x'+\mathbf{0}=x'+(x+\bar{x})=(x'+x)+\bar{x}\\&=(x+x')+\bar{x}=\mathbf{0}+\bar{x}=\bar{x}+\mathbf{0}=\bar{x}.\end{aligned}$$

c) $-(\alpha x)=(-\alpha)\cdot x=\alpha\cdot(-x)$.

事实上,根据 6)和 7)有

$-(\alpha x)=(-1)\cdot(\alpha x)=(-\alpha)\cdot x=\alpha((-1)\cdot x)=\alpha\cdot(-x)$.

d) 对于任意的 x 与 y,存在唯一的元素 z, 使得 $z+y=x$; 我们称 z 为元素 x 与 y 的差,并记作 $z=x-y$.

令 $z=x+(-y)$. 利用上述证明得 $z+y=(x+(-y))+y=x+(y+(-y))=x+\mathbf{0}=x$. 如果还存在一个元素 $\bar{z}$ 满足所述条

件，则

$$\bar{z}=\bar{z}+\mathbf{0}=\bar{z}+(y+(-y))=(\bar{z}+y)+(-y)$$
$$=x+(-y)=z.$$

e) $x=y$ 等价于 $x-y=\mathbf{0}$.

事实上，如果 $x=y$，则显然

$$x-y=x+(-y)=y+(-y)=\mathbf{0}.$$

如果 $x-y=\mathbf{0}$，则 $y=y+(x-y)=[y+(-y)]+x$
$$=x+\mathbf{0}=x.$$

f) $\lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y$;　$(\lambda-\mu)x=\lambda x-\mu x$.

由于乘法的分配律并利用 b) 与 c) 得 $\lambda(x-y)=\lambda[x+(-y)]$ $=\lambda x+\lambda(-y)=\lambda x+(-\lambda y)=\lambda x-\lambda y$ 及 $(\lambda-\mu)x=\lambda x+(-\mu)x$ $=\lambda x+(-\mu x)=\lambda x-\mu x$.

g) $\lambda\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

事实上，$\lambda\mathbf{0}=\lambda(0\cdot x)=(\lambda\cdot 0)x=0\cdot x=\mathbf{0}$.

h) 如果 $\lambda x=\mathbf{0}$ 且 $\lambda\neq 0$，则 $x=\mathbf{0}$.

事实上，$x=1\cdot x=\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\right)x=\frac{1}{\lambda}(\lambda x)=\frac{1}{\lambda}\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

i) 如果 $\lambda x=\lambda y$ 且 $\lambda\neq 0$，则 $x=y$.

由 h) 及 e) 显然能够推出.

j) 如果 $\lambda x=\mathbf{0}$ 且 $x\neq\mathbf{0}$，则 $\lambda=0$.

事实上，如果 $\lambda\neq 0$，则根据 h) 就有 $x=\mathbf{0}$.

k) 如果 $\lambda x=\mu x$ 且 $x\neq\mathbf{0}$，则 $\lambda=\mu$.

显然.

最后指出，由于加法的结合律，可以用 $x+y+z$ 来代替和 $(x+y)+z$ 或 $x+(y+z)$，类似地，有更多的被加项时，也可省略括号.

1.3. 与度量空间中的情形一样，如果在向量空间 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 的元素之间建立了线性同构，即建立了这样的一一对应 $x\longleftrightarrow y$ 使得

由 $x_1 \longleftrightarrow y_1$ 及 $x_2 \longleftrightarrow y_2$ 可以推出 $\lambda x_1+\mu x_2 \longleftrightarrow \lambda y_1+\mu y_2$, 则我们将不区别它们.

例如,从这个观点来看,实数集合与直线上点的集合应该看作为同一个向量空间,大家知道,在分析中就是这样做的.

1.4. 设 $\mathbf{X}_0$ 是包含在向量空间 $\mathbf{X}$ 中的集合,并且如果 $x, y\in\mathbf{X}_0$, 则其线性组合 $\lambda x+\mu y\in\mathbf{X}_0$. 这样, 在 $\mathbf{X}_0$ 中定义了元素的加法和元素乘以数的运算,其结果仍包含在 $\mathbf{X}_0$ 之中. 同时, $\mathbf{X}_0$ 满足向量空间的公理 3) ($\mathbf{0}=0\cdot x$). 其余的公理对 $\mathbf{X}_0$ 也保持成立, 因为它们在 $\mathbf{X}$ 中成立. 于是, $\mathbf{X}_0$ 以自然方式成为向量空间,我们把它叫作 $\mathbf{X}$ 中的线性子集(或线性集).

显然, 在 $\mathbf{X}$ 中任意一组线性集的交仍是线性集. 所以, 如果 E 是 $\mathbf{X}$ 中的某个集合, 则存在包含 E 的最小线性集 $\mathscr{L}(E)$. 这是所有包含 E 的线性集的交集. 集 $\mathscr{L}(E)$ 叫做集 E 的线性包.

容易验证, $\mathscr{L}(E)$ 与所有形式为 $x=\lambda_1x_1+\lambda x_2+\cdots+\lambda_nx_n$ 的元素 x 组成的集 $\tilde{L}$ 重合,其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 E 中任意一组元素, 而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是任意一组数. 这些元素 x 叫做元素 $x_1, \cdots, x_n$ 的线性组合.

事实上, $\tilde{L}$ 显然是线性集且包含 E. 另一方面, 所有包含 E 的线性集应该包含 E 中元素的所有可能的线性组合,即应该包含 $\tilde{L}$. 因此 $\mathscr{L}(E)=\tilde{L}$.

如果关系式 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k=\mathbf{0}$ 只可能在 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 时才成立,则称元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性独立的. 否则就称元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关. 例如,元素 x 与 $-x$ 线性相关,因为 $1\cdot x+1\cdot(-x)=\mathbf{0}$. 如果在元素 $x_1, \cdots, x_n$ 之间有等于零的元素, 则它们线性相关.

如果元素的无限组中任意一有限组是线性独立的, 则称此无

限组是线性独立的.

如果元素$\{x_\iota\}$构成线性独立组，则显然由等式

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\iota_k}=\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_{\iota_k}$$

可以推出等式

$$\lambda_k=\mu_k \qquad (k=1, 2, \cdots, n).$$

在空间 $\mathbf{C}[a, b]$ 中元素组$\{x_n\}$$(x_n(t)=t^n)$ 是线性独立组的一个例子.

设$\{x_\iota\}$是向量空间 $\mathbf{X}$ 的线性独立组，如果 $\mathscr{L}(\{x_\iota\})=\mathbf{X}$，则称它是 $\mathbf{X}$ 的代数基. 这样，每一个元素 $x\in\mathbf{X}$ 都可以表示为代数基中元素的线性组合形式，并由以上讨论推出，这表示式是唯一的.

按此观点，在所有向量空间中最简单的是具有有限的代数基，这样的空间叫做有限维空间，而构成基的元素个数叫做该向量空间的维数. 不难看出，向量空间的维数是它的不变量，即它不依赖于代数基的各种选法.

设 $\mathbf{X}$ 是有限维向量空间(维数为 n). 我们已经指出，每一个元素 $x\in\mathbf{X}$ 都可以唯一地表示为 $x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ 的形式，其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是代数基. 把元素 x 与坐标分量为$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$的向量 $\tilde{x}\in\mathbf{K}^n$ 相对应，我们在 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{K}^n$之间建立了一一对应，它是线性同构，因为如果 $x\longleftrightarrow\tilde{x}$ 及 $y\longleftrightarrow\tilde{y}$，则 $\lambda x+\mu y\longleftrightarrow\lambda\tilde{x}+\mu\tilde{y}$. 根据前面所作的注解，我们把集 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{K}^n$ 看成是一致的，于是把 $\mathbf{X}$ 看成是 n 维向量的集合.

由于这个原因，我们常把（任意一个）向量空间的元素叫做向量.

1.5. 现在引进一些符号，我们在以后有用.

对于任意的 $x\in\mathbf{X}$ 及 $E\subset\mathbf{X}$

$$x+E=\{x+y: y\in E\}.$$

对于任意的 $E_1 \subset \mathbf{X}$ 及 $E_2 \subset \mathbf{X}$

$$E_1 + E_2 = \{x + y:\quad x \in E_1, y \in E_2\}.$$

对于任意的 $\lambda \in K$ 及 $E \subset \mathbf{X}$

$$\lambda E = \{\lambda x:\quad x \in E\}.$$

我们指出，一般来说，$E+E \neq 2E$，而只有 $2E \subset E+E$.

1.6. 下面定义几种运算，用这些运算可以由一些空间建立另一些空间.

如果 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 是向量空间 $\mathbf{X}$ 中的两个线性子集，并且每一个 $x \in \mathbf{X}$ 都可以唯一地表示为 $x = x_1 + x_2$ 的形式，其中 $x_1 \in \mathbf{X}_1$，$x_2 \in \mathbf{X}_2$，则称 $\mathbf{X}$ 是向量空间 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 的代数直和.

设 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 是向量空间（在域 K 上），如果在直积 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ 中定义运算

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2),$$

则 $\mathbf{X}$ 成为向量空间.

设 $\mathbf{X}$ 是向量空间，$\mathbf{X}_0$ 是它的线性子集.

我们把 $\mathbf{X}$ 中的元素合并成类，如果 $x' - x'' \in \mathbf{X}_0$，则把这两个元素 x' 与 x'' 归入一类. 显然，不同的类不包含公共元素，并且每一个元素 $x \in \mathbf{X}$ 必属于一个（从而只属于一个）类. 设 $\bar{x}$ 是一个类且 $x \in \bar{x}$. 由定义本身推出，$\bar{x} = x + \mathbf{X}_0$. 反之，形如 $x + \mathbf{X}_0$ 的集就是包含元素 x 的类.

在所有的类组成的集合 $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ 中可以引进代数运算，令

$$\bar{x} + \bar{y} = x + y + \mathbf{X}_0, \quad \lambda \bar{x} = \lambda x + \mathbf{X}_0$$
$$(\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{X}/\mathbf{X}_0, x \in \bar{x}, y \in \bar{y}).$$

容易验证，这些定义与类 $\bar{x}, \bar{y}$ 中代表元素 x, y 的选择无关. 由所给的定义，$\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ 成为向量空间，我们把它叫做商空间，并且，包含空间 $\mathbf{X}$ 中零元素的类，即子空间 $\mathbf{X}_0$，起着商空间中零元素的

作用.

§ 2. 线性算子与线性泛函

2.1. 设 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 是 K 上的两个向量空间. 映射 U: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 称为线性映射或线性算子, 如果对于所有的 λ, $\mu\in K$ 及 x, $y\in\mathbf{X}$ 都有

$$U(\lambda x+\mu y)=\lambda U(x)+\mu U(y).$$

所有的由 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的线性映射组成的集, 记为 $L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, 如果用下列方式定义了代数运算, 就成为向量空间.

设 U_1, $U_2\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. 定义 $U=U_1+U_2$ 是由 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的算子:

$$U(x)=U_1(x)+U_2(x)\qquad(x\in\mathbf{X}).\tag{1}$$

显然, $U\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. 如果 $U\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $\lambda\in K$, 则 $\tilde{U}=\lambda U$ 定义为:

$$\tilde{U}(x)=\lambda U(x)\qquad(x\in\mathbf{X}).\tag{2}$$

显然, $\tilde{U}\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. 我们留给读者验证, 在这样定义代数运算下, $L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$是 K 上的向量空间. 我们只指出, 恒等于零的映射 $U_0=\mathbf{0}$:

$$U_0(x)=\mathbf{0}\qquad(x\in\mathbf{X}),$$

在 $L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$中起零元素的作用.

我们指出, 对于任何 $U\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$都有 $U(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 及 $U(-x)=-U(x)$ $(x\in\mathbf{X})$. 集合 $\operatorname{Ker}U=U^{-1}(\mathbf{0})$叫做映射 $U\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$的核, 它显然是 $\mathbf{X}$ 中的线性子集. 容易看出, 当且仅当 $\operatorname{Ker}U=\{\mathbf{0}\}$时, 映射 U 是一对一的.

$\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 上的一对一的线性映射 U: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 叫做 $\mathbf{X}$ 到$\mathbf{Y}$上的线性同构, 而空间 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 本身在此情形叫做线性同构的 (这个定义显然与 1.3 段中的一致).

向量空间 $\mathbf{X}$ 到标量域 K 内的线性映射 f 叫做线性泛函.

2.2. 迄今为止所有的叙述无论对实空间或复空间都是一样的. 但在以下我们要证明的 Hahn-Banach 定理以及后面讨论的算子理论, 对于复数情形却要求某些辅助的工具.

设 $\mathbf{X}$ 是任意的向量空间. 公式(1)与(2)把线性泛函的集合变为向量空间 $L(\mathbf{X}, K)$. 但是在复空间 $\mathbf{X}$ 的情形, 线性泛函 f 乘以复数 λ, 我们是用公式

$$(\lambda f)(x)=\bar{\lambda}f(x) \qquad (x\in\mathbf{X})^{*)} \tag{3}$$

来定义的.

如果 $\lambda\in\boldsymbol{R}$, 则我们得到公式(2). 容易看出, 在这样定义代数运算时, $L(\mathbf{X}, K)$ 是向量空间, 我们称它为 $\mathbf{X}$ 的代数共轭并记为 $\mathbf{X}^+$.

注. 在算子的情形而不是泛函时, 通常的公式(2)在复数情形仍保持.

设 $\mathbf{X}$ 是复向量空间. 如果我们仍象以前那样在 $\mathbf{X}$ 中定义加法运算, 而乘以标量的运算认为只在实标量情形有定义, 则我们得到与 $\mathbf{X}$ 相联系的实向量空间 $\mathbf{X}_R$. 在 $\mathbf{X}_R$ 上的线性泛函叫做在 $\mathbf{X}$ 上的实线性泛函.

设 f 是在 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函. 研究用下列方式在 $\mathbf{X}_R$ 上给定的泛函 φ:

$$\varphi(x)=\mathrm{Re}f(x) \qquad (x\in\mathbf{X}). \tag{4}$$

容易验证, φ 是实线性泛函. 事实上, 如果 $x_1, x_2\in\mathbf{X}$; $\lambda, \mu\in\boldsymbol{R}$, 则

$$\varphi(\lambda x_1+\mu x_2)=\mathrm{Re}f(\lambda x_1+\mu x_2)=\mathrm{Re}[\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)]$$
$$=\lambda\mathrm{Re}f(x_1)+\mu\mathrm{Re}f(x_2)=\lambda\varphi(x_1)+\mu\varphi(x_2).$$

---

*) 这里及以后 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数.

我们来证明，对于任何 $x\in\mathbf{X}$

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix),\tag{5}$$

其中 i 是虚数单位．事实上，$f(x)=\mathrm{Re}f(x)+i\mathrm{Im}f(x)=\mathrm{Re}f(x)-i\mathrm{Re}if(x)=\mathrm{Re}f(x)-i\mathrm{Re}f(ix)=\varphi(x)-i\varphi(ix)$.

于是，我们得到了对于 $\mathbf{X}$ 上的泛函 f 的表示式(5)．反之，如果 φ 是 $\mathbf{X}$ 上某个实线性泛函，则用公式(5)定义的 f 是$\mathbf{X}$上的线性泛函，并且关系式(4)成立(留给读者验证)．

2.3. 设 $\mathbf{X}$ 是向量空间，H 是 $\mathbf{X}$ 中的线性集，如果$H\neq\mathbf{X}$，且存在$x_0\in\mathbf{X}$ 使得 $\mathbf{X}=\mathscr{L}(H,\ x_0)$，则称 H 是超子空间．

引理 1. 设$\mathbf{X}$是向量空间，H是$\mathbf{X}$中的超子空间且 $x_1\in\mathbf{X}\setminus H$．则任何元素 $x\in\mathbf{X}$ 都可以表示为 $x=\lambda x_1+h$ 的形式，，其中 $\lambda\in K$，$h\in H$，并且这个表示式是唯一的．

证．根据超子空间的定义可以找到$x_0\in\mathbf{X}$，使得$\mathbf{X}=\mathscr{L}(H,x_0)$．于是，$x_1=\lambda_0x_0+\lambda_1h_1+\cdots+\lambda_nh_n$，其中 $h_i\in H(1\leqslant i\leqslant n)$．如果 $h_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ih_i$，则 $h_0\in H$及 $x_1=\lambda_0x_0+h_0$，并且$\lambda_0\neq0$(因为 $x_1\notin H$)．对于任意的 $x\in\mathbf{X}$可以找到 $\mu\in K$ 与 $h\in H$，使得

$$x=\mu x_0+h=\mu\frac{x_1-h_0}{\lambda_0}+h=\frac{\mu}{\lambda_0}x_1+\left(h-\frac{\mu}{\lambda_0}h_0\right).$$

因为 $h-(\mu/\lambda_0)h_0\in H$，所以这就是所求的表示式．现在来证明这个表示式是唯一的．设 $x=\lambda x_1+h=\mu x_1+g(h,\ g\in H)$．则 $(\lambda-\mu)x_1=g-h\in H$，但 $x_1\notin H$，因此 $\lambda=\mu$，从而 $h=g$．

由引理 1 推出，如果线性集 $\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 包含 H，则 $\mathbf{X}_0=H$ 或$\mathbf{X}$．

设 $x\in\mathbf{X}$ 且 H 是超子空间，则 $x+H$ 叫做向量空间 $\mathbf{X}$ 中的超平面．下面的定理指出，超平面与线性泛函有密切联系．

定理 1. 设 f 是在向量空间$\mathbf{X}$上不恒等于零的线性泛函，则

1) $H=f^{-1}(0)$是超子空间；

2）对于任何 $\lambda\in\mathbf{K}$ 有 $f^{-1}(\lambda)=x_\lambda+H$，其中 $f(x_\lambda)=\lambda$.

证. 1）取 $x_0\in\mathbf{X}$ 使得 $f(x_0)=\lambda_0\neq0$. 对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 有

$$x=\frac{f(x)}{\lambda_0}x_0+\left(x-\frac{f(x)}{\lambda_0}x_0\right).$$

于是元素 $h=x-\frac{f(x)}{\lambda_0}x_0\in H$. 事实上，$f(h)=f(x)-\frac{f(x)}{\lambda_0}f(x_0)=0$，因此 $h\in H$ 且 $x=\frac{f(x)}{\lambda_0}x_0+h$，即 H 是超子空间.

2）如果 $x_\lambda=\frac{\lambda}{\lambda_0}x_0$，则 $f(x_\lambda)=\lambda$，即这样的 x_λ 存在. 设 x_λ 是任意的满足 $f(x_\lambda)=\lambda$ 的元素. 如果 $y\in f^{-1}(\lambda)$，则 $f(y)=\lambda$ 且 $y=x_\lambda+(y-x_\lambda)$. 显然，$y-x_\lambda\in H$，由此 $y\in x_\lambda+H$. 反之，如果 $z\in x_\lambda+H$，则 $z=x_\lambda+h$ $(h\in H)$，由此 $f(z)=\lambda$，$z\in f^{-1}(\lambda)$. 所以，$f^{-1}(\lambda)=x_\lambda+H$.

定理 2. 设 H 是向量空间 $\mathbf{X}$ 中的超子空间，$x_0\notin H$，$\lambda\neq0$. 则在 $\mathbf{X}$ 上存在唯一的线性泛函 f，使得

1）$f^{-1}(0)=H$;

2）$f(x_0)=\lambda$.

证. 因为 H 是超子空间，所以由引理 1 对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 都有形式为 $x=\mu x_0+h$ $(h\in H)$ 的唯一的表示式. 令 $f(x)=\mu\lambda$. 我们来验证 f 是线性泛函. 如果 $y=\mu' x_0+h'$ $(h'\in H)$，则 $x+y=(\mu+\mu')x_0+(h+h')$，由此 $f(x+y)=(\mu+\mu')\lambda=f(x)+f(y)$. 如果 $\alpha\in\mathbf{K}$，则 $\alpha x=\alpha\mu x_0+\alpha h$，由此 $f(\alpha x)=\alpha\mu\lambda=\alpha f(x)$.

因为 $x_0=1\cdot x_0+0$，所以 $f(x_0)=\lambda$. 对于 $x\in H$ 有 $x=0\cdot x_0+x$，由此 $f(x)=0$，从而 $f^{-1}(0)\supset H$. 因为 $\lambda\neq0$，所以在 $\mathbf{X}$ 上 $f\neq0$. 于是根据定理 1 $f^{-1}(0)$ 是超子空间. 因此由引理 1 证明后的注推出 $f^{-1}(0)=H$.

我们来证明泛函 f 的唯一性. 设线性泛函 g 满足 1)，2). 对

于任何 $x=\mu x_0+h\ (h\in H)$ 有

$$g(x)=g(\mu x_0+h)=\mu g(x_0)+g(h)=\mu\lambda=f(x).$$

推论. 如果 f 与 g 是向量空间 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函且 $f^{-1}(0)=g^{-1}(0)$, 则可以找到 $\alpha\in\boldsymbol{K}$ 使得 $g=\alpha f$.

证. 如果 $f^{-1}(0)=g^{-1}(0)=\mathbf{X}$, 则 $f=g\equiv 0$. 设 $f^{-1}(0)=g^{-1}(0)=H$ 是超子空间. 取 $x_0\notin H$. 于是 $f(x_0)=\lambda\neq 0, g(x_0)=\mu\neq 0$. 如果 $\alpha=\mu/\lambda$, 则 $g^{-1}(0)=H$, $(\alpha f)^{-1}(0)=H$, $g(x_0)=\mu$, $(\alpha f)(x_0)=\mu$. 由于定理 2 中所述的唯一性得到 $g=\alpha f$.

定理 1, 2 与定理 2 的推论可以合并为下列命题.

定理 3. 子集 $M\subset\mathbf{X}$ 是超平面的充要条件为对于某个 $\lambda\in\boldsymbol{K}$ 和某个在 $\mathbf{X}$ 上的非零线性泛函 f 有 $M=\{x\in\mathbf{X}:\ f(x)=\lambda\}$. 并且 f 与 λ 确定 H 精确到公因子 μ, $\mu\in\mathbf{K}$, $\mu\neq 0$.

最后建立实数情形与复数情形之间的联系.

设 $\mathbf{X}$ 是复向量空间, $\mathbf{X}_R$ 是与 $\mathbf{X}$ 相联系的实数向量空间. 在 $\mathbf{X}$ 中的实超平面是 $\mathbf{X}_R$ 中的超平面. 容易看出, 超平面 M 是实超平面的充要条件为 $M=\{x\in\mathbf{X}:\ f(x)=\lambda\}$, 其中 $\lambda\in\boldsymbol{R}$, f 是 $\mathbf{X}$ 上的实线性泛函.

引理 2. 设 $\mathbf{X}$ 是复向量空间. 如果 M 是 $\mathbf{X}$ 中的实超子空间, 则 $M\cap(iM)$ 是 $\mathbf{X}$ 中的超子空间. $\mathbf{X}$ 中的任何超平面是两个单值确定的实超平面之交.

证. 如果 M 是实超子空间, 则 $M=\{x:\ g(x)=0\}$, 其中 g 是实线性泛函. 对于 $f(x)=g(x)-ig(ix)$ 有 $M\cap(iM)=\{x:\ f(x)=0\}$, 因此 $M\cap(iM)$ 是超子空间.

如果 H 是超平面, 则 $H=\{x:\ f(x)=\lambda+i\mu\}$, 其中 $\lambda, \mu\in\boldsymbol{R}$, f 是线性泛函. 如果 $g(x)=\mathrm{Re}f(x)$, 则 $H=\{x:g(x)=\lambda\}\cap\{x:g(ix)=-\mu\}$.

§ 3. 凸集与半范数

3.1. 设$\mathbf{X}$是向量空间. 集合 $E\subset\mathbf{X}$ 叫做凸的, 如果对于任何一对 x, $y\in E$, 所有形为 $\lambda x+(1-\lambda)y$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$的元素也属于 E. 这个概念在平面情形的几何意义是, 与任何两点 $x, y\in E$ 一起, 集合E包含整个连接 x 与 y 的线段$\{\lambda x+(1-\lambda)y:\ 0\leqslant\lambda\leqslant1\}$. 集$E\subset\mathbf{X}$ 叫做平衡的, 如果对于任何 $x\in E$ 及 $\lambda\in\mathbf{K}$, $|\lambda|\leqslant1$, 有 $\lambda x\in E$. 集$E\subset\mathbf{X}$ 叫做绝对凸的, 如果对于任何一对 x, $y\in E$ 及任意的 λ, $\mu\in\mathbf{K}$, $|\lambda|+|\mu|\leqslant1$, 有 $\lambda x+\mu y\in E$.

由上述定义, 我们给出几个简单的推论.

a) 集E是绝对凸集的充要条件为它同时是凸的和平衡的.

事实上, 绝对凸集显然是凸的和平衡的. 反之, 设E是凸平衡集, 又设 $x, y\in E$ 及 $|\lambda|+|\mu|\leqslant1$. 如果 $\lambda=0$ 或 $\mu=0$, 则显然$\lambda x+\mu y\in E$. 如果 $\lambda\neq0$ 与 $\mu\neq0$, 则

$$\frac{\lambda}{|\lambda|}x\in E,\quad \frac{\mu}{|\mu|}y\in E \quad 且 \quad \frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}+\frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}=1.$$

所以,

$$\lambda x+\mu y$$
$$=(|\lambda|+|\mu|)\left(\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}\,\frac{\lambda x}{|\lambda|}+\frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}\,\frac{\mu y}{|\mu|}\right)\in E.$$

b) 如果 E_1, E_2 是$\mathbf{X}$的凸子集, $\lambda\in\mathbf{K}$, 则集合 E_1+E_2 及 λE_1 也是凸的. 如果以绝对凸代替凸, 这个命题同样成立.

c) 如果E是非空绝对凸集, 则 $0\in E$, 再如果$|\lambda|\leqslant|\mu|$, 则 $\lambda E\subset\mu E$.

命题 b)与 c)的证明很简单, 留给读者自己完成.

如果E是$\mathbf{X}$中任意的非空子集, 则所有可能的有限线性组合 $\Sigma\lambda_i x_i$ 构成的集叫做集E 的凸包并记作co(E),其中 $\lambda_i\geqslant0$, $\Sigma\lambda_i=1$ 且一切的 $x_i\in E$. 显然, co(E)是包含E的最小凸集. 所有可能的

有限线性组合 $\Sigma\lambda_i x_i$，其中 $\Sigma|\lambda_i|\leqslant 1$ 且一切的 $x_i\in E$，构成的集叫做集 E 的绝对凸包并记作 abs co(E)．显然，abs co(E)是包含 E 的最小绝对凸集．

向量空间 $\mathbf{X}$ 的子集 E 叫做吸收的，如果对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 存在这样的 $\lambda>0$，使得对于所有的 μ，$|\mu|\geqslant\lambda$，有 $x\in\mu E$．这个性质的几何意义表示，由从零点发出的任一射线上，有一以零点为一端的线段完全包含在 E 中．由c)，如果 E 是绝对凸的，则它是吸收集的充要条件为，对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 存在这样的 $\lambda>0$，使得 $x\in\lambda E$，即 $\mathbf{X}=\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda E$，甚至(又由于 c)) $\mathbf{X}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}nE$．

3.2. 设 $\mathbf{X}$ 是向量空间，p 是定义在 $\mathbf{X}$ 上的实函数．如果对于任何一对元素 $x_1, x_2\in\mathbf{X}$

$$p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2),$$

则称 p 是次可加的；如果对于 $\lambda\geqslant 0$

$$p(\lambda x)=\lambda p(x),$$

则称 p 是正齐次的；如果对于任何 λ

$$p(\lambda x)=|\lambda|p(x),$$

则称 p 是齐次的．

次可加正齐次函数叫做度规函数．齐次度规函数 p 叫做半范数．下面给出这些函数的几个性质．

a) 对于任何度规函数 p，$p(\mathbf{0})=0$．

b) 如果 p 是半范数，则对于任何 $x\in\mathbf{X}$，$p(x)\geqslant 0$．

这可由下列关系式推出：

$$0=p(\mathbf{0})=p(x+(-x))\leqslant p(x)+p(-x)=2p(x).$$

c) 如果 p 是半范数，则

$$|p(x)-p(y)|\leqslant p(x-y).$$

事实上，由于 p 的次可加性有 $p(x)=p(x-y+y)\leqslant p(x-y)+p(y)$. 改变 x 与 y 的位置并利用 $p(x-y)=p(y-x)$, 即得证明.

c′) 如果 p 是度规函数，则类似地可得 $|p(x)-p(y)|\leqslant \max(p(x-y), p(y-x))$.

由于 a), 对于任何半范数 $p(\mathbf{0})=0$, 但可能发生对于 $x\neq\mathbf{0}$ 有 $p(x)=0$. 由 $p(x)=0$ 可以推出 $x=\mathbf{0}$ 的半范数叫做范数.

下面的引理叙述了上面引进的这些函数类与凸集之间的关系.

引理 1. 1) 设 p 是非负度规函数. 则对于任何 $\lambda>0$, 集 $\{x: p(x)<\lambda\}$ 与 $\{x: p(x)\leqslant\lambda\}$ 是凸的和吸收的. 如果 p 是半范数, 则这些集合是绝对凸的.

2) 对应于每一个凸吸收集 $U\subset\mathbf{X}$ 可以用下列公式定义一个非负度规函数 p_U:

$$p_U(x)=\inf\{\lambda: \lambda>0, x\in\lambda U\},$$

这个函数叫做(集 U 上的) Minkowski 泛函, 并且

$$\{x: p_U(x)<1\}\subset U\subset\{x: p_U(x)\leqslant 1\}. \tag{1}$$

此外, 如果 U 是绝对凸的, 则 p_U 是半范数.

证. 1) 我们只证明集 $E_\lambda=\{x: p(x)<\lambda\}$ 是吸收的, 其余的命题留给读者自行验证. 如果 $m=\max(p(x), p(-x))$, 则当 $|\mu|\geqslant(m+1)/\lambda$ 时有

$$\begin{aligned} p(x/\mu)&=(1/|\mu|)p(\operatorname{sign}\mu\cdot x)\\ &\leqslant(\lambda/(m+1))p(\operatorname{sign}\mu\cdot x)<\lambda^{*)}, \end{aligned}$$

由此 $x\in\mu E_\lambda$. 所以, E_λ 是吸收集.

2) 因为集 U 是吸收集, 所以 $p_U(x)<+\infty$. 显然, $p_U(\mathbf{0})=0$.

---

*) 如果 $\mu\in\mathbf{C}$, 则 $\operatorname{sign}\mu=\begin{cases}|\mu|/\mu, & \text{如果 } \mu\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } \mu=0,\end{cases}$

于是在验证正齐次性时可以认为 $\lambda>0$. 利用 $\lambda x\in\mu U$ 的充要条件为 $x\in(\mu/\lambda)U$, 得到

$$\begin{aligned}p_U(\lambda x)&=\inf\{\mu>0:\ \lambda x\in\mu U\}\\&=\lambda\inf\{(\mu/\lambda):\ \mu>0, x\in(\mu/\lambda)U\}\\&=\lambda p_U(x).\end{aligned}$$

如果 U 是绝对凸的, 则由于 U 的平衡性, $\lambda x\in\mu U$ 的充要条件为 $x\in(\mu/|\lambda|)U$, 由此

$$\begin{aligned}p_U(\lambda x)&=\inf\{\mu>0:\lambda x\in\mu U\}\\&=|\lambda|\inf\{(\mu/|\lambda|):\mu>0,x\in(\mu/|\lambda|)U\}=|\lambda|p_U(x).\end{aligned}$$

现在来验证 p_U 的次可加性. 设 $x, y\in\mathbf{X}$; $\varepsilon>0$. 可以找到 λ, $\mu>0$, 使得

$$p_U(x)<\lambda<p_U(x)+\varepsilon,\quad p_U(y)<\mu<p_U(y)+\varepsilon.$$

由此 x/λ, $y/\mu\in U$. 根据集合 U 的凸性

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu}\in U,$$

因此

$$p_U(x+y)\leqslant\lambda+\mu<p_U(x)+p_U(y)+2\varepsilon.$$

所以, 由于 ε 的任意性, 得 $p_U(x+y)\leqslant p_U(x)+p_U(y)$. (1)式显然成立. 引理 1 完全证毕.

§4. Hahn-Banach 定理

4.1. 在这一节中, 我们叙述关于连续泛函延拓*) 的所谓 Hahn-Banach 定理的解析形式. 在拓扑向量空间与赋范空间以及它们的应用中经常要用到这个定理.

定理 1 (Hahn-Banach 定理的解析形式). 设在实向量空间

*) 注意, 如果 $\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 且 f_0 是 $\mathbf{X}_0$ 上的某个函数, f 是定义在 $\mathbf{X}$ 上的函数且对任何 $x\in\mathbf{X}_0$ 有 $f_0(x)=f(x)$, 则称 f 是 f_0 的延拓(或扩张).

X中给定了度规函数 p.

设 f_0 是在线性集 $\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 上给定的线性泛函，并满足条件

$$f_0(x)\leqslant p(x) \qquad (x\in\mathbf{X}_0). \tag{1}$$

于是存在定义在整个 X 上的线性泛函 f，在 $\mathbf{X}_0$ 上与 f_0 重合且在X上满足条件

$$f(x)\leqslant p(x) \qquad (x\in\mathbf{X}). \tag{2}$$

证. 我们利用Zorn引理来证明所求泛函 f 的存在性. 为此，我们考察由所有的对(L, g)组成的集合$\mathfrak{M}$，满足下列条件:

1) L 是X中的线性集，$L\supset\mathbf{X}_0$;

2) g 是在 L 上给定的线性泛函，它是 f_0 的延拓;

3) 对于任何 $x\in L$, $g(x)\leqslant p(x)$.

集合$\mathfrak{M}$非空，因为 $(\mathbf{X}_0, f_0)\in\mathfrak{M}$. 在$\mathfrak{M}$中引进序，如果 $L_2\supset L_1$ 且 g_2 是 g_1 的延拓，则认为$(L_1, g_1)\leqslant(L_2, g_2)$.

我们来证明有序集$\mathfrak{M}$满足Zorn引理的条件，从而在$\mathfrak{M}$中存在极大元. 设$\mathfrak{M}_0$是$\mathfrak{M}$中的全序子集，$L_0=\bigcup\{L:(L, g)\in\mathfrak{M}_0\}$. 我们证明 L_0 是线性集. 如果 $x, y\in L_0$，则由 L_0 的定义可以找到集合 L_1, L_2 使得 $x\in L_1, y\in L_2$ 且(L_1, g_1), $(L_2, g_2)\in\mathfrak{M}_0$. 因为集$\mathfrak{M}_0$是全序集，所以元素 (L_1, g_1)与(L_2, g_2)可以比较. 为确定起见设$(L_1, g_1)\geqslant(L_2, g_2)$. 于是 $L_1\supset L_2$，从而 $x, y\in L_1$，因此对于任何 λ, $\mu\in R$ 有 $\lambda x+\mu y\in L_1\subset L_0$. 任何元素 $x\in L_0$ 落在某个集合 L 中，使得 $(L, g)\in\mathfrak{M}_0$. 令 $g_0(x)=g(x)$. 这样 $g_0(x)$对于所有的 $x\in L_0$ 有定义，类似上面所述推得，这个定义是适当的且 g_0 是 L_0上的线性泛函. 显然，$(L_0, g_0)\in\mathfrak{M}_0$ 且(L_0, g_0)是集$\mathfrak{M}_0$的上界. 根据Zorn引理在$\mathfrak{M}$中存在极大元 $(L_{\max}, f_{\max})\in\mathfrak{M}$. 如果我们证明 $L_{\max}=\mathbf{X}$，则泛函 $f_{\max}$ 显然就是所要求的.

假设不然的话，即 $L_{\max}\neq\mathbf{X}$. 如果我们证明，对于任意的$(L, g)\in\mathfrak{M}$，对于某个 $x_0\notin L$，存在$(L_1, g_1)\in\mathfrak{M}$，其中 L_1 是集 L 与元素x_0

的线性包，则显然导致与 L_{max} 是极大元相矛盾，从而定理证完. 所以，可以认为 $\mathbf{X}$ 是集 $\mathbf{X}_0$ 的初等扩张，即认为每一个元素可以表示为

$$x=\lambda x_0+x' \qquad (x'\in\mathbf{X}_0) \tag{3}$$

的形式.

如果 $x', x''\in\mathbf{X}_0$, 则利用(1)求得

$$\begin{aligned} f_0(x')+f_0(x'') &= f_0(x'+x'') \\ &\leqslant p((x_0+x')+(-x_0+x'')) \\ &\leqslant p(x_0+x')+p(-x_0+x''), \end{aligned}$$

由此

$$f_0(x'')-p(-x_0+x'')\leqslant -f_0(x')+p(x_0+x'),$$

于是，因为这里的 x' 和 x'' 是任意的，所以

$$\begin{aligned} A &= \sup_{x''\in\mathbf{X}_0}[f_0(x'')-p(-x_0+x'')] \\ &\leqslant \inf_{x'\in\mathbf{X}_0}[-f_0(x')+p(x_0+x')]=B. \end{aligned}$$

设 $A\leqslant t_0\leqslant B$. $\mathbf{X}$ 上的泛函 f 由下式

$$f(x)=\lambda t_0+f_0(x') \qquad (x=\lambda x_0+x', x'\in\mathbf{X}_0)$$

来定义.

显然，f 是可加齐次泛函，并且 f 是 f_0 的延拓. 我们来证明(2)式成立. 可以认为在表示式(3)中 $\lambda\neq 0$. 设 $\lambda>0$. 则

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda t_0+f_0(x')\leqslant\lambda B+f_0(x') \\ &\leqslant\lambda\left[-f_0\left(\frac{x'}{\lambda}\right)+p\left(x_0+\frac{x'}{\lambda}\right)\right]+f_0(x') \\ &= -f_0(x')+p(\lambda x_0+x')+f_0(x')=p(x). \end{aligned}$$

对于 $\lambda<0$ 的情形也一样证明(这时利用不等式 $t_0\geqslant A$). 定理证毕.

推论. 如果泛函 p 满足定理的条件，则存在给定在 $\mathbf{X}$ 上的可加齐次泛函 f, 使得

$$f(x)\leqslant p(x),\qquad x\in\mathbf{X}. \tag{4}$$

为了证实这个命题正确，只要在集 $\mathbf{X}_0=\{\mathbf{0}\}$ 上研究泛函 f_0 ($f_0(\mathbf{0})=0$)，然后再对它应用定理.

我们指出，f 满足关系式

$$-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x). \tag{5}$$

事实上，由(4)得

$$f(x)=-f(-x)\geqslant -p(-x).$$

初等扩张的构造利用了泛函 f 的实数性. 但是对于复空间，Hahn-Banach 定理也成立，虽然有些比较不那么一般的形式.

定理 2. 设 p 是任意的向量空间 $\mathbf{X}$ 中的半范数. 设 f_0 是给定在线性集 $\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 上的线性泛函，并满足条件

$$|f_0(x)|\leqslant p(x)\qquad (x\in\mathbf{X}_0). \tag{6}$$

则存在定义在整个 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函 f，它在 $\mathbf{X}_0$ 上与 f_0 重合且在 $\mathbf{X}$ 上满足条件

$$|f(x)|\leqslant p(x)\qquad (x\in\mathbf{X}). \tag{7}$$

证. 如果 $\mathbf{X}$ 是实向量空间，则从定理 1 的推论及不等式(5)推出定理成立.

设 $\mathbf{X}$ 是复向量空间. 如果 $\mathbf{X}_R$ 是与 $\mathbf{X}$ 相联系的实向量空间，则 $(\mathbf{X}_0)_R$ 是 $\mathbf{X}_R$ 中的线性集合. 令 $\varphi_0(x)=\mathrm{Re}f_0(x)\,(x\in\mathbf{X}_0)$，我们得到在 $(\mathbf{X}_0)_R$ 上的实线性泛函 φ_0，并且，由于 § 2 的公式(5)，对于任何 $x\in\mathbf{X}_0$ 有

$$f_0(x)=\varphi_0(x)-i\varphi_0(ix). \tag{8}$$

由(6)式对于 $x\in\mathbf{X}_0$ 有 $|\varphi_0(x)|=|\mathrm{Re}f_0(x)|\leqslant|f_0(x)|\leqslant p(x)$. 已经证明，存在 $\mathbf{X}$ 上的实泛函 φ，它是 φ_0 的延拓，使得

$$|\varphi(x)|\leqslant p(x)\qquad (x\in\mathbf{X}). \tag{9}$$

对任何 $x\in\mathbf{X}$，令 $f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)$. 在 § 2 中已经指出，$f$ 是 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函，并且 $\mathrm{Re}f(x)=\varphi(x)$ $(x\in\mathbf{X})$. 因此由(8)式

得知 f 是 f_0 的延拓. 余下验证不等式(7).

对于任何 $x\in\mathbf{X}$, 可以找到 $\theta\in\boldsymbol{R}$, 使得

$$e^{i\theta}f(x)=|f(x)|\geqslant 0.$$

所以, $f(e^{i\theta}x)=e^{i\theta}f(x)$是实的, 由此 $f(e^{i\theta}x)=\varphi(e^{i\theta}x)$. 现在由(9)式得

$$\begin{aligned}|f(x)|&=e^{i\theta}f(x)=f(e^{i\theta}x)=\varphi(e^{i\theta}x)\\&\leqslant p(e^{i\theta}x)=|e^{i\theta}|p(x)=p(x).\end{aligned}$$

即(7)式得证.

4.2. 定理 1 在积分论与测度论中有很精彩的应用*).

我们提出下列问题: 对于每一个有界的周期实函数$x(t)$(周期为 1), 构造在区间[0, 1]上的"积分" $\int_0^1 x(t)dt$, 使其满足条件:

1) $\int_0^1[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]dt=\alpha\int_0^1 x_1(t)dt+\beta\int_0^1 x_2(t)dt\quad(\alpha,\beta\in\boldsymbol{R})$;

2) 如果在[0, 1]上 $x(t)\geqslant 0$, 则 $\int_0^1 x(t)dt\geqslant 0$;

3) $\int_0^1 x(t+t_0)dt=\int_0^1 x(t)dt$ (t_0 是任意实数);

4) $\int_0^1 x(1-t)dt=\int_0^1 x(t)dt$;

5) 如果 $x_0(t)\equiv 1$, 则$\int_0^1 x_0(t)dt=1$.

定理 3. 上面提出的问题至少有一个解.

证. 以$\mathbf{M}$表示所有有界周期函数(周期为 1) 组成的集合. 显然, $\mathbf{M}$是向量空间.

设 $x\in\mathbf{M}$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是任意的一组实数. 记

$$\pi(x;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sup_{-\infty<t<\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(t+\alpha_k)$$

且令

$$p(x)=\inf\ \pi(x;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

*) 参看Banach.

其中下确界是对所有可能的有限数组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 来取的. 我们证明 p 满足定理 1 的条件. 显然, 只需要证明 p 的次可加性.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是这样的两组数, 使得 $\pi(x_1; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) < p(x_1) + \varepsilon$ 及 $\pi(x_2; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) < p(x_2) + \varepsilon$. 记 $\gamma_{j,k} = \alpha_j + \beta_k$. 于是, 一方面,

$$p(x_1 + x_2) \leqslant \pi(x_1 + x_2; \ \gamma_{1,1}, \ \gamma_{1,2}, \ \cdots, \ \gamma_{m,n}). \tag{10}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
&\pi(x_1 + x_2; \ \gamma_{1,1}, \ \gamma_{1,2}, \ \cdots, \ \gamma_{m,n}) \\
&\quad = \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} [x_1(t + \gamma_{j,k}) + x_2(t + \gamma_{j,k})] \\
&\quad \leqslant \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} x_1(t + \gamma_{j,k}) + \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} x_2(t + \gamma_{j,k}) \\
&\quad \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_1(t + \beta_k + \alpha_j) + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \sup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_2(t + \alpha_j + \beta_k) \\
&\quad = \pi(x_1; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) + \pi(x_2; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \\
&\quad < p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

把它与(10)式相对照并考虑到 ε 的任意性, 得

$$p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2).$$

设 f 是泛函, 它的存在性由定理 1 的推论来保证. 如果 $x(t) \geqslant 0$, 则 $p(x) \geqslant 0$, $p(-x) \leqslant 0$, 由此根据(5)就有 $f(x) \geqslant 0$. 其次, 如果令 $x'(t) = x(t + t_0) - x(t)$, 则取 $\alpha_k = (k-1)t_0 \ (k = 1, 2, \cdots, n+1)$, 得

$$\begin{aligned}
p(x') &\leqslant \pi(x'; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} \sup_{-\infty < t < \infty} [x(t + (n+1)t_0) - x(t)] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.
\end{aligned}$$

于是, $p(x') \leqslant 0$, 并且同样可证 $p(-x') \leqslant 0$. 由此, 再根据(5), $f(x') = 0$.

最后, 如果 $x_0(t) \equiv 1$, 则显然 $p(x_0) = 1$; $p(-x_0) = -1$. 所以 $f(x_0) = 1$.

为了完成定理的证明只要令

$$\int_0^1 x(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(x) + f(\tilde{x})] \qquad (\tilde{x}(t) = x(1-t)). \tag{11}$$

注. 不难证明, 当 Riemann 积分存在时, 上面构造的积分与 Riemann 积分总是相同的. 对于 Lebesgue 积分, 一般来说还不能这样讲. 但是泛函 f 可以这样选取, 使得对于所有可测函数, 积分(11)与 Lebesgue 积分相同.

利用广义积分(11)，可对区间 $E_0=[0,\ 1]$中的集合构造广义测度. 即下面的定理成立.

定理 4. 对于每一个集合 $e\subset E_0=[0,1]$, 都有数 $\mu(e)$——集合 e 的测度——与之相对应, 并满足下列条件:

1) 如果 $e_1\cap e_2=\varnothing$, 则 $\mu(e_1\cup e_2)=\mu(e_1)+\mu(e_2)$;

2) $\mu(e)\geqslant 0$;

3) 如果 e_1 和 e_2 同余, 则 $\mu(e_1)=\mu(e_2)$;

4) $\mu(E_0)=1$.

证. 设 $\chi_e(t)$是集 $e\subset E_0$ 的特征函数. 如果令

$$\mu(e)=\int_0^1\chi_e(t)\,dt,$$

则由广义积分的性质不难得到性质 1)—4).

注. 对于正方形$[0,1;\ 0,1]$ 的一切子集也可以定义满足条件 1)—4)的广义测度. 但是, 应该指出, 这个问题对于三维的立方体来说, 已经没有解了*).

4.3. 类似于广义积分, 可以对于任何有界序列定义广义极限.

我们研究由有界实序列组成的向量空间 l^∞. 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$. 记

$$\pi(x;n_1,n_2,\cdots,n_k)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\xi_{n+n_j},$$

$$p(x)=\inf\pi(x;n_1,n_2,\cdots,n_k),$$

其中下确界是对所有可能的自然数组 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 来取的.

与定理 3 的证明一样, 可以确定 p 是次可加与正齐次的泛函. 所以存在满足条件(5)的线性泛函. 如果令

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\xi_n=f(x),$$

则和证明定理 3 时一样讨论, 可以证明这个泛函具有下列性质:

1) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}[\alpha\xi_n'+\beta\xi_n'']=\alpha\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\xi_n'+\beta\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\xi_n''$;

2) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\xi_n\geqslant 0$, 如果 $\xi_n\geqslant 0\quad(n=1,2,\cdots)$;

3) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\xi_{n+1}=\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\xi_n$;

4) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\xi_n^{(0)}=1$, 如果 $\xi_n^{(0)}=1\quad(n=1,2,\cdots)$;

---

*) 证明参看 Натансон 著《实变函数论》.

5) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n \leqslant \operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty}\xi_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}\xi_n$.

由最后一个关系式可以断定，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$ 存在，则应有 $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty}\xi_n=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$. 此外，注意到数 $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty}\xi_n$ 的其余四个性质，自然就把这个数叫做序列$\{\xi_n\}$的广义极限(Banach 极限).

第三章　拓扑向量空间

在研究具体的向量空间时，大多数已经在其中具有某种"自然的"收敛，这种收敛确定了 $\mathbf{X}$ 中的拓扑．并且，这个拓扑与代数运算以合理的方式协调．本书首先对可以用范数给定的拓扑有兴趣，即 $\mathbf{X}$ 是赋范空间．然而我们从研究更一般的拓扑向量空间开始．这样做的理由是：一方面，赋范空间中的许多问题，已经在这一般的阶段自然地解决了；另一方面，赋范空间的研究本身需要引进所谓弱拓扑，而这在无限维情形是不能赋范的．下面只是遵循上面所讲的目的来叙述拓扑向量空间初等理论的导引，因此不追求完备和全面(我们甚至不讲到一些重要概念，如桶形空间、吸囿空间、核空间)．拓扑向量空间理论的详细叙述，可参见：Bourbaki-III; Dunford 与 Schwartz-I; Yosida; A. Robertson 与 W. Robertson; M. Schäffer; Edwards.

§1. 一 般 定 义

1.1. 设 $\mathbf{X}$ 是向量空间，同时也是拓扑空间．如果集合 $\mathbf{X}$ 中代数运算按其中拓扑连续，则称 $\mathbf{X}$ 是拓扑向量空间，即 $\mathbf{X}$ 具有下列性质：

1) 对于每一对元素 x, $y\in\mathbf{X}$ 及元素 $x+y$ 的邻域 V_{x+y}，可以找到元素 x 的邻域 V_x及 元素 y 的邻域 V_y，使得

$$V_x+V_y\subset V_{x+y};$$

2) 对于任何元素 $x\in\mathbf{X}$、数 λ 及元素 λx 的邻域 $V_{\lambda x}$，可以找到元素 x 的邻域 V_x 及数 $\delta>0$，使得对于任意 μ，只要 $|\mu-\lambda|<\delta$ 时，

有

$$\mu V_x \subset V_{\lambda x}.$$

不难看出，如果把拓扑向量空间 **X** 中的拓扑与代数运算诱导到其中的线性子集上，所得到的也是个拓扑向量空间，这个拓扑向量空间叫做拓扑向量空间 **X** 的子空间.

从拓扑向量空间的定义可以得到几个简单的推论.

I. 如果 $G\subset \mathbf{X}$ 是开集，则 x_0+G 也是开集.

事实上，设 $x\in x_0+G$，于是 $x=x_0+x'$，其中 $x'\in G$. 设 $V_{x'}$ 是包含在 G 中的点 x' 的邻域，因为 $x'=x+(-x_0)$，根据条件 1) 可以求出点 x 的邻域 V_x 及点 $(-x_0)$ 的邻域 V_{-x_0}，使得 $V_x+V_{-x_0}\subset V_{x'}$，因为 $-x_0\in V_{-x_0}$，所以 $-x_0+V_x\subset V_{x'}\subset G$，因而 $V_x\subset x_0+G$，即 x 是集 x_0+G 的内点.

类似地可证:

II. 如果 G 是开集，且 $\lambda\neq 0$，则 λG 也是开集.

类似的命题对于闭集也成立.

由命题 I 得到:

III. 点 x 的每一个邻域具有形式 $x+V$，其中 V 是空间 **X** 中零元素的邻域. 同时，如果 V 取遍零的基本邻域系，则 $x+V$ 取遍点 x 的基本邻域系.

这个命题使我们能够限于只须考察零元素的邻域.

定理 1. 存在拓扑向量空间 **X** 的零元素的基本邻域系 $\mathfrak{B}$，具有下列性质:

(1) 对于任意的 $V_1, V_2\in\mathfrak{B}$，存在 $V_3\in\mathfrak{B}$，使得 $V_3\subset V_1\cap V_2$;

(2) 每一个 $V\in\mathfrak{B}$ 是平衡集;

(3) 每一个 $V\in\mathfrak{B}$ 是吸收集;

(4) 对于任何 $V\in\mathfrak{B}$，存在 $U\in\mathfrak{B}$，使得 $U+U\subset V$.

反之，如果 **X** 是线性集，其中引进了满足条件 1)—4) 的子

集族 $\mathfrak{B}$, 则对于 $x\in\mathbf{X}$, 把形式为 $x+V(V\in\mathfrak{B})$ 的集合作为 x 的邻域, 就使X成为拓扑向量空间, 其中族 $\mathfrak{B}$ 是零元素的基本邻域系.

证. 如果 $\mathfrak{B}$ 是拓扑向量空间 **X** 零元素的基本邻域系, 则条件 1) 显然成立. 因为 $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, 所以条件 4) 也成立. 我们来证明任何零邻域 V 是吸收集.

事实上, 因为 $0\cdot x=\mathbf{0}$, 根据拓扑向量空间的定义可以求出点 x 的邻域 V_x 及数 $\delta>0$, 使得当 $|\lambda|\leqslant\delta$ 时 $\lambda V_x\subset V$, 特别当 $\left|\frac{1}{\lambda}\right|\geqslant\frac{1}{\delta}$ 时 $x\in\frac{1}{\lambda}V$.

为了完成定理第一部分的证明, 只需证实平衡邻域组成零元素的基本邻域系. 设 V 是任意的零邻域, 由于 $0\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$, 可以找到零邻域 V_1 及数 $\delta>0$, 使得当 $|\lambda|\leqslant\delta$ 时 $\lambda V_1\subset V$. 记 $V_0=\bigcup\limits_{|\lambda|\leqslant\delta}\lambda V_1$. 因为 $V_0\supset\delta V_1$, 而根据性质 II 知, δV_1 是零邻域, 所以集 V_0 也是零邻域. 如果 $|\alpha|\leqslant 1$, 则 $\alpha V_0=\bigcup\limits_{|\lambda|\leqslant\delta}\alpha\lambda V_1\subset V_0$, 且 V_0 是平衡邻域. 最后指出, $V_0\subset V$.

现在来证明定理的第二部分.

首先来验证, 用定理所述方法定义集 **X** 中的邻域使 **X** 成为一个拓扑空间(参见定理 I. 2. 1).

1) 点 x 的每一个邻域包含点 x. 事实上, 任何集合 $V\in\mathfrak{B}$ 是平衡的, 它包含零元素, 所以 $x\in x+V$.

2) 点 x 的两个邻域的交包含了这同一个点的第三个邻域. 这可从定理的条件 1) 立即推出.

3) 对于点 x 的任一个邻域 V_x, 存在这同一个点的一个邻域 V'_x, 使得 V_x 包含了任一点 $y\in V'_x$ 的邻域. 我们只研究 $x=\mathbf{0}$ 的情形. 设 $V\in\mathfrak{B}$ 是任意的零邻域, 而 $U\in\mathfrak{B}$ 是由定理的条件 4) 保证其

存在的一个零邻域. 可以取 $V_0'=U$. 事实上,如果 $y\in U$, 则 $y+U$ 是点 y 的邻域,且 $y+U\subset U+U\subset V$.

于是, $\mathbf{X}$ 是拓扑空间. 我们来验证在 $\mathbf{X}$ 中代数运算连续. 由条件 4) 容易得出加法运算的连续性. 在证明乘法运算连续性之前, 我们指出条件 2) 与 4) 的一个推论. 对于任何集合 $E\subset\mathbf{X}$, 有 $2E\subset E+E$, 所以, 根据条件 4), 对于每一个邻域 $V\in\mathfrak{V}$ 可以找到 $\tilde{V}\in\mathfrak{V}$, 使得 $2\tilde{V}\subset V$; 类似地, 对于任何自然数 n, 存在 $V^{(n)}\in\mathfrak{V}$, 使得 $2^nV^{(n)}\subset V$. 设 λ 是任意的数, 用 n 表示这样大的自然数, 使得 $|\lambda|\leqslant 2^n$. 因为 $V^{(n)}$ 是平衡集, 则 $2^nV^{(n)}$ 也是平衡集, 所以

$$\lambda V^{(n)}=\frac{\lambda}{2^n}(2^nV^{(n)})\subset 2^nV^{(n)}\subset V.$$

现在已不难证明乘法运算是连续的. 设 $x\in\mathbf{X}$, λ 是数因子, 我们有

$$\mu y-\lambda x=(\mu-\lambda)(y-x)+(\mu-\lambda)x+\lambda(y-x)$$

由此关系式并注意条件 4) , 余下就只要证明三个事实:

1) 对于任何 $V\in\mathfrak{V}$, 可以求出 $V_1\in\mathfrak{V}$ 及数 $\delta>0$, 使得 $\alpha V_1\subset V$ $(|\alpha|\leqslant\delta)$;

2) 对于任何 $V\in\mathfrak{V}$, 可以求出 $\delta>0$, 使得当 $|\alpha|\leqslant\delta$ 时 $\alpha x\in V$;

3) 对于任何 $V\in\mathfrak{V}$, 可以求出 $V_1\in\mathfrak{V}$, 使得 $\lambda V_1\subset V$.

由于集 V 是平衡集, 即可推出第一个命题成立, 所以可取 $V_1=V$, $\delta=1$.

第二个结论也成立. 事实上, V 是平衡吸收集, 因此可以求出 $\lambda'>0$, 使得 $x\in\lambda'V$. 如果令 $\delta=1/\lambda'$, 则对于 $|\alpha|\leqslant\delta$, 有

$$\alpha(\lambda'V)=(\alpha\lambda')V\subset V,$$

因为 $|\alpha\lambda'|\leqslant 1$, 由此推出 $\alpha x\in V$ $(|\alpha|\leqslant\delta)$.

最后, 已经指出第三个结论成立, 定理全部证毕.

推论 1. 一切拓扑向量空间都具有闭平衡的基本邻域系.

实际上，只要证明零元素具有这样的邻域系．零元素的任意的平衡基本邻域系 $\mathfrak{V}$ 中的邻域的闭包构成这样的邻域系．事实上，如果 $V\in\mathfrak{V}$，且邻域 U 满足条件 $U+U\subset V$，则 $\bar{U}\subset V$，因为如果 $x_0\notin V$，则点 x_0 的邻域 x_0+U 与集合 U 不相交．为了完成证明只须指出在取闭包的过程中保持平衡性．

推论 2. 设 $\mathfrak{V}$ 是拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 中的零邻域基，则 $\mathbf{X}$ 为 Hausdorff 空间的充要条件为

$$\bigcap_{V\in\mathfrak{V}} V=\{\mathbf{0}\}. \tag{1}$$

事实上，如果 $\mathbf{X}$ 是可分离的且 $x\neq\mathbf{0}$，则存在不包含 x 的 $V\in\mathfrak{V}$，由此得出 (1)．反之，如果(1)成立且 $x\neq y$，则存在不包含 $x-y$ 的 $V\in\mathfrak{V}$．由定理 1 可以找到平衡零邻域 U，使得 $U+U\subset V$。这时 $x+U$ 与 $y+U$ 是点 x 和点 y 的不相交邻域，因为从 $z\in(x+U)\cap(y+U)$ 推出 $x-y=(z-y)-(z-x)\in U-U=U+U\subset V$．所以 $\mathbf{X}$ 是可分离的。

今后，我们总假设拓扑向量空间是 Hausdorff 空间．

1.2. 再叙述拓扑向量空间中成立的几个命题．

I. 空间 $\mathbf{X}$ 中线性集 $\mathbf{X}_0$ 的闭包仍是线性集．

事实上，设 $x, y\in\overline{\mathbf{X}_0}$ 且 α, β 是任意的数值因子，再设 V_z 是点 $z=\alpha x+\beta y$ 的邻域．可以求出点 x 的邻域 V_x 及点 y 的邻域 V_y，使得 $\alpha V_x+\beta V_y\subset V_z$．在邻域 V_x 中有集 $\mathbf{X}_0$ 中的点，用 x' 表示其中之一，类似地设 $y'\in V_y\cap\mathbf{X}_0$．因为 $z'=\alpha x'+\beta y'\in\mathbf{X}_0$，同时 $z'\in\alpha V_x+\beta V_y\subset V_z$，所以交 $V_z\cap\mathbf{X}_0$ 非空，由于邻域 V_z 是任意取的，故 $z\in\overline{\mathbf{X}_0}$．

用类似方式可以证明:

II. 凸集的闭包是凸的，绝对凸集的闭包也是绝对凸的．

设 E 是拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 中任意的非空子集，集 E 的线性包的

闭包叫做集E的闭线性包，并记为$\overline{\mathscr{L}}(E)$. 由I知，$\overline{\mathscr{L}}(E)$是$\mathbf{X}$中包含$E$的最小闭线性子集. 集$E$的凸(对应地，绝对凸)包的闭包叫做集$E$的闭凸(对应地，绝对凸)包，记为$\overline{\mathrm{co}}(E)$（对应地，$\overline{\mathrm{abs\ co}}(E)$）. 由II知，$\overline{\mathrm{co}}(E)$(对应地，$\overline{\mathrm{abs\ co}}(E)$)是$\mathbf{X}$中包含$E$的最小凸(对应地，绝对凸)闭子集.

从上一段的命题III容易得到：

III. 有向列$\{x_\alpha\}$($\alpha\in A$)收敛于$x\in\mathbf{X}$的充要条件为$x_\alpha-x \xrightarrow[A]{} 0$.

下列命题的证明略为复杂一些.

IV. 设K_1与K_2是拓扑向量空间$\mathbf{X}$中的紧集，则集$\lambda_1K_1+\lambda_2K_2$也是紧的.

事实上，由于I.2.8，集合$K=K_1\times K_2$在直积空间$\mathbf{X}\times\mathbf{X}$中是紧的，从空间$\mathbf{X}\times\mathbf{X}$到$\mathbf{X}$中的映射$\varphi$:

$$\varphi(x, y)=\lambda_1x+\lambda_2y \qquad (x, y\in\mathbf{X})$$

是连续的. 根据I.2.5，集合$\varphi(K)=\lambda_1K_1+\lambda_2K_2$在空间$\mathbf{X}$中是紧的.

设$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$是拓扑向量空间，如果映射$f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$同时是向量空间$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$的同构又是拓扑空间$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$的同胚，则称它为拓扑向量空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$的同构. 而拓扑向量空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$本身叫做是同构的. 沿用以前的观点，我们把同构的拓扑向量空间看成是无区别的.

如果在拓扑向量空间$\mathbf{X}$中可以用度量来给定拓扑，则称$\mathbf{X}$是可度量化的.

1.3. 下面给出几个拓扑向量空间的例子.

1) 可测函数空间$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$.

对于每一个测度有限的集$A\in\Sigma$及任何数$\varepsilon>0$，令

$$V(A, \varepsilon)=\{x\in\mathbf{S}\ (T, \Sigma, \mu): \int_A\frac{|x|}{1+|x|}d\mu<\varepsilon\}.$$

容易证明,所有形式为$V(A,\varepsilon)$的集系构成了$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$上某个拓扑的基本零邻域系. 从定理 I. 6. 14 推出, 在这个空间中有向列$x_\alpha\to x$的充要条件为$x_\alpha\to x(\mu)$. 因为在按测度收敛的拓扑下代数运算连续,所以我们把$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$变为拓扑向量空间. 在 I. 6. 10 中已指出,这个拓扑向量空间当测度μ是σ-有限时它是可度量化的.

如果测度μ不是σ-有限的,则$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$是不可度量化的. 事实上,所有测度有限的集合的全体按照包含关系赋序构成有向列,产生了这些集合的特征函数$\{x_\alpha\}$. 显然$x_\alpha\to\mathbf{1}(\mu)$, 其中$\mathbf{1}$是在$T$上恒等于 1 的函数. 如果$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$是可度量化的, 则可求出序列$x_{\alpha_n}\to\mathbf{1}(\mu)$. 设$x_{\alpha_n}$是集$A_n$的特征函数, 令$B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 因为测度$\mu$不是$\sigma$-有限的, 则$\mu(T\setminus B)\neq 0$, 又因为测度$\mu$没有测度无限的原子,所以可以找到$A\in\Sigma$使得$A\subset T\setminus B$, $0<\mu(A)<\infty$. 在集A上函数$x_{\alpha_n}=0$, 这与$x_{\alpha_n}\to\mathbf{1}(\mu)$矛盾.

作为空间$\mathbf{s}$的拓广可以研究空间$\mathbf{s}(T)$, 其中元素是定义在抽象集合T上的实函数全体. 空间$\mathbf{s}(T)$中的基本零邻域系由集合$V_{t_1,t_2,\cdots,t_n;\varepsilon}$的全体构成,其中$t_1,t_2,\cdots,t_n$是$T$中任意选出的一组元素,$\varepsilon$是任意的正数,而$x\in V_{t_1,t_2,\cdots,t_n;\varepsilon}$意味着

$$|x(t_k)|\leqslant\varepsilon\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

读者自行验证,这个邻域系满足定理 1 的条件, 于是$\mathbf{s}(T)$是可分离的拓扑向量空间,如果T是可数集,它和$\mathbf{s}$一致.

我们在 I. 6. 10 中已指出, 空间$\mathbf{s}$是$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$的特殊情形. 同样, 空间$\mathbf{s}(T)$也是$\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$的特殊情形. 读者自行验证,对应的向量空间作为拓扑向量空间是同构的. 由此证明, $\mathbf{s}(T)$是可度量化的拓扑向量空间的充要条件为集合T可数, 即$\mathbf{s}(T)=\mathbf{s}$.

如果$T=\{1,2,\cdots,n\}$, 则$\mathbf{s}(T)$可以与n维空间$\mathbf{K}^n$一致, 从而

可把 $\mathbf{K}^n$ 看成是拓扑向量空间. 然而, 我们到下面几章再来考察有限维拓扑向量空间.

2) 作为另一个例子我们研究空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$, 其中的元素是定义在整个数轴上的连续函数全体. 在 $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$ 中用集合 $V_{n;\varepsilon}$(n 是自然数, $\varepsilon>0$) 组成基本零邻域系来给出拓扑. 并且, $x\in V_{n;\varepsilon}$ 表示

$$|x(t)|\leqslant\varepsilon \qquad (|t|\leqslant n)$$

读者自行验证定理 1 的条件成立, 而空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$ 也是可分离的.

3) 在广义函数理论中空间 $\mathbf{D}[a, b]$ 起很大的作用, 其中的元素是在区间 $[a, b]$ 外等于零的无限次可微函数全体. 这个空间中的基本零邻域系为集 $V_{n;\varepsilon}$, 其中 n 是任意的自然数, ε 是任意的正数. 邻域 $V_{n;\varepsilon}$ 是由满足下列条件

$$|x^{(k)}(t)|\leqslant\varepsilon \qquad (k=0, 1, \cdots, n;\ t\in[a, b])$$

的所有 x 组成.

4) 再给出一个拓扑向量空间的例子. 用 $\mathbf{L}_\omega$ 表示给定在 $[0, 1]$ 上的可测函数全体, 并且它的任意次幂是可积的. $\mathbf{L}_\omega$ 中的零邻域 $V_{p;\varepsilon}$ 由对任意数 $p>1$ 及任意的 $\varepsilon>0$ 所确定. 即如果

$$\left[\int_0^1|x(t)|^p dt\right]^{1/p}\leqslant\varepsilon$$

则 $x\in V_{p;\varepsilon}$.

下面我们还要证明, 空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$, $\mathbf{D}[a, b]$ 及 $\mathbf{L}_\omega$ 是可度量化的拓扑向量空间.

1.4. 设 E 是拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 中的一个子集, 如果对于 $\mathbf{X}$ 中的任何零邻域 V, 存在数 λ 使得 $E\subset\lambda V$, 则称 E 是有界的. 显然, 为了验证集合 E 有界, 只要考察某个基本零邻域系中的邻域.

设 G 是拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 中的子集, 如果对于 $\mathbf{X}$ 中的任何零邻域 V, 存在有限子集 $\{x_k\}_{k=1}^n\subset G$, 使得 $G\subset\bigcup_{k=1}^n(x_k+V)$, 则称 G 是完全有界的.

下面指出关于有界集和完全有界集的几个简单性质:

I. 设 E_1 与 E_2 是拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 中的有界(或完全有界)子

集，则下列集合

$$E_1\cup E_2,\quad E_1+E_2,\quad \lambda E_1\ (\lambda \text{是数})$$

是X中的有界(或完全有界)集.

对于 $E_1\cup E_2$ 及 λE_1，结论显然成立；由定理1中4)可知，当 V 取遍零邻域基时，形式为 $V+V$ 的集合构成零邻域基，从而得知对 E_1+E_2 的结论成立.

从I得出，有限集合是(完全)有界的.

II. 任何完全有界集是有界的.

如果 E 是完全有界的，则对于任何邻域 V(我们可认为它是平衡的)，可以找到 $x_k\in E$，使得 $E\subset\bigcup_{k=1}^{n}(x_k+V)$. 我们已指出，有限集 $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ 是有界的，由此可求出 λ_1，使 $\{x_k\}_{k=1}^{n}\subset\lambda_1 V$，故 $E\subset\lambda_1 V+V\subset\max(|\lambda_1|,1)(V+V)$. 由定理1形式为 $V+V$ 的集合，当 V 取遍零邻域基时构成零邻域基.

因为基本零邻域系可以由闭邻域组成(定理1推论1)，所以，

III. 有界(或完全有界)集的闭包是有界的(或完全有界的).

定理 2. 拓扑向量空间X的子集 E 为有界集的充要条件是对于任何序列 $\{x_n\}\subset E$ 及实数序列 $\{\lambda_n\}$，$\lambda_n\to 0$，可得 $\lambda_n x_n\to\mathbf{0}$.

证. 必要性. 设 $\{x_n\}$ 与 $\{\lambda_n\}$ 是满足上述条件的序列，V 是任意的平衡零邻域，存在 $\lambda>0$ 使得 $E\subset\lambda V$，特别 $x_n\in\lambda V\ (n=1,2,\cdots)$. 因此，如果 n 充分大，使得 $|\lambda_n|\leqslant 1/\lambda$，则 $\lambda_n x_n\in\lambda_n\lambda V\subset V$，即 $\lambda_n x_n\to\mathbf{0}$.

充分性. 如果在定理条件下 E 不是有界集，则可以找到零邻域 V，使得对于任何 $\lambda>0$，集合 $E\backslash\lambda V$ 非空. 依次取 $\lambda=1,2,\cdots$. 我们得元素序列

$$x_n\in E\backslash nV\quad (n=1,2,\cdots).$$

因为一方面 $x_n\in E\ (n=1,2,\cdots)$，而另一方面 $\frac{1}{n}x_n\notin V$，所以这与定

理条件矛盾.

下面我们介绍将要用到的下述关于 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中有界集的引理.

引理 1. 如果实函数序列 $\{x_n\}$ 在拓扑向量空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中有界, 并且, $0 \leqslant x_1(t) \leqslant x_2(t) \leqslant \cdots \leqslant x_n(t) \leqslant x_{n+1}(t) \leqslant \cdots$ a.e., 则可以找到函数 $x \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$, 使得 $x_n(t) \to x(t)$ a.e.

证. 只要验证, 对于几乎所有的 $t \in T$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ 有限. 设存在集合 $A \in \Sigma(\mu)$, $\mu(A) > 0$, 并对于任何 $t \in A$, $x_n(t) \to +\infty$. 因为集合 $\{x_n\}$ 有界, 则邻域 $U(A, \varepsilon/2)$ (其中 $\varepsilon = \mu(A)$) 吸收序列 $\{x_n\}$, 即可以求出数 $\lambda > 0$, 使得

$$\int_A \frac{|\lambda x_n(t)|}{1 + |\lambda x_n(t)|} d\mu(t) < \varepsilon/2 \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{2}$$

因为当 $t \in A$ 时 $x_n(t) \uparrow +\infty$, 所以

$$\frac{|\lambda x_n(t)|}{1 + |\lambda x_n(t)|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

根据 Lebesgue 定理(定理 II. 6. 6)得

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{|\lambda x_n(t)|}{1 + |\lambda x_n(t)|} d\mu(t) = \int_A d\mu(t) = \varepsilon,$$

这与不等式(2)矛盾. 于是, 对于几乎所有的 $t \in T$, 我们有 $x_n(t) \uparrow x(t) < +\infty$.

1. 5. 我们来建立拓扑向量空间完备的概念. 研究有向列 $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$. 用 A^2 表示所有的对 (α', α'') 全体, 其中 $\alpha', \alpha'' \in A$. 如果我们在 A^2 中引进序: $(\alpha_1', \alpha_1'') \geqslant (\alpha_2', \alpha_2'')$ 当且仅当 $\alpha_1' \geqslant \alpha_2'$ 及 $\alpha_1'' \geqslant \alpha_2''$ 同时成立, 则 A^2 按递增成为有向集.

在拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 中的有向列 $\{x_\alpha\}$ 称为自收敛的(或 Cauchy 有向列), 如果有向列 $\{x_{(\alpha', \alpha'')}\}$ $(\alpha \in A^2)$, 其中 $x_{(\alpha', \alpha'')} = x_{\alpha'} - x_{\alpha''}$ 收敛于 $\mathbf{X}$ 的零元素, 即对于任何零邻域 U, 可以找到 $\alpha_0 \in A$, 使得当 α',

$\alpha''>\alpha_0$时 $x_{\alpha'}-x_{\alpha''}\in U$. 如果拓扑向量空间X中的子集$E$里的元素的任何 Cauchy 有向列收敛于其中的某个元素，则称E是完备的. 与此对应，如果拓扑向量空间X中任意的 Cauchy 有向列在其中收敛，则称X是完备的. 如果只研究有界有向列，则称拓扑向量空间为拟完备的；如果只针对一般的序列，则拓扑向量空间叫做序列完备的. 我们指出，完备空间中的闭子集是完备的.

因为 Cauchy 有向列的元素集合不一定有界，所以完备性要求比拟完备性要求强(下面我们可看到这种例子). 另一方面，不难证明 Cauchy 序列是有界的，所以拟完备性可推出序列完备性. 下面定理指出，在可度量化的拓扑向量空间中这三个完备性是一致的.

定理 3. 具有可数基本零邻域系*) 的序列完备的拓扑向量空间X是完备的.

证. 设$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$是空间X中元素的 Cauchy 有向列，用$\{V_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$表示可数的基本零邻域系. 对于每一个 $n=1, 2, \cdots$, 可以求出这样的对$(\alpha'_n, \alpha''_n)\in A^2$, 使得

$$x_{\alpha'}-x_{\alpha''}\in V_n((\alpha', \alpha'')\geqslant(\alpha'_n, \alpha''_n)). \tag{3}$$

用 α_n 表示 A 中的元素，满足条件 $\alpha_n\geqslant\alpha'_n, \alpha_n\geqslant\alpha''_n$, 可以认为 $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant\cdots$. 考察序列$\{x_{\alpha_n}\}$，因为它显然是自收敛的，所以根据条件存在 $x\in\mathbf{X}$, 使得 $x_{\alpha_n}\to x$. 我们来证明 $x_\alpha\to x$. 任取一个邻域 V_m, 并求出邻域 V_k, 使得 $V_k+V_k\subset V_m$. 可以指出这样的指标 $n\geqslant k$, 使得

$$x_{\alpha_n}-x\in V_k.$$

另一方面，由(3)对于 $\alpha\geqslant\alpha_n$ 有

$$x_\alpha-x_{\alpha_n}\in V_k,$$

*）事实上这个条件与拓扑向量空间 X 的可度量化是等价的(参看 Schäffer I. 6.1).

所以

$$x_\alpha - x = (x_\alpha - x_{\alpha_n}) + (x_{\alpha_n} - x) \in V_k + V_k \subset V_m,$$

定理证毕.

在可度量化的拓扑向量空间$\mathbf{X}$中有两种完备性概念：作为拓扑向量空间$\mathbf{X}$的完备性与作为度量空间$\mathbf{X}$的完备性. 在一般情形，这是不同的概念. 但是，如果在$\mathbf{X}$中给出拓扑的度量ρ满足关系：对于所有的$x, y \in \mathbf{X}$, $\rho(x, y) = \rho(x-y, \mathbf{0})$，则显然两个完备性概念是一致的. 在本书考察的所有具体的拓扑向量空间中的度量都有这种性质. 完备性概念的详细讨论可参见 Bourbaki-IV 及 Kelley.

每一个拓扑向量空间$\mathbf{X}$可以完备化，换句话说，存在完备拓扑向量空间$\hat{\mathbf{X}}$，使得$\mathbf{X}$是$\hat{\mathbf{X}}$的子空间，且$\mathbf{X}$在$\hat{\mathbf{X}}$中稠密. 按照定理 I.4.1 的方式可证明相应的定理，只要把等价 Cauchy 序列类换成有向列类(类似于 I.4.1 可验证$\hat{\mathbf{X}}$同时还是向量空间). 空间$\hat{\mathbf{X}}$叫做拓扑向量空间$\mathbf{X}$的完备化空间. 以后我们不需要拓扑向量空间的完备化.

利用定理 3 容易证明，拓扑向量空间$\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$和$\mathbf{D}[a, b]$是完备的. 在讨论了空间$\mathbf{L}^p$的完备性后(第 IV 章) 容易证明可度量化拓扑向量空间$\mathbf{L}_\infty$的完备性. 在定理 I.6.15. 中已经证明：可度量化拓扑向量空间$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$在$\sigma$-有限测度情形的完备性. 从这个结论不难得到，如果空间(T, Σ, μ)具有直和性质(参见 I.6.10)，则拓扑向量空间$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$是完备的.

现在转到研究完全有界集与紧集之间的关系. 下面的定理可看作类似于度量空间中紧集的 Hausdorff 定理(参见 I.5.1). 事实上，这两个定理都是在所谓一致空间中的更一般定理的推论(参见 Bourbaki-II).

定理 4. 拓扑向量空间$\mathbf{X}$的子集是紧集的充要条件为它是完全有界和完备的.

证. 设K是紧集. 我们先来证明它是完全有界的. 为此，任取一个开零邻域V. 显然开集族$\{x+V\}$ $(x \in K)$构成K的复盖，由

此，利用紧性定义可知K是完全有界的.

现在来证明K是完备的. 设$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$是K中元素的Cauchy有向列，由定理I. 2. 3 存在收敛于 $x\in K$ 的子有向列$\{y_\beta\}$ $(\beta\in B)$. 我们来证明 $x_\alpha\to x$. 任取一个零邻域 V. 这时可以求出零邻域 U，使得 $U+U\subset V$. 因为$\{x_\alpha\}$是 Cauchy 有向列，所以存在 $\alpha_0\in A$ 使得当 α，$\alpha'\geqslant\alpha_0$ 时 $x_\alpha-x_{\alpha'}\in U$. 另一方面，因为 $y_\beta\to x$，所以存在 $\beta_0\in B$，使得当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时 $x-y_\beta\in U$. 由有向子列的定义，对于 α_0 可以求出指标 $\beta(\alpha_0)\in B$ 使得对于任意的 $\beta'\in B$，$\beta'\geqslant\beta(\alpha_0)$，可以求出指标 $\alpha'\in A$，$\alpha'\geqslant\alpha_0$，满足条件 $x_{\alpha'}=y_{\beta'}$. 取 $\beta'\geqslant\beta(\alpha_0)$，$\beta_0$ 及对应的指标 α'. 于是，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，

$$x_\alpha-x=(x_\alpha-x_{\alpha'})+(y_{\beta'}-x)\in U+U\subset V$$

故 $x_\alpha\to x$.

反之，设集K是完全有界和完备的. 为了验证 K 的紧性，再利用定理I. 2. 3. 设$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$是集K中元素的任意的有向列，用 $\mathfrak{M}$ 表示一切由集K 的子集 E 构成的有心集系 $\mathfrak{F}$ 所成的集，使得有向列$\{x_\alpha\}$与每一个 $E\in\mathfrak{F}$ 经常相遇(参见 I. 2. 7). 集 $\mathfrak{M}$ 非空，因为由一个K 构成的系属于 $\mathfrak{M}$. 在 $\mathfrak{M}$ 中按包含关系赋序. 根据 Zorn 引理在集 $\mathfrak{M}$ 中存在极大集系 $\mathfrak{F}_0$(Zorn 引理的用法类似于定理 II. 4. 1 的证明). 从 $\mathfrak{F}_0$ 的极大性推出:

1) $K\in\mathfrak{F}_0$;

2) 如果集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与$\{x_n\}$经常相遇且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\in\mathfrak{F}_0$，则对某个 i，$A_i\in\mathfrak{F}_0$.

结论 1) 显然成立. 假设结论 2) 不成立. 如果在集系 $\mathfrak{F}_0$ 中添加某个集 A_i 后得到的集系是有心的，则由于 $\mathfrak{F}_0$ 是极大，故它与 $\mathfrak{F}_0$ 相重合，由此 $A_i\in\mathfrak{F}_0$. 刚才我们已假设 2)不成立，所以，对于每一个 A_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，可以找到有限个 $B_i^{(k)}\in\mathfrak{F}_0(k=1,$

$2, \cdots, k_i$)，使得

$$A_i \cap B_i^{(1)} \cap B_i^{(2)} \cap \cdots \cap B_i^{(k_i)} = \varnothing.$$

这时 $C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} (B_i^{(1)} \cap B_i^{(2)} \cap \cdots \cap B_i^{(k_i)}) = \varnothing$. 然而根据条件 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}_0$，所有 $B_i^{(k)} \in \mathfrak{F}_0$ 且集系 $\mathfrak{F}_0$ 是有心的，由此推得这个集 C 非空，所得矛盾证明了 2）成立.

我们研究对 (E, α) 全体构成的集 B，其中 $E \in \mathfrak{F}_0$ 及 $\alpha \in A$，并满足 $x_\alpha \in E$. 在集 B 中用下列方式引进序：$(E_1, \alpha_1) \geqslant (E_2, \alpha_2)$ 当且仅当 $E_1 \subset E_2$，且在 A 中 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$. 利用集系 $\mathfrak{F}_0$ 是中心化的且 $\{x_\alpha\}$ 与 F_0 的每个元素经常相遇，我们得到 B 是按递增有向集. 对于 $(E, \alpha) \in B$，令 $y_{(E,\alpha)} = x_\alpha$. 于是 $\{y_{(E,\alpha)}\}$ $((E, \alpha) \in B)$ 是 $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ 中的有向子列. 事实上，对于任何 $\alpha \in A$，取元素 $(K, \alpha) \in B$. 如果 $(E, \alpha') \in B$，$(E, \alpha') \geqslant (K, \alpha)$，则 $\alpha' \geqslant \alpha$，且 $x_{\alpha'} = y_{(E,\alpha')}$，这就是要证明的.

下面来证明 $\{y_{(E,\alpha)}\}$ $((E, \alpha) \in B)$ 是 Cauchy 有向列，再由于 K 是完备的，从而可结束定理的证明.

任取零邻域 V. 这时可以找到平衡零邻域 U，使得 $U + U \subset V$. 因为集合 K 完全有界，所以可以求出点 $z_1, z_2, \cdots, z_n \in K$，使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (z_i + U)$. 如果我们令 $A_i = (z_i + U) \cap K$，则 $K = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}_0$，所以由 2）有某个 $A_i \in \mathfrak{F}_0$. 任取一个指标 $\alpha \in A$，使得 $x_\alpha \in A_i$. 如果 (E_1, α_1)，$(E_2, \alpha_2) \in B$ 且 (E_1, α_1)，$(E_2, \alpha_2) \geqslant (A_i, \alpha)$，则因为 E_1，$E_2 \subset A_i$，所以

$$y_{(E_1,\alpha_1)} - y_{(E_2,\alpha_2)} = x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in E_1 - E_2 \subset A_i - A_i$$
$$\subset (z_i + U) - (z_i + U) \subset U + U \subset V.$$

我们得到，所构成的$\{x_\alpha\}$的有向子列是 Cauchy 有向列. 从而定理完全得证.

定理 4 说明，把完全有界集叫做预紧集是合适的.

§2. 局部凸空间

2.1. 如果在可分离的拓扑向量空间 X(在 K 上)中存在凸的基本零邻域系，则称它是局部凸空间. 局部凸空间的理论比起拓扑向量空间的理论有着丰富得多的结果. 首先是由于在局部凸空间中总存在许多线性连续泛函. 此外，在泛函分析中遇到的所有具体空间，几乎都是局部凸的.

把定理 1.1 应用到局部凸空间中便更为简化. 由定理1.1，局部凸空间具有闭绝对凸零邻域基.

定理 1. 设在向量空间 X 中给出满足下列条件的吸收绝对凸集系 $\mathfrak{B}_0$:

对于任何 $x\neq 0$，可以找到 $V\in\mathfrak{B}_0$ 及 $\lambda>0$，使得 $x\notin\lambda V$. (1)

用 $\mathfrak{B}$ 表示下列形式的集系:

$$\varepsilon\bigcap_{i=1}^{n}V_i\qquad(\varepsilon>0,\ V_i\in\mathfrak{B}_0,\ n\in N).\tag{2}$$

则集系 $\mathfrak{B}$ 满足定理 1.1 的所有条件，并且 X 变为局部凸空间(以 $\mathfrak{B}$ 为其基本零邻域系).

证. 对于 $\mathfrak{B}$，定理 1.1 的条件(1)—(3)显然成立. 对于任一个凸集 E 有$(1/2)E+(1/2)E=E$，从而得知(4)成立. 于是 X 是拓扑向量空间. 再由定理 1.1 的推论 2 指出，由条件(1)可推出 X 是 Hausdorff 空间. 因为形如(2)的集是绝对凸的，所以 X 是局部凸空间.

引理 1. 设 X 是拓扑向量空间.

1) 度规函数 p 在 X 上连续的充要条件为它在零处连续.

2) 凸吸收集U的 Minkowski 泛函 p_U 连续的充要条件为U是邻域，此时内部$\mathring{U}=\{x: p_U(x)<1\}$，闭包$\bar{U}=\{x: p_U(x)\leqslant 1\}$.

证. 1) 如果p在零处连续，则对于任何$\varepsilon>0$，可以找到平衡零邻域U，对其中所有的点x，$p(x)<\varepsilon$. 如果$y\in\mathbf{X}$是任意的点，则对于所有的$x\in y+U$有$x-y$，$y-x\in U$，因此由不等式II. 3. 2 中的 c′ 得$|p(x)-p(y)|\leqslant\max(p(x-y), p(y-x))<\varepsilon$.

2) 根据引理 II. 3. 1 知，p_U是度规函数. 如果U是邻域，则由 Minkowski 泛函的定义，对于任何$\varepsilon>0$，从$x\in\varepsilon U$可推出$p_U(x)\leqslant\varepsilon$. 由此$p_U$在零处连续，从而在整个$\mathbf{X}$上连续.

反之，如果p_U连续，则集合$V=\{x: p_U(x)<1\}=p_U^{-1}((-1, 1))$是开集. 因为$V\subset U$，所以$U$是邻域.

设$x\in\mathring{U}$. 假定$p_U(x)=1$，我们来证明点x的任何邻域V包含点$y\notin U$，从而与$x\in\mathring{U}$矛盾. 事实上，因为V是点x的邻域，所以可以找到$\varepsilon>0$，使得$y=(1+\varepsilon)x\in V$. 于是$p_U(y)=(1+\varepsilon)p_U(x)=1+\varepsilon>1$，由此$y\notin U$.

设$p_U(x)\leqslant 1$，则存在序列$\lambda_n\to 1$，使得对于任意的n，$x\in\lambda_n U$. 从而$y_n=x/\lambda_n\in U$且$y_n\to x\in\bar{U}$.

引理证毕.

推论. 如果E是拓扑向量空间$\mathbf{X}$中的凸集，则它的内部$\mathring{E}$是凸集. 如果$\mathring{E}\neq\varnothing$，则$\mathring{E}$的闭包是$\bar{E}$.

证. 可以认为$\mathring{E}\neq\varnothing$. 取$x\in\mathring{E}$，这时集$U=x-E$是凸零邻域，并且$\mathring{U}=x-\mathring{E}$. 由引理 1 集$\mathring{U}=\{x: p_U(x)<1\}$是凸集，从而$\mathring{E}$也是凸集.

现在来证明第二个结论. 因为$\bar{\mathring{U}}=x-\bar{\mathring{E}}$，所以只要对$\mathring{U}$来证

明即可．为此，只要验证$\bar{\mathring{U}} \supset U$．取$x \in U$，并考察$y_n = (1-\frac{1}{n})x$．因为$p_U(y_n) = (1-\frac{1}{n})p_U(x) < 1$，所以$y_n \in \mathring{U}$．另一方面，$y_n \to x$，由此$x \in \bar{\mathring{U}}$．

向量空间$\mathbf{X}$上的局部凸空间的拓扑可以利用一组满足下述条件的半范数$\{p_\xi\}(\xi \in \Xi)$给出：

对于任何$x \in \mathbf{X}$，$x \neq 0$，存在$\xi \in \Xi$使得$p_\xi(x) \neq 0$． (3)

设$\mathfrak{B}_0$由下列形式的集V_ξ构成：

$$V_\xi = \{x \in \mathbf{X}: \ p_\xi(x) \leqslant 1\} \qquad (\xi \in \Xi).$$

由引理 II.3.1 集合V_ξ是绝对凸且吸收的．由(3)推出，集系$\mathfrak{B}_0$满足(1)．这时在$\mathbf{X}$上的拓扑用定理 1 所述的方式来确定．集系(2)具有形式

$$\{x \in \mathbf{X}: \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{\xi_i}(x) \leqslant \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0; \xi_1, \cdots, \xi_n \in \Xi).$$

所得的拓扑把$\mathbf{X}$变为局部凸空间，我们称它是由族$\{p_\xi\}(\xi \in \Xi)$生成的拓扑．如果$\mathbf{X}$是局部凸空间，它的拓扑由某个半范数组$\{p_\xi\}(\xi \in \Xi)$生成，则称这一组半范数对于局部凸空间$\mathbf{X}$的拓扑是生成组或确定组．由引理 1，生成组中所有的半范数都是连续的．

任何局部凸空间$\mathbf{X}$的拓扑由某一组半范数生成．事实上，取一绝对凸零邻域系$\mathfrak{B}_0$，使得形式(2)的集合组成$\mathbf{X}$中的基本零邻域系(例如绝对凸零邻域基)．同时由于$\mathbf{X}$是可分离的，所以条件(1)自动成立．这时局部凸空间$\mathbf{X}$中原来的拓扑由半范数组$\{p_V\}$ $(V \in \mathfrak{B}_0)$生成．其中p_V是邻域V的 Minkowski 泛函．

自然，生成半范数组并非单值地确定的．例如，如果半范数p属于某个半范数组Q，则或者半范数$q(x) = 2p(x)$属于Q，或者它不属于Q．在第一种情形把q从Q中剔除，在第二种情形把q添入Q．在这两种情形，得到与Q不同的生成半范数组．

定理 2. 局部凸空间X是可度量化空间的充要条件为它是可分离的且具有可数的半范数生成组.

证. 必要性. 如果X是可度量化的，则X中具有可数零邻域基. 这个基中邻域的绝对凸包的 Minkowski 泛函显然组成可数的半范数生成组.

充分性. 设$\{p_n\}(n\in N)$是半范数生成组，这表示集族

$$V_n=\{x\in \mathbf{X}: \max_{1\leqslant k\leqslant n} p_k(x)\leqslant n^{-1}\} \quad (n\in N)$$

构成X中的可数零邻域基，对于任意的$x, y\in \mathbf{X}$，令

$$\rho(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}. \tag{4}$$

容易验证，用公式(4)定义的函数$\rho(x, y)$是度量. 我们来证明，由这个度量生成的拓扑与局部凸空间X原来的拓扑一致. 因为局部凸空间X具有可数的零邻域基，所以，只要验证在X中序列$x_m\to 0$的充要条件为$\rho(x_m, 0)\to 0$. 序列$\xi_m=\{p_n(x_m)\}_{n=1}^{\infty}(m\in N)$可以看成是空间 s 中的元素，因为在空间 s 中$\xi_m$到 0 的距离与$\rho(x_m, 0)$一致，而在 s 中收敛是按坐标收敛(参见 I. 3. 2). 所以$\rho(x_m, 0)\to 0$当且仅当对于任意的$n\in N$, $p_n(x_m)\underset{m\to\infty}{\to}0$. 由集合$V_n$的形式推出，在X中收敛$x_m\to 0$也是同一个意义. 定理证毕.

与局部凸空间有关的许多概念，用半范数生成组术语来表示，具有简单和直观的意义. 设$\{p_\xi\}(\xi\in\Xi)$是一组半范数，产生了局部凸空间X中的拓扑. 从定义直接推出下列命题:

I. 有向列$\{x_\alpha\}(\alpha\in A)$收敛于局部凸空间X中元素$x$的充要条件为对于任何$\xi\in\Xi$有$p_\xi(x_\alpha-x)\underset{A}{\to}0$.

II. 集合$E\subset\mathbf{X}$的有界性等价于对于任何$\xi\in\Xi$，数集$\{p_\xi(x): x\in E\}$是有界的.

在 1.3 中引进的空间 $\mathbf{s}(T)$, $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$, $\mathbf{D}[a, b]$, $\mathbf{L}_\omega$ 是局部凸空

间．空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$的情况比较复杂．如果$(T, \Sigma, \mu)$不是离散测度空间，则拓扑向量空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$不是局部凸的（下面我们就特殊情况 $\mathbf{S}(0, 1)$证明）；如果测度 μ 是离散的，则 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$是局部凸空间．设测度 μ 离散，T^*是原子集合，则拓扑向量空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$与拓扑向量空间 $\mathbf{s}(T^*)$同构；然而 $\mathbf{s}(T^*)$显然是局部凸空间，故 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$也是局部凸空间．

在结束这段之前，我们来证明一个命题，在后面我们要用到它．

定理 3. 在任何局部凸空间中完全有界子集的凸包和绝对凸包都是完全有界的．

证． 显然，只须讨论绝对凸包的情形．设E是完全有界集，E_1是它的绝对凸包．如果V是$\mathbf{X}$中任意的绝对凸零邻域，则可以求出元素 $x_i \in E$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$．有限维空间 $\mathscr{L}(\{x_i\}_{i=1}^n)$与 $\mathbf{K}^m$，$m \leqslant n$是一致的（参见II. 1. 4）．有限集$\{x_i\}_{i=1}^n$的绝对凸包A显然是有界和闭的，从而，它也是在欧氏空间 $\mathbf{K}^m$中的紧集．因为在 $\mathbf{K}^m$ 中收敛表示按坐标收敛，而代数运算在 $\mathbf{X}$ 中连续，所以恒等嵌入 $\mathbf{K}^m \to \mathbf{X}$ 是连续的，因此集A在$\mathbf{X}$中是紧的，从而它是完全有界的（定理 1. 4）．

因为 $A+V$ 绝对凸并且包含了 E，所以有 $E_1 \subset A+V$．由于A是完全有界的，故存在元素 $y_j \in A (1 \leqslant j \leqslant j_0)$，使得$A \subset \bigcup_{j}^{j_0} (y_j + V)$．最后得到 $E_1 \subset A+V \subset \bigcup_{j=1}^{j_0} (y_j + 2V)$，所以，$E_1$是完全有界的．定理证毕．

由定理 3 并利用定理 1. 4 得：

推论． 在拟完备局部凸空间中任何预紧集的闭凸包和闭绝对凸包都是紧的．

2.2. 在这一节中，我们研究 Hahn-Banach 定理的解析形式在局部凸空间理论中的应用. 特别证明了在局部凸空间中具有许多线性连续泛函这一重要性质.

首先指出，线性泛函 f 在拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 上连续的充要条件为它在零处连续. 事实上，设 f 在零处连续且在 $\mathbf{X}$ 中有向列 $x_\alpha \to x$，则 $f(x_\alpha)-f(x)=f(x_\alpha-x)\to 0$.

引理 2. 在拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 中的每一个超平面 M，或者是闭的，或者在 $\mathbf{X}$ 中稠密. 超平面 $M=\{x: f(x)=\lambda\}$ 是闭的充要条件为泛函 f 连续.

证. 设 $M=x+H$，其中 H 是超子空间. 如果超子空间 H 不是闭的，则它应在 $\mathbf{X}$ 中稠密，因为闭包 $\bar{H}$ 是包含 H 的线性集(参见引理 II. 2. 1). 由等式 $\bar{M}=x+\bar{H}$ 得到第一个命题. 根据定理 II. 2. 1 要证明第二个命题只要证实 $f^{-1}(0)$ 是闭的充要条件为函数 f 连续. 如果 f 连续，则 $f^{-1}(0)$ 闭，因为集 $\{0\}$ 是 K 中闭集. 反之，设 $H=f^{-1}(0)$ 是闭的. 只要证明泛函 f 在零处连续. 设 $f\neq\mathbf{0}$ (否则 $f=\mathbf{0}$ 连续)，$V=\{x:|f(x)|<\varepsilon\}$，$(\varepsilon>0)$. 如果我们能证明 V 是 $\mathbf{X}$ 中的零邻域，则我们得到 f 在零处连续. 因为 $f\neq\mathbf{0}$，所以可以找到点 $x_0\in\mathbf{X}$ 使得 $f(x_0)=\varepsilon$. 由于 H 是闭的，故存在平衡零邻域 U，使得 $(x_0+U)\cap H=\varnothing$. 我们指出，$U\subset V$，由此推得，$V$ 是零邻域. 假设不然，即可以求出 $x\in U$，使得 $|f(x)|\geqslant\varepsilon$. 则 $y=-\varepsilon x/f(x)\in U$ 且 $f(x_0+y)=f(x_0)-\varepsilon=0$，因此 $y\in(x_0+U)\cap H$，从而得出矛盾.

定理 4 (Hahn-Banach 定理的几何形式). 设 $\mathbf{X}$ 是拓扑向量空间，E 是 $\mathbf{X}$ 中的线性子集. $x_0\in\mathbf{X}$. 如果 U 是 $\mathbf{X}$ 中非空凸开子集，与 x_0+E 不相交，则在 $\mathbf{X}$ 中存在闭超平面 H，它包含 x_0+E，且与 U 不相交.

证. 首先设 $\mathbf{X}$ 是实空间. 我们可以认为 $\mathbf{0}\in U$，即 U 是零邻域. 如果需要可以利用平移变换. 用 p 表示集合 U 的 Minkowski 泛

函．研究$\mathbb{X}$中的线性集 $F=\mathscr{L}(x_0,E)$．这时，E 是F 中的超平面且根据定理 II. 2. 2存在F 上的线性泛函 f_0，使得 $f_0^{-1}(0)=E$及$f_0(x_0)=1$．我们来验证，对于任何 $x=\lambda x_0+y(y\in E)$有 $f_0(x)\leqslant p(x)$或同样的 $\lambda\leqslant p(\lambda x_0+y)$．因为当 $\lambda\leqslant 0$ 时这一个不等式显然成立，所以，只要证明，对任意的 $\lambda>0$，下式

$$p\left(\frac{\lambda x_0+y}{\lambda}\right)\geqslant 1$$

成立．

由引理 1 这个不等式表示 $x_0+y/\lambda\notin U$．因为 $y/\lambda\in E$，所以这个关系式成立．

根据 Hahn-Banach 定理的解析形式(参见定理 II. 4. 1)，在$\mathbf{X}$上存在线性泛函 f_0 的延拓 f，并对任何 $x\in\mathbf{X}$，不等式 $f(x)\leqslant p(x)$ 成立．

因为$-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x)$且$U$是零邻域，所以泛函$f$ 在 $\mathbf{X}$ 上连续．这时，根据引理 2，$H=f^{-1}(1)$是$\mathbf{X}$中的闭超平面．显然，$H\supset x_0+E$．我们来验证 $H\cap U=\varnothing$．事实上，如果 $x\in U$，则 $p(x)<1$；而如果 $x\in H$，则 $1=f(x)\leqslant p(x)$，从而对实空间$\mathbf{X}$ 定理证毕．

现在设$\mathbf{X}$是复空间，我们可以认为 $0\in x_0+E$，即 x_0+E 是线性集，否则可以利用平移变换．根据上面的证明，存在闭实超子空间 H_1，使得 $H_1\supset x_0+E$，$H_1\cap U=\varnothing$．根据引理 II. 2. 2，$H=H_1\cap(iH_1)$是超子空间，而且，H 显然满足定理要求．

定理 4 在任意拓扑向量空间中成立，但要应用它时要求存在开凸集，而这多数正是在局部凸空间中．定理 4 有许多应用，我们放到下一段去讨论．现在给出 Hahn-Banach 定理的一些推论．

设 $\mathbf{X}$ 是局部凸空间，$\mathbf{X}_0$ 是 $\mathbf{X}$ 中的线性子集，把$\mathbf{X}$ 中的拓扑诱导到 $\mathbf{X}_0$，显然使之成为局部凸空间．

推论 1. 设 f_0 是 $\mathbf{X}_0$上的连续线性泛函，则存在 $\mathbf{X}$ 上的连续

线性泛函 f，它是泛函 f_0的延拓.

证. 由于 f_0 的连续性，存在绝对凸零邻域 U，使得在 $U\cap\mathbf{X}_0$ 上 $|f(x)|\leqslant 1$. 这时，在 $\mathbf{X}_0$ 上 $|f(x)|\leqslant p_U(x)$. 根据定理 II. 4.2 f_0 具有在整个 $\mathbf{X}$ 上的延拓 f，使得 $|f(x)|\leqslant p_U(x)$，所以 f 连续.

推论 2. 对于向量空间 $\mathbf{X}$ 中任何点 x_0 及半范数 p，存在 $\mathbf{X}$上的线性泛函 f，使得 $|f(x)|\leqslant p(x)$，且 $f(x_0)=p(x_0)$.

证. 在由点 x_0 所产生的一维向量空间 $\mathbf{X}_0$ 上，令 $f_0(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)$. 然后根据定理 II. 4.2 把 f_0 延拓到 $\mathbf{X}$ 上.

推论 3. 设 $\mathbf{X}$ 是局部凸空间. 如果对于 $\mathbf{X}$ 上任何连续线性泛函 f，$f(x)=0$，则 $x=\mathbf{0}$.

证. 如果 $x\neq\mathbf{0}$，则由(3)可以求出连续半范数 p，使得 $p(x)>0$. 这时，由推论 2 可以求出 f，使得 $f(x)\neq 0$.

推论 3 建立了局部凸空间的最重要的性质，即存在足够多的连续线性泛函. 与此有关的讨论，我们在下一节中进行. 在拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 中连续线性泛函全体构成的集合记为 $\mathbf{X}^*$，并称它为(关于 $\mathbf{X}$ 的)拓扑共轭. 显然，$\mathbf{X}^*$ 是代数共轭的线性子集. 我们证明了，如果 $\mathbf{X}$ 是局部凸空间，则 $\mathbf{X}^*$区分 $\mathbf{X}$ 上的点. 在拓扑向量空间中可能出现 $\mathbf{X}^*=\{\mathbf{0}\}$(但有不是局部凸空间的拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 的 $\mathbf{X}^*$ 也区分 $\mathbf{X}$ 上的点).

我们来证明，拓扑向量空间 $\mathbf{S}(0,\ 1)$中任意连续线性泛函等于零. 设 $f\in(\mathbf{S}(0,1))^*$，$f\neq\mathbf{0}$. 因为特征函数积分的线性组合在 $\mathbf{S}(0,1)$ 中稠密，所以，对于任何 $n\in N$ 可以找到区间 Δ_n，其长度小于 $1/n$，使得 $f(\chi_{\Delta_n})=\delta_n\neq 0$. 如果 $x_n=\chi_{\Delta_n}/\delta_n$，则按测度 $x_n\to\mathbf{0}$，因此由于 f 的连续性有 $f(x_n)\to 0$. 另一方面 $f(x_n)=1$，从而得出矛盾.

在这一段结束之前，我们还引进一个记号. 如果 $\mathbf{X}$ 是局部凸空间，用 $\mathbf{X}_R^*$ 表示 $\mathbf{X}$ 上所有连续实线性泛函的集合. 如果 $\mathbf{X}$ 是实的，则 $\mathbf{X}_R^*=\mathbf{X}^*$.

2.3. 这里我们给出关于用线性连续泛函分离凸集的两个定理。它们在凸分析及其在数理经济学的应用中有许多应用（参见 Гольштейн, Иоффе 与 Тихомиров 及 Nikaito）.

设 E 和 F 是局部凸空间 $\mathbf{X}$ 的子集，如果存在泛函 $f\in\mathbf{X}_R^*$ 使得

$$\sup\{f(x):\ x\in E\}\leqslant\inf\{f(x):x\in F\} \tag{5}$$

则称它们是可分离的，如果(5)式是严格不等号，则称 E 与 F 是可严格分离的. 这个定义关于 E 与 F 的不对称性是表面的，只要把泛函变为 $-f$, E 与 F 可交换位置.

引理 3. 如果 E 是局部凸空间 $\mathbf{X}$ 中的开集，$f\in\mathbf{X}^*$，$f\neq\mathbf{0}$，则 $f(E)$ 是开集.

证. 如果 $x\in E$, 则 $E-x$ 是零邻域，从而是吸收集. 因为 $f\neq\mathbf{0}$, 所以可以找到 $x_0\in\mathbf{X}$，使得 $f(x_0)=1$. 于是存在 $\lambda>0$，当 $|\mu|\leqslant\lambda$ 时，有 $\mu x_0\in E-x$. 从而当 $|\mu|\leqslant\lambda$ 时 $f(x)+\mu\in f(E)$，而这表示 $f(E)$ 是开的.

定理 5. 设 E 是局部凸空间 $\mathbf{X}$ 中具有非空内部 $\mathring{E}$ 的凸子集，F 是 $\mathbf{X}$ 的非空凸子集，$\mathring{E}\cap F=\varnothing$. 则 E 与 F 可分离. 如果 E 与 F 是开的，则它们可严格分离.

证. 由引理 1 的推论，集 $\mathring{E}$ 是凸的. 因此集合 $U=\mathring{E}-F$ 也是凸的，且因为 $\mathring{E}\cap F=\varnothing$，它是开的，并且不包含零点. 这时，根据定理 4，可以找到闭的实超子空间 H，使得 $\mathbf{0}\in H$ 且 $(\mathring{E}-F)\cap H=\varnothing$. 设 $H=\{x:f(x)=0\}$，其中 $f\in\mathbf{X}_R^*$，集合 $f(\mathring{E}-F)$ 是凸的，因此它是 R 中的区间；$0\notin f(\mathring{E}-F)$. 可以认为 $f(\mathring{E}-F)<0$，否则可以变个符号. 这样，$\sup\{f(x):x\in\mathring{E}\}\leqslant\inf\{f(x):x\in F\}$. 又由于 $\mathring{E}$ 在 E 中稠密（参见引理 1 的推论）并且泛函 f 是连续的，故得 E 与 F 可分离.

如果E与F是开集，则根据引理 3 $f(E)$与$f(F)$是$\boldsymbol{R}$中的开区间，由此得严格分离性.

在局部凸空间$\mathbf{X}$中具有非空内部的闭凸集叫做凸体. 设E是局部凸空间$\mathbf{X}$中的子集. 称实泛函$f\in\mathbf{X}_R^*$为在点$x_0\in E$处E的支承，如果存在$\lambda\in\boldsymbol{R}$使得$f(x_0)=\lambda$，并且E包含在$\{x: f(x)\leqslant\lambda\}$或$\{x: f(x)\geqslant\lambda\}$之中. 同时实超平面$\{x: f(x)=\lambda\}$称为在点$x_0$处$E$的支承超平面.

推论. 如果C是$\mathbf{X}$中的凸体，则对于C的任何边界点，存在支承泛函.

证. 设x_0是C的边界点，如果在定理 5 中取$E=C$, $F=\{x_0\}$，则就得推论.

定理 6. 设E与F是局部凸空间$\mathbf{X}$中两个互不相交的非空凸子集，并且E是闭的，而F是紧的，则E与F可严格分离.

证. 我们来证明，存在凸开零邻域U，使得集合$E+U$与$F+U$不相交. 因为这两个集合是开和凸的，则由定理 5 立即推得.

只要证明存在绝对凸开零邻域V，使得$(E+V)\cap F=\varnothing$即可. 因为，这时对于$U=(1/2)V$有$(E+U)\cap(F+U)=\varnothing$. 事实上，如果$x=a+(1/2)v_1=b+(1/2)v_2$，其中$a\in E, b\in F, v_1, v_2\in V$，则$b=x-(1/2)v_2\in(E+V)\cap F$.

用$\mathfrak{B}$表示$\mathbf{X}$中开绝对凸零邻域基全体. 设对于所有的$V\in\mathfrak{B}$，有$(E+V)\cap F\neq\varnothing$. 于是，$\{(\overline{E+V})\cap F: V\in\mathfrak{B}\}$是紧集$F$的中心化的闭子集系. 因而，存在点$x_0\in F$，使得$x_0\in\overline{E+V}\subset E+2V$，对于任意的$V\in\mathfrak{B}$成立. 从而$x_0$是$E$的极限点，又因为$E$是闭的，所以$x_0\in E$. 但根据假设$E\cap F=\varnothing$，得出矛盾，故定理得证.

推论. 如果E是局部凸空间$\mathbf{X}$中的绝对凸子集，$x_0\notin\bar{E}$，则存在$f\in\mathbf{X}^*$，使得对于所有的$x\in E$有$|f(x)|\leqslant 1$及$\operatorname{Re}f(x_0)>1$.

证. 因为单点集$\{x_0\}$是紧的. 所以，根据定理 6 存在实泛函

$g \in \mathbf{X}_R^*$，使得当 $x \in E$ 时 $g(x) \leqslant 1$ 并且 $g(x_0) > 1$．因为集 E 绝对凸，所以当 $x \in E$ 时 $|g(x)| \leqslant 1$．如果 $\mathbf{X}$ 是复空间，则令 $f(x) = g(x) - ig(ix)$．再利用证明定理 II. 4. 2 的方法，对于任何 $x \in \mathbf{X}$，可以找到 $\theta \in \boldsymbol{R}$ 使得 $|f(x)| = e^{i\theta} f(x) = f(e^{i\theta} x)$．因此，$f(e^{i\theta}x) = g(e^{i\theta}x)$ 且 $e^{i\theta}x \in E$．由此推出 $|f(x)| = g(e^{i\theta}x) \leqslant 1$．

利用分离定理可以证明 Крейн-Мильман 定理．

设 x_0 是局部凸空间 $\mathbf{X}$ 中凸子集 E 中的点，如果从关系式 $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$, $x, y \in E$, $0 < \lambda < 1$，可推出 $x = y = x_0$，则称它是极点或边缘点．换句话说．如果 $x_0 \in E$ 不是端点在 E 中的线段的内点，则它是极点．例如，平面上正方形顶点是极点，而任意的其他边界点不是极点．

定理 7 (Крейн-Мильман)．任何局部凸空间 $\mathbf{X}$ 中的非空紧凸子集是其本身极点的闭凸包．

定理 7 的证明可以在教科书 Schäffer-I 中找到，Крейн-Мильман 定理的各种应用和详细说明可在 Phillips 书中找到．极点的概念在最优化及其在经济问题中的应用有很大的作用．

§3. 对 偶 性

本节我们研究局部凸空间与它的线性泛函空间之间的关系．

3.1. 设 $\mathbf{X}$ 是 $\boldsymbol{K}$ 上的向量空间，$\mathbf{X}^+$ 是它的代数共轭．在 $\mathbf{X}^+$ 中的子集 $\mathbf{Y}$ 叫做在 $\mathbf{X}$ 上是全的，如果对于所有的 $f \in \mathbf{Y}$，由 $f(x) = 0$ 推出 $x = \mathbf{0}$．我们指定 $\mathbf{X}^+$ 中的一个全线性子集 $\mathbf{Y}$．这时称 $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ 为处于对偶关系的向量空间对，或称为对偶对．例如，如果 $\mathbf{X}$ 是局部凸空间，则 $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}^+ \rangle$ 及 $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}^* \rangle$ 是对偶对．

[redacted]

设$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$是对偶对，由半范数组$p(x)=|f(x)|$（$f$取遍整个$\mathbf{Y}$）在$\mathbf{X}$上产生的局部凸拓扑叫做由$\mathbf{Y}$确定的$\mathbf{X}$中的弱拓扑，用$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$表示（由于$\mathbf{Y}$是全子集，这半范数组满足§2中的条件(3)）.

集合

$$\{x: \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i(x)| \leqslant 1\} \qquad (f_i \in \mathbf{Y})$$

构成拓扑$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$中的闭零邻域基. 赋于弱拓扑的空间$\mathbf{X}$记为$(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$. 我们指出，拓扑$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$与对偶关系$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$协调.

引理 1. 如果$f_1, f_2, \cdots, f_n$是向量空间$\mathbf{X}$上线性独立的线性泛函组，则对于这一线性泛函组来说，存在一组元素$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{X}$，满足关系

$$f_j(x_k)=\begin{cases}0, & j \neq k, \\ 1, & j=k,\end{cases} \quad (j, k=1,2, \cdots, n),$$

并称此元素组与$\{f_k\}_{k=1}^n$双正交.

证. 我们用归纳法证明所求元素组的存在性. 如果$n=1$，则因为$f_1 \neq \mathbf{0}$，可以求出$x_1 \in \mathbf{X}$，使得$f_1(x_1)=1$，元素x_1即所要求的元素组. 现在讨论$n>1$的情形. 假设，泛函个数小于n时可以找出双正交元素组. 我们来证明，在此假设下存在元素$x_1 \in \mathbf{X}$，使得

$$f_1(x_1)=1, \quad f_2(x_1)=\cdots=f_n(x_1)=0 \tag{1}$$

为此，研究与泛函$f_2, \cdots, f_n$双正交的元素组$x_2', \cdots, x_n' \in \mathbf{X}$. 对于每个$x \in \mathbf{X}$，下列表示式成立：

$$x=\sum_{k=2}^n \alpha_k x'_k+x', \tag{2}$$

其中x'是这样的元素，使得$f_2(x')=\cdots=f_n(x')=0$. 事实上，设

$$\alpha_k=f_k(x) \qquad (k=2, \cdots, n), \tag{3}$$

则对于元素 $x' = x - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x'_k$，有

$$f_j(x') = f_j(x) - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_j(x'_k) = \alpha_j - \alpha_j = 0 \quad (j = 2, \cdots, n).$$

我们指出，系数 α_k 由元素 x 唯一地确定，只要对(2)式两边取泛函 f_j $(j = 2, \cdots, n)$即可证明这一点.

现在假设，不存在元素 $x_1 \in \mathbf{X}$ 满足(1). 这就是说，对于 $x' \in \mathbf{X}$，如果 $f_2(x') = \cdots = f_n(x') = 0$，则 $f_1(x') = 0$. 由此与(3)，我们可以从(2)推出，对于任意的 $x \in \mathbf{X}$，

$$f_1(x) = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_1(x'_k) + f_1(x') = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(x)$$

其中 $\lambda_k = f_1(x'_k)$ $(k = 2, \cdots, n)$. 因此，$f_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k$，这与泛函 f_1, $f_2, \cdots, f_n$ 的线性独立性相矛盾. 于是，元素 x_1 存在. 用类似的方法可以证明，存在元素 $x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{X}$ 使得

$$f_k(x_k) = 1, \quad f_j(x_k) = 0$$
$$(j \neq k; \quad j = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 2, \cdots, n),$$

引理证毕.

定理 1. 弱拓扑 $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 与对偶关系 $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ 协调，即 $(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))^* = \mathbf{Y}$.

证. 根据弱拓扑 $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 定义方式本身可知，每一个线性泛函 $f \in \mathbf{Y}$ 是空间 $(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ 中的线性连续泛函.

反之，设 f 是空间 $(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ 中的线性连续泛函. 集合 $V = f^{-1}([-1, 1])$ *) 是 $(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ 中的零邻域. 这表示存在泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 使得

---

*) 在复标量域情形，这里和以下要用 $\{z \in C : |z| \leq 1\}$ 代替 $[-1, 1]$.

$$V \supset \bigcap_{k=1}^{n} V_k \quad (V_k = f_k^{-1}([-1,1]);\ \ k=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

同时可以认为泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性独立. 事实上, 如果泛函中有一个, 例如 f_n, 是其余各个泛函的线性组合:

$$f_n = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_{k_j} \quad (\alpha_j \neq 0;\ \ k_j = n;\ j=1,2,\cdots,m),$$

则

$$V_n \supset \bigcap_{j=1}^{m} \frac{1}{|\alpha_j| m} V_{k_j}.$$

因此, 在(4)中交集里没有 V_n 也行. 与引理 1 对应, 可以求出元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{X}$, 使得

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \cdots, n).$$

对于每个元素 $x \in \mathbf{X}$, 我们有表示式

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + x', \tag{5}$$

其中

$$\alpha_k = f_k(x), \quad f_k(x') = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{6}$$

在(5)式两边用泛函 f 作用后得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) + f(x') \quad (\beta_k = f(x_k);\ \ k=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

我们来证明 $f(x')=0$. 若不然, $f(x') \neq 0$, 则对于充分大的 $\alpha > 0$, 有 $|f(\alpha x')| > 1$, 即 $\alpha x' \notin V$, 因而, 由于(4), 对于某个 k, $\alpha x' \notin \lambda_k V_k$, 这与关系式(6)矛盾.

于是, (7)式给出 $f = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k$. 因为 $f_k \in \mathbf{Y}(k=1,2,\cdots,n)$. 由此推出 $f \in \mathbf{Y}$. 证毕.

注. 由上面证明的定理推出, 如果在 $\mathbf{Y}$ 中可分出全线性子集

$\tilde{\mathbf{Y}}$，它与整个$\mathbf{Y}$不重合，则拓扑$\sigma(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}})$实际上比拓扑$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$弱. 在这个意义下弱拓扑$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$唯一地确定了集$\mathbf{Y}$.

设$\mathbf{X}$是局部凸空间，其中拓扑为τ. 显然，弱拓扑$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*)$比拓扑$\tau$弱，所以，每个弱闭集，即在空间$(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*))$中闭的集在空间$\mathbf{X}$中也是闭的. 反之一般不成立，然而下列定理成立.

定理 2. 在任何局部凸空间$\mathbf{X}$中任何凸集按拓扑τ的闭包和弱闭包是重合的.

证. 只要证明，任何τ-闭的凸集E是弱闭的. 根据定理 2.6，对于任何$x \notin E$，可以找到$\mathbf{X}$上的连续实泛函g_x使得$\sup\{g_x(y): y \in E\} = \alpha_x < g_x(x)$. 这时，$E = \bigcap\limits_{x \notin E} \{y \in \mathbf{X}: \ g_x(y) \leqslant \alpha_x\}$. 显然，每一个集合$\{y \in \mathbf{X}: \ g_x(y) \leqslant \alpha_x\}$弱闭，故$E$也弱闭.

推论 1. 凸集对于任何与给定对偶关系协调的局部凸拓扑取的闭包是重合的.

推论 2. 设τ_1与τ_2是与同一个对偶关系协调的局部凸拓扑. 这时，如果有向列$x_\alpha \to x$（关于拓扑τ_1），则可以求出一个有向列$\{y_\beta\}$，其元素是$\{x_\alpha\}$中元素的凸组合，使得$y_\beta \to x$（关于拓扑τ_2）.

证. 点x显然落在集$\{x_\alpha\}$的τ_1-闭凸包E中. 由推论 1 知，E是$\{x_\alpha\}$的τ_2-闭凸包. 因而x是$\mathrm{co}(\{x_\alpha\})$的$\tau_2$-极限点.

推论 3. 设$\mathbf{X}$是局部凸空间，$\mathbf{X}_0$是$\mathbf{X}$中的子空间，则：

1) 弱拓扑$\sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0^*)$与空间$(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*))$在$\mathbf{X}_0$上的诱导拓扑一致.

2) 设$\mathbf{X}_0$在$\mathbf{X}$中闭. 如果集合E在$(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*))$中相对紧，则集$E \cap \mathbf{X}_0$也在$(\mathbf{X}_0, \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0^*))$中相对紧.

证. 1) 因为泛函$f \in \mathbf{X}^*$局限于$\mathbf{X}_0$上也是连续的，所以在$\mathbf{X}_0$上有$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) \leqslant \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0^*)$. 反过来的不等式由 Hahn-Banach 定理推出（参见定理 2），据此定理任何泛函$f_0 \in \mathbf{X}_0^*$可以延拓为泛

函 $f\in\mathbf{X}^*$.

2） 因为由推论 1 子空间 $\mathbf{X}_0$ 是 $\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*)$闭的，所以集 $E\cap\mathbf{X}_0$ 在 $(\mathbf{X},\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$ 中的闭包含在 $\mathbf{X}_0$ 中．由命题 1）得出，这个闭包也是 $\sigma(\mathbf{X}_0,\mathbf{X}_0^*)$-紧的.

按弱拓扑有界的集合叫做弱有界的.

定理 3. 在局部凸空间 $\mathbf{X}$ 中的有界集与 $(\mathbf{X},\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$ 中的有界集是一样的.

我们不去证明定理 3 了(参见 Schäffer-I)．在第八章中我们对其重要的特殊情形，即当 $\mathbf{X}$ 是赋范空间时来证明此结论.

3.2. 设 $\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle$ 是对偶对，对于 $E\subset\mathbf{X}$，我们定义

$$E^\circ=\{f\in\mathbf{Y}:\quad \text{对所有的 } x\in E,\ \ |f(x)|\leqslant 1\}.$$

子集 $E^\circ\subset\mathbf{Y}$ 叫做集 E 的极.

再给出一个定义．对于任意的集合 $E\subset\mathbf{X}$，在 E 上取值为 0 的泛函全体构成的集叫做零化子 $E^\perp$．显然，零化子是 $\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X})$-闭线性集．下面的引理给出了极的最简单的性质，其证明留给读者自行完成.

引理 2. 1）如果 $E_1\subset E_2$，则 $E_2^\circ\subset E_1^\circ$.

2）如果 $\lambda\neq 0$，则 $(\lambda E)^\circ=\lambda^{-1}E^\circ$.

3）$\left(\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}E_\xi\right)^\circ=\bigcap\limits_{\xi\in\Xi}E_\xi^\circ$.

4）如果 E 是 $\mathbf{X}$ 中的线性集，则 E° 与零化子 $E^\perp$ 重合.

在研究极的更深刻的性质之前，我们给出一个注解，它对今后的讨论极为重要．设 $\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle$ 是对偶对．每一个元素 $x\in\mathbf{X}$，我们可以把它看成是在 $\mathbf{Y}$ 上用公式

$$F_x(f)=\overline{f(x)}\qquad (f\in\mathbf{Y})^{*)}$$

---

*）参见在 II.2.2 中泛函乘以数的定义.

给出的线性泛函 F_x.

因为 $\mathbf{Y}$ 在 $\mathbf{X}$ 上是全的，所以映射 $\pi_{\mathbf{Y}}$: $x\in\mathbf{X}\to F_x$ 是 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}^+$ 中某个线性子集上的线性同构. 映射 $\pi_{\mathbf{Y}}$ 叫做 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}^+$ 中的典型嵌入或自然嵌入，以后将在定义赋范空间自反性时起重要作用. 现在还要指出，我们可以把 $\mathbf{X}$ 看成在 $\mathbf{Y}$ 上定义的泛函所成向量空间的全子集. 此外，$\langle\mathbf{Y},\ \mathbf{X}\rangle$ 也是对偶对，所以在 $\mathbf{Y}$ 上定义弱拓扑 $\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X})$，对此可以应用上面得到的所有结论.

引理 3. 如果 $E\subset\mathbf{X}$，则 E° 绝对凸且 $\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X})$-闭.

证. 绝对凸显然成立，而弱闭性可以从下列公式推出:

$$E^\circ=\bigcap_{x\in E}\{f\in\mathbf{Y}:\quad |f(x)|\leqslant 1\}.$$

设 $\langle\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\rangle$ 与 $\langle\mathbf{Y},\ \mathbf{Z}\rangle$ 是两个对偶对，并且 $\mathbf{X}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Y}^+$. 如果 $E\subset\mathbf{X}$，则称极 E° 在 $\mathbf{Z}$ 中的极 $E^{\circ\circ}$ 为集 E 在 $\mathbf{Z}$ 中的双极.

定理 4. 集 $E\subset\mathbf{X}$ 在 $\mathbf{Z}$ 中的双极 $E^{\circ\circ}$ 与集 E 的 $\sigma(\mathbf{Z},\mathbf{Y})$-闭绝对凸包重合.

证. 显然 $E\subset E^{\circ\circ}$. 用 G 表示集 E 的 $\sigma(\mathbf{Z},\mathbf{Y})$-闭绝对凸包. 由引理 3，$E^{\circ\circ}\supset G$. 如果 $F_0\in\mathbf{Z}$，$F_0\notin G$，则根据定理 2.6 的推论存在泛函 $\varphi\in(\mathbf{Z},\ \sigma(\mathbf{Z},\ \mathbf{Y}))^*$，使得 $\mathrm{Re}\varphi(F_0)>1$，且对于 $F\in G$，$|\varphi(F)|\leqslant 1$. 根据定理 1 可以求出 $f\in\mathbf{Y}$，使得对于任何 $F\in\mathbf{Z}$，$\varphi(F)=f(F)$. 因为 $E\subset G$，所以 $f\in E^\circ$. 另一方面，$|f(F_0)|\geqslant\mathrm{Re}\,f(F_0)>1$，由此 $F_0\notin E^{\circ\circ}$. 因此，$E^{\circ\circ}\subset G$，也就是说，$E^{\circ\circ}=G$.

定理 4 叫做双极定理. 如果 $\mathbf{Z}=\mathbf{X}$ 或 $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}^+$，即得两个最重要的特殊情形. 由定理 2 与 4 得:

推论 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是局部凸空间，在 $\mathbf{X}^*$ 中取集 E 的极 E°，在 $\mathbf{X}$ 中取双极 $E^{\circ\circ}$，则 $E^{\circ\circ}$ 与 E 的闭绝对凸包一致.

设 $\mathbf{X}$ 是局部凸空间. $\mathbf{X}$ 的子集 E 称为基本的，如果 $\overline{\mathscr{L}}(E)=\mathbf{X}$.

我们指出，E 是基本子集的充要条件为 $E^\perp=\{\mathbf{0}\}$.

推论 2. 设E是局部凸空间 $\mathbf{X}$ 中的任意子集，则元素 $x\in\mathbf{X}$ 属于$\overline{\mathscr{L}}(E)$的充要条件为对于任何 $f\in E^{\perp}$, $f(x)=0$, 其中 $E^{\perp}$ 是 $\mathbf{X}^*$ 中的零化子.

证. 由引理2, $\mathscr{L}(E)^{\circ}=\mathscr{L}(E)^{\perp}$. 根据推论1, $\mathscr{L}(E)^{\circ\circ}=\overline{\mathscr{L}}(E)$. 因为 $\mathscr{L}(E)^{\perp}$是线性集，所以 $\mathscr{L}(E)^{\circ\circ}=\mathscr{L}(E)^{\perp\circ}=\mathscr{L}(E)^{\perp\perp}$. 容易看出 $E^{\perp}=\mathscr{L}(E)^{\perp}$, 由此得出 $E^{\perp\perp}=\overline{\mathscr{L}}(E)$. 证毕.

象以前一样，设$\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle$是对偶对，$E$ 在 $\mathbf{X}$ 中的性质与极 E° 的性质有密切的关系.

定理 5. 集$E\subset\mathbf{X}$ 的极 E°是 $\mathbf{Y}$ 中的吸收集的充要条件为E在空间$(\mathbf{X},\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$中有界.

证. 必要性. 研究空间$(\mathbf{X},\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$中的零邻域$V$. 可以认为$V=f^{-1}(D)$ $(f\in\mathbf{Y})$, 其中 $D=\{z\in\mathbf{K}:\ |z|\leqslant 1\}$. 集合$V$是由一个泛函 f 组成的集合的极，即 $V=\{f\}^{\circ}$. 因为E是吸收集，所以，对于充分小的 $\lambda>0$ 有 $\lambda f\in E$. 由此再取极后即得

$$\frac{1}{\lambda}V=\frac{1}{\lambda}\{f\}^{\circ}=\{\lambda f\}^{\circ}\supset E^{\circ\circ}.$$

这个关系式表明 $E^{\circ\circ}$是有界集，从而集 $E\subset E^{\circ\circ}$更是有界的.

充分性. 设 $f\in\mathbf{Y}$. 研究邻域 $V=f^{-1}(D)$. 如果$E\subset\mathbf{X}$是有界集，则存在 $\lambda>0$, 使得 $\lambda E\subset V$. 取极后得

$$\frac{1}{\lambda}E^{\circ}=(\lambda E)^{\circ}\supset V^{\circ}.$$

但 $f\in V^{\circ}$, 于是 $\lambda f\in E^{\circ}$. 这就证明了 E°是吸收集.

3.3. 设$\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle$是对偶对. 研究关于集 $\mathbf{X}$ 拓扑化的问题. 极这一工具建立了 $\mathbf{Y}$ 中的集与 $\mathbf{X}$ 中的集之间的联系，由此，利用这工具来拓扑化是很适当的，即我们取 $\mathbf{Y}$ 中某些集合的极全体作为产生局部凸空间拓扑的邻域系. 为了构造满足定理 2.1 中条件的集系，考虑到定理 5的结果，应对$\mathbf{Y}$中的这些集合提出有界性要求.

于是，设$\mathfrak{U}$是 $\mathbf{Y}$ 中任一组 $\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X})$有界集合，并满足条件：

I) 集合 $\bigcup_{A\in\mathfrak{U}} A$ 在$(\mathbf{Y},\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X}))$中是基本的.

用$\mathfrak{V}_0$表示$\mathfrak{V}$中集合在 $\mathbf{X}$ 中的极的全体. 我们指出，$\mathfrak{V}_0$满足定理 2.1 中的条件(1). 取 $x\in\mathbf{X}$，并假设，对于它这个条件不成立. 这时，对于任何 $V\in\mathfrak{V}$ 及任何 $\lambda>0$，有 $x\in\lambda V$. 因为每一个$V=A^\circ$，其中 $A\in\mathfrak{U}$，则对于 $f\in A$，$|f(nx)|\leqslant 1\ (n\in N)$. 由此，如果 $f\in\bigcup_{A\in\mathfrak{U}} A$，则 $f(x)=0$. 故由定理 4 推论 2 得 $x=\mathbf{0}$.

于是，集系$\mathfrak{V}_0$满足定理 2.1中全部条件，故 $\mathbf{X}$ 成为局部凸空间. 所得 $\mathbf{X}$ 上的拓扑叫做 $\mathfrak{U}$ 中集上一致收敛的拓扑，或叫做 $\mathfrak{U}$-收敛拓扑.

如果$\mathfrak{U}$还满足下列二条件：

II) 如果 $A,B\in\mathfrak{U}$，则存在 $C\in\mathfrak{U}$ 使得 $A\cup B\subset C$;

III) 如果 $A\in\mathfrak{U}$，则对于任何 $\lambda\in K$，$\lambda A\in\mathfrak{U}$.

则容易指出，$\mathfrak{V}_0$是一致收敛拓扑的零邻域基. 这个拓扑也容易用半范数来描述，对于任何 $A\in\mathfrak{U}$，令

$$p'_A(x)=\sup\{|f(x)|:\quad x\in A\}.$$

则 p'_A 是集合 A°的 Minkowski 泛函，而半范数组$\{p'_A:\quad A\in\mathfrak{U}\}$确定了 $\mathfrak{U}$-拓扑.

从 $\mathbf{X}$ 的各种可能的拓扑中，姑且指出二种. 第一种，取所有可能的单点集作为 $\mathfrak{U}$，同时，$\mathfrak{U}$-收敛拓扑是弱拓扑 $\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. 第二种，取所有 $\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X})$有界集作为 $\mathfrak{U}$. 对应的拓扑叫做强拓扑，并记为 $\beta(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. 我们已经知道，与$(\mathbf{X},\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$共轭的是 $\mathbf{Y}$，而与$(\mathbf{X},\beta(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$ 共轭的可能是 $\mathbf{X}^+$中更广的子空间. 自然会产生描述与对偶关系$\langle\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\rangle$协调的所有 $\mathfrak{U}$-收敛拓扑的问题，我们在下段中来解决它. 暂时只作几个注解. 显然，$\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 可以交换位置，

并给 $\mathbf{Y}$ 以一致收敛拓扑.

设 $\mathbf{X}$ 是局部凸空间. 如果对于任何 $\varepsilon>0$ 可以找到$\mathbf{X}$中的零邻域U使得对于任何 $x\in U$ 及 $f\in G\subset\mathbf{X}^*$, $|f(x)|<\varepsilon$, 则称子集G是等度连续的. 显然, $\mathbf{X}^*$ 中集合是等度连续的充要条件为它包含在 $\mathbf{X}$ 的某个零邻域的极之中.

定理 6. 每个局部凸拓扑是在共轭空间的等度连续子集上一致收敛的拓扑.

证. 在任何局部凸空间 $\mathbf{X}$ 中存在闭绝对凸的零邻域基 $\mathfrak{B}$. 集合 $U^\circ(U\in\mathfrak{B})$是等度连续的, 而根据双极定理 $U^{\circ\circ}=U$(参见定理 4 推论 1), 定理证毕.

定理 6 表明给予局部凸拓扑的上述方法的通用性.

3.4. 于是, 我们来描述与给定对偶关系协调的所有拓扑.

引理 4. 设 $\mathbf{X}$ 是向量空间, 则空间 $\mathbf{X}^+$在拓扑$\sigma(\mathbf{X}^+,\mathbf{X})$ 中完备.

证. 设$\{f_\alpha\}$ 是 $\mathbf{X}^+$中的 Cauchy 有向列. 则对于任何 $x\in\mathbf{X}$, $\{f_\alpha(x)\}$是 Cauchy 有向数列, 从而对于任何 $x\in\mathbf{X}$, $f(x)=\lim f_\alpha(x)$ 存在. 显然, $f\in\mathbf{X}^+$且关于弱拓扑 $f_\alpha\to f$.

作一个关于有限维空间的注解, 我们在证明下面引理时要用到它, 如果我们研究有限维局部凸空间 $\mathbf{K}^n$(参见 1.3), 则下列形式的集组

$$V_m=\{\{\xi_i\}_{i=1}^n\in\mathbf{K}^n:\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|\leqslant m^{-1}\}\qquad(m=1,2,\cdots)$$

是零邻域基. 这时, 显然集合E在 $\mathbf{K}^n$ 中有界的充要条件为可以求出常数 $c>0$, 使得对于所有的 $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^n\in E$ 及 $i=1,2,\cdots,n$, $|\xi_i|\leqslant c$. 我们记得, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理在 $\mathbf{K}^n$ 中的有界集是相对紧的.

引理 5. 设 $\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle$ 是对偶对, 则任何 $\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y})$-有界集$E$是$(\mathbf{X},\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$中的完全有界集.

证. 设E是$\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y})$-有界集，$U=\{x\in\mathbf{X}: |f_i(x)|\leqslant 1, f_i\in\mathbf{Y}, f_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n\}$ 是$(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$中任一个零邻域. 每一个 $x\in\mathbf{X}$ 对应n维空间 $\mathbf{K}^n$ 之中的一个元素 $\omega(x)=(f_1(x), \cdots, f_n(x))$. 如果 $Q=V_1$，则显然 $\omega^{-1}(Q)=U$.

如果 $z\in\omega(\mathbf{X})$，则 $\omega^{-1}(z+Q)=x+U$，其中可以取 $\omega^{-1}(z)$ 中任意元素作为x. 因为集合E弱有界，所以集合 $\tilde{E}=\omega(E)$在 $\mathbf{K}^n$ 中有界，因此是相对紧的. 根据 Hausdorff 定理(或根据定理 1.4)存在 $z_1,\cdots,z_m\in\tilde{E}$，使得 $\tilde{E}\subset\bigcup_{k=1}^{m}(z_k+Q)$. 但这时，用 x_k 表示E中这样的元素：$\omega(x_k)=z_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$，则得

$$E\subset\omega^{-1}(\tilde{E})\subset\omega^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{m}(z_k+Q)\right)=\bigcup_{k=1}^{m}\omega^{-1}(z_k+Q)$$

$$=\bigcup_{k=1}^{m}(x_k+U),$$

从而定理证毕.

定理 7 (Alaoglu-Bourbaki). 如果$\mathbf{X}$是局部凸空间，则每一个零邻域U的极 U°是 $\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X})$-紧的.

证. 考察在 $\mathbf{X}^+$ 上的拓扑 $\sigma(\mathbf{X}^+, \mathbf{X})$. 因为$U$是$\mathbf{X}$中的吸收集，则根据定理 5，$U^\circ$在 $\mathbf{X}^+$ 中有界，所以也是完全有界的(引理 5). 由于引理 4，$\mathbf{X}^+$是完备的，而根据引理 3，U°是闭的，则 U°是完备的. 再根据定理 1.4，U°是紧的. 显然$U^\circ\subset\mathbf{X}^*$. 而在 $\mathbf{X}^*$上的拓扑 $\sigma(\mathbf{X}^+,\mathbf{X})$ 与 $\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X})$一致，因此 U° 是 $\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X})$-紧的.

设$\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle$是对偶对，用$\tau(\mathbf{X},\mathbf{Y})$表示在$\mathbf{Y}$中所有绝对凸 $\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X})$-紧集上一致收敛的拓扑. 由 3.3 中所述，$(\mathbf{X},\tau(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$是局部凸空间，拓扑 $\tau(\mathbf{X},\mathbf{Y})$叫做 Mackey 拓扑.

定理 8 (Mackey-Arens). 在$\mathbf{X}$上的局部凸拓扑τ与对偶关系$\langle\mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle$协调(即$(\mathbf{X}, \tau)^*=\mathbf{Y}$)的充要条件为 $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\leqslant\tau\leqslant$

$\tau(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. 同时，$\tau$ 是在 $\mathbf{X}$ 中某一组绝对凸 $\sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$-紧集上一致收敛的拓扑.

证. 如果$(\mathbf{X}, \tau)^* = \mathbf{Y}$，则 τ 是集组U°上的一致收敛拓扑，其中U是拓扑 τ 中所有可能的零邻域. 每个U°是绝对凸的，而根据定理7，它也是 $\sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$-紧的. 由此 $\tau \leqslant \tau(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. 因为$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$是一致收敛拓扑中最弱的(与给定对偶关系协调的)，所以 $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leqslant \tau$.

为了证明定理，我们还要验证 Mackey 拓扑 $\tau(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 与对偶关系$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$协调. 用 $\mathbf{X}^*$ 表示$(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))^*$，显然 $\mathbf{X}^* \supset \mathbf{Y}$. 我们来证明反包含关系. 我们指出，如果$E$是$(\mathbf{Y}, \sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X}))$中的紧集，则$E$也是在更大一些的的空间$(\mathbf{X}^*, \sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$中的紧集. 在下面的讨论中，$\mathbf{X}$中集的极在空间 $\mathbf{X}^*$中取，而 $\mathbf{X}^*$ 中集的极在 $\mathbf{X}$ 中取.

研究泛函 $\varphi \in \mathbf{X}^*$，集合 $V = \varphi^{-1}(D)$，其中 $D = \{z \in \boldsymbol{K}: |z| \leqslant 1)$ 是空间$(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$中的零邻域. 这时，根据 Mackey 拓扑的定义，可以找到 $\mathbf{Y}$ 中的绝对凸$\sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$-紧集 A，使得$V \supset A^\circ$，由此 $V^\circ \subset A^{\circ\circ}$.由定理 4，$A^{\circ\circ}$是A的 $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$闭包. 然而$A$是 $\sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$-紧的，从而正如我们已经指出，它也是 $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$-紧的. 由此 $A = A^{\circ\circ}$. 因为 $\varphi \in V^\circ$，所以 $\varphi \in A$，从而更有 $\varphi \in \mathbf{Y}$. 于是 $\mathbf{X}^* = \mathbf{Y}$. 定理完全证毕.

通常，从 Mackey-Arens 定理开始对局部凸空间理论作更精细的研究，它首先与吸囿性局部凸空间及桶形局部凸空间的概念以及自反局部凸空间相联系. 然而我们不去讨论拓扑向量空间的一般理论，而转到详细研究赋范空间上，这是本书范围内在泛函分析应用中最重要的一类局部凸空间. 但应该指出，许多泛函分析应用与讨论非赋范空间的局部凸空间有关. 首先，广义函数或分布空间在数学物理中就有各种应用(参见Бирман 等; Гельфанд与Виленкин; Гельфанд 与 Шилов; Rudin; Hormander; Schwartz; Шилов-II; Edwards).

第四章 赋范空间

§1. 基本定义及赋范空间*)最简单的性质

1.1. 赋范空间理论及其许多的应用与分支是泛函分析中内容最丰富的部分，所以，在本书中我们只能提到这一部分的某些方面，特别注意在泛函方程解这方面的应用.

我们知道，所谓向量空间 $\mathbf{X}$ 上的范数是个非负泛函 $\|\cdot\|$，它对于每一个元素 $x\in\mathbf{X}$ 都对应一个数 $\|x\|\geqslant0$——称为元素 x 的范数**)，满足下列条件：

1) $\|x\|=0$ 等价于 $x=\mathbf{0}$;

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|\ \lambda\in K$ （范数的齐次性）;

3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ （三角不等式）.

具有确定范数的向量空间 $\mathbf{X}$ 叫做赋范空间. 如果我们给予它由这个范数生成的拓扑（即仅由一个范数组成的半范数组所生成的拓扑，参看 III. 2.1)，则 $\mathbf{X}$ 变为局部凸空间. 这个拓扑叫做空间 $\mathbf{X}$ 的范数拓扑. 现在我们来讨论怎样把局部凸空间理论中的一些概念和结果搬到这个重要特殊情况上.

1) 赋范空间 $\mathbf{X}$ 是可度量化的局部凸空间.

事实上，如果对于任何 $x, y\in\mathbf{X}$，令

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

---

*) 赋范空间理论的基本概念是由 Banach[1]引进的，参看 Banach 的著作.

**) 如果同时考察几个赋范空间，则为了使一个空间中的范数与另一个空间的范数相区别，我们用这个空间作为下标，例如 $\|x\|_{\mathbf{X}}$.

则 ρ 是 $\mathbf{X}$ 上的度量．因为，$\rho(x,y)=0$ 表示 $\|x-y\|=0$，根据条件 1）等价于等式 $x-y=\mathbf{0}$，而这也等价于 $x=y$．距离的对称性由定义本身显然成立．最后，距离的三角不等式是范数三角不等式的简单推论：

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

显然，由这个度量在 $\mathbf{X}$ 上生成的拓扑与作为局部凸空间的 $\mathbf{X}$ 的拓扑是一致的．

如果 $\|x_n-x\|\to 0$，则称序列 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 x．显然，按范数收敛与按范数拓扑收敛是一致的．

2）闭球 $B_{1/n}=\{x\in\mathbf{X}:\ \|x\|\leqslant 1/n\}(n\in\boldsymbol{N})$ 构成局部凸空间的零邻域基．

3）$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|$．

这个性质由 II.3.2c) 推出．

4）$\|x\|$ 是 x 的连续函数，即如果 $x_n\to x$，则 $\|x_n\|\to\|x\|$．

5）集 E 有界的充要条件为可以找到一个常数 M，使得对于任意的 $x\in E$，$\|x\|\leqslant M$．

这可由 2）及有界集的定义（III.1.4）推出．

6）收敛序列有界．

这可以由 4）及 5）推出．

可以利用某个范数给出拓扑的拓扑向量空间（如前面所述）叫做可赋范的．现在我们指出拓扑向量空间类中赋范空间的地位．

定理 1（Колмогоров）．Hausdorff 拓扑向量空间 $\mathbf{X}$ 是可赋范的充要条件为在 $\mathbf{X}$ 中存在有界凸零邻域 V_0．

证．只需证明充分性．可以认为，邻域 V_0 是绝对凸和闭的（否则我们研究交 $(-\bar{V}_0)\cap\bar{V}_0$）．对于 $x\in\mathbf{X}$，令

$$\|x\|=p_{V_0}(x),$$

其中 p_{V_0} 是集 V_0 的 Minkowski 泛函. 则 p_{V_0} 具有范数的所有性质,除了 $\|x\|=0$ 蕴涵 $x=\mathbf{0}$ 这一条性质. 我们来证明这条范数性质也成立. 事实上,如果 $x\neq\mathbf{0}$,则因为 $\mathbf{X}$ 是可分离空间,可以找到一个零邻域 V, 不包含 x. 由于集合 V_0 的有界性, 可以找到这样的 $\lambda>0$,使得 $V_0\subset\lambda V$. 于是,显然 $\lambda x\notin V_0$. 根据引理 III. 2. 1 给出

$$\|x\|=p_{V_0}(x)=\frac{1}{\lambda}p_{V_0}(\lambda x)>\frac{1}{\lambda},$$

从而 $\|x\|\neq 0$.

因此, $\mathbf{X}$ 成为赋范空间,其中(再根据引理 III. 2. 1)集合 V_0 是闭单位球.

我们来证明, $\mathbf{X}$ 中原有的拓扑与由范数定义的拓扑是一致的, 为此要验证球的集合, 即形式为 $\lambda V_0(\lambda>0)$ 的集的全体在原有的拓扑中构成基本零邻域系. 这是集合 V_0 有界性的直接推论,因为对于任何零邻域 V,可以找到 $\lambda>0$,使得 $\lambda V_0\subset V$,定理证毕.

A. H. Колмогоров 的工作[1](定理 1 是其中之一)考察了抽象拓扑向量空间.

1. 2. 现在举几个赋范空间的例子.

1) 有限维空间 $\mathbf{K}^n$. $\mathbf{K}^n$ 上的范数可以用各种方式定义(它们在某种意义下是等价的). 例如,如果 $x=\{\xi_i\}_{i=1}^n$,则

$$\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

这个范数叫做欧氏范数. 也可以用下列公式引进范数: $\|x\|=\max\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|$ 或 $\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|$.

2) 连续函数空间 $\mathbf{C}(K)$,如果用

$$\|x\|=\max_{t\in K}|x(t)|$$

作为范数即成为赋范空间.

3）在集T上有界函数空间$\mathbf{l}^{\infty}(T)$是赋范空间，其中范数用下式定义：

$$\|x\|=\sup_{t\in T}|x(t)|.$$

4） l 次连续可微函数空间 $\mathbf{C}^{(l)}[a,b]$是赋范空间，其中范数为：

$$\|x\|=\sum_{k=0}^{l}\max_{t\in[a,b]}|x^{(k)}(t)|.$$

我们指出，空间$\mathbf{S}(0,1)$与$\mathbf{s}$不是赋范空间，在前一章中比较仔细地研究了它们，下面我们还会遇到其它赋范空间的例子.

1.3. 设$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是赋范空间，U是$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$内的线性算子. 如果对于任何$x\in\mathbf{X}$有$\|U(x)\|=\|x\|$，则称U是线性等距算子. 如果存在线性等距算子把$\mathbf{X}$映射到$\mathbf{Y}$上，则称空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是线性等距的. 显然，当$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是度量空间时，对应的等距算子U实现它们的等距，并且当$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是向量空间时，实现它们的同构. 为此只要证明，从算子U的等距性可以推出其一一对应性. 事实上，如果$U(x)=U(y)$，则$\|x-y\|=\|U(x-y)\|=\|U(x)-U(y)\|=0$.

以后我们通常不区分线性等距的空间. 如果作为局部凸空间，赋范空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是同构的，即存在$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$上的线性同胚映射，则称$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是同构的. 同构的概念比等距概念弱得多.

设在向量空间$\mathbf{X}$中有两个范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$，如果可以找到这样的常数$k_1,k_2>0$使得对于任何$x\in\mathbf{X}$有

$$k_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant k_2\|x\|_1,$$

则称这两个范数是等价的.

容易看出，范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价的充要条件为$\mathbf{X}$到$\mathbf{X}$上的恒等映射是赋范空间$(\mathbf{X},\|\cdot\|_1)$与$(\mathbf{X},\|\cdot\|_2)$的同构映射.

赋范空间$\mathbf{X}$中的线性子集关于在其上诱导的范数是赋范空

间，我们称这个赋范空间是赋范空间 $\mathbf{X}$ 的子空间.

1.4. 在赋范空间中完备空间具有特别重要的作用，我们称它为 Banach 空间或 B-空间（以波兰数学家 Banach 命名）.

用范数的术语，自收敛序列 $\{x_n\}$ 表为 $\|x_m-x_n\|\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0$. 所以赋范空间 $\mathbf{X}$ 完备性的条件表示为：从 $\|x_m-x_n\|\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0$ 推出存在 $x_0\in\mathbf{X}$，使得 $x_n\to x_0$.

显然，空间 $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{C}(K)$, $\mathbf{C}^{(l)}[a,b]$, $\mathbf{l}^\infty(T)$ 是完备的，所以它们都是 Banach 空间.

如果给定的赋范空间 $\mathbf{X}$ 不完备，则它可以嵌入到完备度量空间 $\hat{\mathbf{X}}$ 中（定理 I.4.1），仅在 $\mathbf{X}$ 上有定义的代数运算和范数可以唯一地扩充到 $\hat{\mathbf{X}}$ 上使之变为 B-空间.

为了证明这一点，可以利用 I.4.4 中所作的注，使空间 $\mathbf{X}$ 在其完备化 $\hat{\mathbf{X}}$ 中稠密.

设 $x,y\in\hat{\mathbf{X}}$. 存在 $\mathbf{X}$ 中的元素列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 分别收敛于 x 和 y. 在空间 $\mathbf{X}$ 中加法运算是有定义的，所以等式 $z_n=x_n+y_n(n=1,2,\cdots)$ 有意义. 因为

$$\|z_n-z_m\|\leqslant\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0,$$

所以序列 $\{z_n\}$ 在空间 $\mathbf{X}$ 中自收敛，从而它在 $\hat{\mathbf{X}}$ 中也是自收敛的. 因此存在元素 $z=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\in\hat{\mathbf{X}}$. 根据定义，假设 $x+y=z$. 不难证明，元素 z 的定义不依赖于序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的取法. 事实上，设 $x'_n\to x$, $y'_n\to y$ $(x'_n, y'_n\in\mathbf{X};\ n=1,2,\cdots)$ 且 $z'_n=x'_n+y'_n$. 因为

$$\|z'_n-z_n\|\leqslant\|x'_n-x_n\|+\|y'_n-y_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}z'_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$.

由此特别推出，对于 $\mathbf{X}$ 中元素的和的新定义与原有的一致. 事实上，如果 $x,y\in\mathbf{X}$，则可以设 $x_n=x$, $y_n=y$ $(n=1,2,\cdots)$，于是 $z=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y$，这里的 $+$ 号按原来意义理解.

用类似的方法可以在 $\hat{\mathbf{X}}$ 中定义元素与数的乘法.

对于 $x\in\hat{\mathbf{X}}$，令

$$\|x\|=\rho(x,\mathbf{0})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\mathbf{0})=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|$$

$$(x_n\to x;\quad x_n\in\mathbf{X};\ n=1,2,\cdots).$$

不难证实，$\hat{\mathbf{X}}$ 满足赋范空间的公理. 由上面等式还推得范数定义的单值性.

如果利用这些运算的连续性不难得到元素的和的定义的单值性及元素乘以数的定义的单值性. 这些讨论不复杂，留给读者自行完成.

今后我们讲到赋范空间的完备化空间时，将认为后者已经按上述方法赋予线性运算和范数.

1.5. 在赋范空间中可以研究无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k=x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots \tag{1}$$

如果级数(1)的部分和($s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$) 序列$\{s_n\}$收敛，则称级数(1)收敛. 这个序列的极限叫做级数的和: $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.

在 B-空间中从级数"绝对"收敛可以推出一般收敛，即如果数值级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|=\|x_1\|+\|x_2\|+\cdots+\|x_n\|+\cdots \tag{2}$$

收敛，则级数(1)也收敛，并且有估计式 $\left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\right\|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$.

事实上，如果 $m>n$，则

$$s_m-s_n=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m,$$

因而

$$\|s_m-s_n\|\leqslant\|x_{n+1}\|+\|x_{n+2}\|+\cdots+\|x_m\|.$$

因为级数(2)收敛，当 n 足够大时这不等式右端充分小．所以，序列$\{s_n\}$自收敛．从而由于空间的完备性，这序列收敛．在不等式

$$\|s_n\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|$$

中，令 $n\to\infty$取极限并利用范数的连续性，即得所要的估计．

1.6. 下面我们要比较详细地研究有限维赋范空间．我们将证明：代数维数相同的所有有限维局部凸空间相互同构．从而都与赋欧氏范数的空间 $\mathbf{K}^n$ 同构．

引理 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是有限维向量空间，$\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}$ 上泛函的全线性子集，则 $\mathbf{Y}$ 与代数共轭 $\mathbf{X}^+$一致．

证. 设$\{x_i\}_{i=1}^n$是 $\mathbf{X}$ 中的代数基(参看 II. 1. 4)．因为 $\mathbf{X}$ 可以看作 $\mathbf{Y}$ 上的泛函组成的集合，所以，根据引理 III. 3. 1 可以找到与$\{x_i\}_{i=1}^n$双正交的泛函系$\{f_i\}_{i=1}^n\subset\mathbf{Y}$，即

$$f_j(x_k)=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ 1, & j=k\end{cases}\qquad (j,k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

于是，由$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i=0$可以推出对于任意的$k$，$\lambda_k=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right)(x_k)=0$，所以向量 f_i 线性独立．由此，空间$\mathbf{Y}$的维数$\geqslant n$．另一方面，$\mathbf{Y}\subset\mathbf{X}^+$，而 $\mathbf{X}^+$ 的维数等于 n，故 $\mathbf{Y}$ 的维数为 n．根据熟知的有限维空间的子空间的性质，$\mathbf{Y}=\mathbf{X}^+$．

定理 2. 所有具有相同代数维数的(Hausdorff)有限维局部凸空间相互同构．

证. 只要证明在 n 维空间 $\mathbf{X}$ 上任意二个局部凸拓扑一致．为此我们证明，任何局部凸拓扑 τ 与弱拓扑$\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^+)$一致．

根据引理1，$(\mathbf{X},\tau)^*=\mathbf{X}^+$，由此 $\tau\geqslant\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^+)$．下面证明反向不等式也成立．在 $\mathbf{X}$ 中指定一个基$\{x_i\}_{i=1}^n$，并研究在 $\mathbf{X}^+$中的双正交系$\{f_i\}_{i=1}^n$，则$\{f_i\}_{i=1}^n$是$\mathbf{X}^+$中的基(参看引理 1 的证明)．如

果有向列 $x_\alpha \to x$ $(\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^+))$且

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, \qquad x_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(\alpha)} x_i,$$

则对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, $\xi_i^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha]{} \xi_i$. 事实上,对于任何 f_i 有

$$\xi_i^{(\alpha)} = f_i(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha]{} f_i(x) = \xi_i.$$

现在，由于代数运算的 τ-连续性得到，按拓扑 τ，$x_\alpha \to x$. 由此 $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^+) \geqslant \tau$. 定理证毕.

因为 $\mathbf{K}^n$ 具有欧氏范数,它是赋范空间. 所以，我们得知，任何有限维局部凸空间是可赋范的.

其次，可以把有限维赋范空间 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{K}^n$ 看成是一致的. 设 $e_k = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$(1 在第 k 位处). 于是,如果 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, 则

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

把定理 2 用于具有范数 $\|x\| = \max\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|$ 的空间 $\mathbf{K}^n$, 得

推论 1. 1) 序列 $\{x_m\} : x_m = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k \in \mathbf{X}$ 收敛于元素 $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in \mathbf{X}$ 的充要条件为对于 $k = 1, 2, \cdots, n$, 序列按坐标收敛: $\xi_k^{(m)} \xrightarrow[m \to \infty]{} \xi_k$.

2) 集合 $E \subset \mathbf{X}$ 有界的充要条件为存在常数 $M > 0$, 使得对于任何 $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in E$ 有

$$|\xi_k| \leqslant M \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

由推论 1 及 Bolzano-Weierstrass 定理得

推论 2. 有限维赋范空间X 中的集合E相对紧的充要条件为它是有界的.

事实上,如果$\{x_m\}$是有界序列, 则令 $x_m=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})$ $(m=1,2,\cdots)$. 根据推论 1 可知,对于每一个 $j=1,2,\cdots,n$, 数列$\{\xi_j^{(m)}\}$有界. 因此, 由熟知的 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在自然数序列 $m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots$, 使得

$$\xi_j^{(m_k)}\xrightarrow[k]{}\xi_j^{(0)} \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

由于推论 1, $x_{m_k}\to x_0=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$,

推论 3. 有限维赋范空间$\mathbf{X}$是完备的.

事实上,如果$\{x_m\}$是自收敛序列,则它是有界的, 从而根据前一个推论可以找出收敛于某个元素 $x_0\in\mathbf{X}$ 的子序列$\{x_{m_k}\}$. 于是由引理 I. 4. 1, $x_m\to x_0$.

推论 4. 赋范空间$\mathbf{X}$中的有限维线性集 $\mathbf{X}_0$ 是闭的.

推论 5. 设$\mathbf{X}$是赋范空间, $\mathbf{X}_0$是$\mathbf{X}$中的有限维线性集. 则对于任何元素 $x\in\mathbf{X}$, 在$\mathbf{X}_0$中可以找到元素 x_0, 使得它到 x 的距离等于由 x 到 $\mathbf{X}_0$ 的距离, 即$\|x-x_0\|=\rho(x,\mathbf{X}_0)$.

事实上, 对于每一个 $m=1,2,\cdots$, 在 $\mathbf{X}_0$ 中可以找到元素 x_m, 使得$\|x-x_m\|<\rho(x,\mathbf{X}_0)+1/m$. 序列$\{x_m\}$显然是有界的,因为

$$\|x_m\|\leqslant\|x\|+\|x-x_m\|<\|x\|+\rho(x,\mathbf{X}_0)+1 \qquad (m=1,2,\cdots),$$

从而根据推论 2, 可以从其中找出收敛的子序列$\{x_{m_k}\}$: $x_{m_k}\to x_0$.

显然, $\|x-x_0\|\leqslant\rho(x,\mathbf{X}_0)$, 又因为 $x_0\in\mathbf{X}_0$, 所以反向的不等式也成立.

作为上述结论的应用, 考察空间 $\mathbf{C}[a, b]$及其有限维子空间 $\mathbf{P}^n$, 其中元素为次数不高于 n 的代数多项式. 根据推论 5, 对于任何连续函数 x, 在 $\mathbf{P}^n$ 中存在多项式 x_0, 使得

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-x_0(t)|=\|x-x_0\|=\rho(x,\mathbf{P}^n),$$

也就是说与所有其余次数不高于 n 的多项式相比，x_0 是给出函数 x 最佳逼近的多项式.

1.7. 最后指出，定理 2 的推论 2 的结果是可逆的，即要证明赋范空间中任何有界集相对紧的充要条件为空间是有限维的*).

先来证明一个重要引理.

引理 2. 设 $\mathbf{X}$ 是赋范空间，$\mathbf{X}_0\neq\mathbf{X}$ 是其闭子空间. 对于任何 $\varepsilon>0$，存在规格化元素 x_0**)，使得

$$\rho(x_0, \mathbf{X}_0)>1-\varepsilon.$$

证. 因为 $\mathbf{X}_0$ 是不与 $\mathbf{X}$ 重合的闭集，所以存在元素 $\bar{x}\in\mathbf{X}$，使得 $\rho(\bar{x}, \mathbf{X}_0)=d>0$. 其次在 $\mathbf{X}_0$ 中可以找到元素 x'，使得

$$\|\bar{x}-x'\|<\frac{d}{1-\varepsilon}.$$

令

$$x_0=\frac{\bar{x}-x'}{\|\bar{x}-x'\|}=\alpha(\bar{x}-x')$$

$$\left(\alpha=\frac{1}{\|\bar{x}-x'\|}>\frac{1-\varepsilon}{d}\right)$$

显然，$\|x_0\|=1$. 此外，如果 $x\in\mathbf{X}_0$，则

$$\|x_0-x\|=\|\alpha\bar{x}-\alpha x'-x\|=\alpha\left\|\bar{x}-\left(x'+\frac{x}{\alpha}\right)\right\|$$

$$\geqslant\alpha d>\frac{1-\varepsilon}{d}d=1-\varepsilon.$$

注. 具有性质 $\rho(x_0, \mathbf{X}_0)=1$ 的规格化元素 x_0，按熟知意义它是垂直于 $\mathbf{X}_0$ 的(例如，在欧氏空间中满足这个条件的向量 x_0 实际上与 $\mathbf{X}_0$ 垂直). 故我们称上述引理为关于几乎垂直的引理.

定理 3. 赋范空间 $\mathbf{X}$ 中每一个有界集是相对紧的充要条件为

---

*) 这个结果是 F. Riesz 得出的.

**) 即其范数等于 1 的元素.

$\mathbf{X}$ 是有限维的.

条件的**充分性**已经证明(定理 2 推论 2).

必要性. 考察任意的规格化元素 $x_1\in\mathbf{X}$, 用 $\mathbf{X}_1$ 表示此元素的线性包 $\mathscr{L}(\{x_1\})$, 即形如 λx_1 的元素的总体.

设 $\mathbf{X}$ 是无限维的, 则 $\mathbf{X}_1\neq\mathbf{X}$. 根据几乎垂直引理, 可以找到一个规格化元素 $x_2\in\mathbf{X}$ 使得 $\rho(x_2, \mathbf{X}_1)>\frac{1}{2}$. 构造元素 x_1, x_2的线性包, 并用 $\mathbf{X}_2$ 表示. 继续这样讨论下去, 得到元素序列$\{x_n\}$及子空间序列 $\mathbf{X}_1\subset\mathbf{X}_2\subset\cdots\subset\mathbf{X}_n\subset\cdots$, 使得

$$\|x_n\|=1, \quad \mathbf{X}_n=\mathscr{L}(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}),$$

$$\rho(x_{n+1}, \mathbf{X}_n)>\frac{1}{2} \qquad (n=1, 2, \cdots). \tag{3}$$

因为序列$\{x_n\}$有界, 所以从其中可以找出收敛的子序列. 然而根据(3),

$$\|x_n-x_m\|>\frac{1}{2} \quad (n>m; \quad m, n=1, 2, \cdots),$$

因此无论是序列$\{x_n\}$本身还是其子序列都不可能收敛, 定理证毕.

推论. 局部凸空间 $\mathbf{X}$ 是有限维的, 当且仅当 $\mathbf{X}$ 中存在完全有界的零邻域.

证. 如果局部凸空间 $\mathbf{X}$ 是有限维的, 则根据定理 2, 它是可赋范的, 于是根据定理 3 空间 $\mathbf{X}$ 中单位球的闭包是紧的.

反之, 如果 V_0 是完全有界的零邻域, 则根据定理 1, 空间 $\mathbf{X}$ 是可赋范的. 因为存在 $\lambda>0$, 使得单位球 $B_{\mathbf{X}}=\{x\in\mathbf{X}:\|x\|\leqslant 1\}\subset\lambda V_0$, 所以集合 $B_{\mathbf{X}}$ 完全有界, 故任何有界集完全有界. 重复定理 3 的证明, 容易得到 $\mathbf{X}$ 是有限维的.

1.8. 在本节最后, 我们还要引进赋范空间理论中的一系列重要概念.

设 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 是赋范空间. 我们赋其直积 $\mathbf{Z}=\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2$ 以下列的范数: 如果 $z=(x_1, x_2)$, $x_1\in\mathbf{X}_1$, $x_2\in\mathbf{X}_2$, 则

$$\|z\|=\max(\|x_1\|,\ \|x_2\|).$$

如果 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 是 B-空间，则赋范空间 $\mathbf{Z}$ 显然是完备的.

设 $\mathbf{X}$ 是赋范空间，$\mathbf{X}_0$ 是 $\mathbf{X}$ 中的闭子空间. 下面我们研究商空间 $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$(参见 II.1.6). 我们指出，由于 $\mathbf{X}_0$是闭的，类 $\bar{x}=x+\mathbf{X}_0$ 是 $\mathbf{X}$ 中的闭集.

如果对于 $\bar{x}\in\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$，令

$$\|\bar{x}\|=\inf_{x\in\bar{x}}\|x\|,$$

则 $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ 成为赋范空间. 实际上，如果 $\bar{x}=\mathbf{0}$，则作为 $x\in\bar{x}$ 可以取空间 $\mathbf{X}$ 中的零元素，所以$\|\bar{x}\|=0$. 反之，如果$\|\bar{x}\|=0$，则由$\|\bar{x}\|$的定义推出，存在序列$\{x_n\}\subset\bar{x}$ 使得 $x_n\to\mathbf{0}$. 因为类 $\bar{x}$ 是闭集，所以和$\{x_n\}$一起它还包含此序列的极限点，即 $\mathbf{0}\in\bar{x}$. 从而 $\bar{x}$ 是 $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ 中的零元素.

范数的齐次性也不难验证. 考察 $\lambda\neq0$ 的情形，有

$$|\lambda|\,\|\bar{x}\|=|\lambda|\inf_{x\in\bar{x}}\|x\|=\inf_{x\in\bar{x}}\|\lambda x\|.$$

但是，当 x 取遍类 $\bar{x}$ 时，元素 λx 也取遍类 $\lambda\bar{x}$，由此推出，

$$\inf_{x\in\bar{x}}\|\lambda x\|=\inf_{z\in\lambda\bar{x}}\|z\|=\|\lambda\bar{x}\|.$$

最后证明三角不等式. 对于任意的 $x\in\bar{x}, y\in\bar{y}$ ($\bar{x},\bar{y}\in\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$)可得 $x+y\in\bar{x}+\bar{y}$. 所以

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|\leqslant\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

在上式右端取下确界，即得所要的不等式.

对于每个元素 $x\in\mathbf{X}$，对应一个包含此元素的类 $\bar{x}=x+\mathbf{X}_0=\varphi(x)$，我们得到映射 φ. 此映射叫做空间 $\mathbf{X}$ 到商空间 $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ 上的自然同态(或典型同态). 显然，算子 φ 是线性的. 因为

$$\|\varphi(x_0)\|=\inf_{x\in\varphi(x_0)}\|x\|\leqslant\|x_0\|\quad(x_0\in\mathbf{X}),$$

算子 φ 是连续的. 此外，对于任何 $\bar{x}\in\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$，可以找到 $x\in\mathbf{X}$ 使得

$$\bar{x}=\varphi(x),\quad \|\bar{x}\|\geqslant\frac{1}{2}\|x\|. \tag{4}$$

利用上述性质，我们来证明，如果所给的空间 $\mathbf{X}$ 是完备的，则商空间 $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ 也是完备的．事实上，设$\{\bar{x}_n\}$是空间 $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ 中元素的自收敛序列．不妨设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\bar{x}_{n+1}-\bar{x}_n\|$是收敛的，否则可以选取子序列，使此级数收敛．与(4)相对应可以找到元素 $x_n\in\mathbf{X}$ 使得

$$\bar{x}_{n+1}-\bar{x}_n=\varphi(x_n),$$

$$\|\bar{x}_{n+1}-\bar{x}_n\|\geqslant\frac{1}{2}\|x_n\|\qquad(n=0,1,\cdots,\ \bar{x}_0=0).$$

显然，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$收敛．所以，由于空间 $\mathbf{X}$ 的完备性，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ 也收敛．用 x 表示它的和且令 $\bar{x}=\varphi(x)$，则

$$\bar{x}=\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(x_n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\bar{x}_{n+1}-\bar{x}_n)=\lim_{n\to\infty}\bar{x}_n,$$

即序列$\{\bar{x}_n\}$收敛于元素 $\bar{x}$.

1.9. 设P是把赋范空间 $\mathbf{X}$ 变到其闭子空间 $\mathbf{Y}$ 上的线性连续算子．如果P使 $\mathbf{Y}$ 的元素保持不变，即对于任一个 $y\in\mathbf{Y}$，$P(y)=y$，则称P是（由 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 上的）投影算子.

如果存在一个从B-空间 $\mathbf{X}$ 到其闭子空间 $\mathbf{Y}$ 上的投影算子 P，则称 $\mathbf{Y}$ 在 $\mathbf{X}$ 中是可补的．容易看出，$\mathbf{X}/\mathbf{Y}=P^{-1}(0)$*⁾．关于子空间上投影算子的存在性问题我们在下面研究（参见 V.3.5）.

§2. 几个辅助不等式

在这一节中我们建立几个不等式，它们在研究一些具体的B-空间时有用（参见 §3）．这节材料的参考文献见 Hardy, Litter-

*⁾ 等式表示 B-空间的同构.

wood, Polya.

2.1. 先证明一个引理.

引理 1. 设 p 与 q 是正实数, 并满足关系式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{1}$$

对于任意的数 a 与 b, 下列不等式成立:

$$|ab|\leqslant\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{2}$$

证. 可以认为 a 与 b 是正数. 令 $m=1/p$(则 $0<m<1$)并研究函数

$$\varphi(t)=t^m-mt\quad(t>0).$$

因为 $\varphi'(t)=m(t^{m-1}-1)$, 所以当 $t=1$ 时 $\varphi(t)$取最大值. 因而 $\varphi(t)\leqslant\varphi(1)\quad(t>0)$, 由此 $t^m-1\leqslant m(t-1)$. 用 $t=a^p/b^q$ 代入这个不等式得

$$ab^{-q/p}-1\leqslant(1/p)(a^pb^{-q}-1),$$

对上式各项乘以 b^q, 由于 $q-q/p=1$, 即知(2)成立.

2.2. Hölder **不等式.** 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是任意的一些数, 则有不等式:

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k\eta_k|\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right\}^{1/q}$$

(p 与 q 满足关系式(1)).

证. 记$A^p=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p$, $B^q=\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q$. 可以认为 $A,B>0$. 令 $\xi'_k=\xi_k/A$, $\eta'_k=\eta_k/B$. 于是, 根据不等式(2)

$$|\xi'_k\eta'_k|\leqslant\frac{|\xi'_k|^p}{p}+\frac{|\eta'_k|^q}{q},$$

两边求和后得

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi'_k\eta'_k| \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}|\xi'_k|^p}{p} + \frac{\sum_{k=1}^{n}|\eta'_k|^q}{q}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

由此

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k\eta_k| \leqslant AB,$$

证毕.

注. Hölder 不等式对无穷多个(可数个)项之和也成立，即不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right]^{1/q} \tag{3}$$

成立，并且从右端两级数收敛可推出左端级数收敛.

事实上，对于(3)式级数的部分和的不等式已经证明成立，取极限后即得(3).

2.3. Hölder 积分不等式. 设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是在测度空间 (T, Σ, μ) 上的可测函数，则有不等式:

$$\int_T |x(t)y(t)|d\mu \leqslant \left[\int_T |x(t)^p|d\mu\right]^{1/p}\left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{1/q}$$

(p 与 q 满足关系式(1)).

证. 其证明实际上是重复求和的 Hölder 不等式的证明. 即可以认为

$$0 < A^p = \int_T |x(t)|^p d\mu < \infty,$$

$$0 < B^q = \int_T |y(t)|^q d\mu < \infty,$$

因为如果有一个积分等于 0 或无穷，则不等式显然成立.

令 $\tilde{x}(t)=x(t)/A$, $\tilde{y}(t)=y(t)/B$. 对于每一个 $t\in T$, 根据(2)得不等式

$$|\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)|\leqslant\frac{|\tilde{x}(t)|^p}{p}+\frac{|\tilde{y}(t)|^q}{q},$$

对它积分, 便得

$$\int_T|\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)|d\mu\leqslant\frac{1}{p}\int_T|(\tilde{x}(t)|^p d\mu+\frac{1}{q}\int_T|\tilde{y}(t)|^q d\mu$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

由此

$$\int_T|x(t)y(t)|d\mu\leqslant AB,$$

证毕.

我们指出, 与求和的不等式一样, 由不等式右端两积分的有限性可以推出左端积分的有限性.

注. 如果 $p=2$(这时 $q=2$). Hölder 不等式就变为熟知的 Cauchy - Буняковский 不等式(关于和及积分):

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k|\leqslant\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2\right]^{1/2},$$

$$\int_T|x(t)y(t)|dt\leqslant\left[\int_T|x(t)|^2d\mu\right]^{1/2}\left[\int_T|y(t)|^2d\mu\right]^{1/2}.$$

2.4. 广义的 Hölder **不等式.** 设正数 p,q,r 满足下列关系式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$$

这时, 对于任意在集 T 上给定的可测函数 $x(t),y(t),z(t)$, 有不等式

$$\int_T|x(t)y(t)z(t)|d\mu$$

$$\leqslant\left[\int_T|x(t)|^p d\mu\right]^{1/p}\left[\int_T|y(t)|^q d\mu\right]^{1/q}\left[\int_T|z(t)|^r d\mu\right]^{1/r}.$$

证. 由不等式$\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$定义 p'. 这时, 因为$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, 根据 Hölder 不等式有

$$\int_T|x(t)y(t)z(t)|d\mu\leqslant\left[\int_T|x(t)|^p d\mu\right]^{1/p}\left[\int_T|y(t)z(t)|^{p'}d\mu\right]^{1/p'}. \tag{4}$$

对于第二个积分再用指数为 q/p' 与 r/p' 的 Hölder 不等式$\left(\frac{p'}{q}+\frac{p'}{r}=1\right)$, 即得

$$\int_T|y(t)z(t)|^{p'}d\mu$$
$$\leqslant\left\{\int_T|y(t)|^{p'\frac{q}{p'}}d\mu\right\}^{\frac{p'}{q}}\left\{\int_T|z(t)|^{p'\frac{r}{p'}}d\mu\right\}^{\frac{p'}{r}},$$

把它代入(4)即得要求的不等式.

注. 广义的 Hölder 不等式自然对和式也成立.

与所证明的不等式类似, 我们留给读者推导左端积分中是 n 个函数乘积时的不等式.

2.5. Minkowski 不等式. 设$\{\xi_k\}$与$\{\eta_k\}$是数列, 则有不等式:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right]^{1/p}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right]^{1/p}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right]^{1/p}\quad(p\geqslant1).$$

证. 显然, 可以限于 $p>1$ 及所有的 ξ_k 与 η_k 非负的情形. 此外, 可以认为不等式的和式只有有限项(取极限后即得级数情形). 在此假设下有

$$\sum_{k=1}^{n}[\xi_k+\eta_k]^p=\sum_{k=1}^{n}\xi_k[\xi_k+\eta_k]^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}\eta_k[\xi_k+\eta_k]^{p-1}.$$

对右端每一个和式应用 Hölder 不等式$(1/p+1/q=1)$得

$$\sum_{k=1}^{n}[\xi_k+\eta_k]^p\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k+\eta_k)^{q(p-1)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{n}\eta_k^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k+\eta_k)^{q(p-1)}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

但是，从$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$推出 $q(p-1)=p$；所以在上式两端乘以 $\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k+\eta_k)^p\right]^{-\frac{1}{q}}$后得不等式

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k+\eta_k)^p\right]^{1-\frac{1}{q}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{k=1}^{n}\eta_k^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

因为 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$，所以，这就是所要求的不等式.

2.6. Minkowski 积分不等式. 设 $x(t)$，$y(t)$是集合T上的可测函数，则有不等式：

$$\left[\int_T|x(t)+y(t)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\int_T|x(t)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_T|y(t)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}\qquad(p\geqslant1).$$

证. 如果在右端有一个积分为无穷，则不等式显然成立. 如果左端积分为无穷，则由数值不等式

$$(|a|+|b|)\leqslant(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}(1^q+1^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$=2^{\frac{1}{q}}(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(参看 2.2)推出的估计式

$$\int_T|x(t)+y(t)|^p d\mu\leqslant\int_T(|x(t)|+|y(t)|)^p d\mu$$

$$\leqslant2^{\frac{p}{q}}\left(\int_T|x(t)|^p d\mu+\int_T|y(t)|^p d\mu\right)$$

得知，右边的积分至少有一个为无穷．因此，可以认为所有的积分是有限的．这时证明就和 2.5 一样进行．

我们指出，对于序列的 Hölder 与 Minkowski 不等式是积分不等式的特殊情形．为了证实这一点，只要取自然数集 N 作为 (T, Σ, μ) 且其中点的测度等于 1.

§3. 可测函数与序列的赋范空间

3.1. 本节研究元素是可测函数的空间，即它是空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 的某个线性子集．同时就象在 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中那样，等价的函数将不作区别．在这些空间中代数运算以自然的方式定义．特别，等价于零的函数起零元素的作用．我们先讨论这种空间的一般理论，然后再讨论具体的例子．

设 (T, Σ, μ) 是 σ-有限测度空间，$\mathbf{S}=\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 是其上的实或复可测函数全体构成的空间．对于实函数 $x, y\in\mathbf{S}$，记号 $x\geqslant y$ 表示 $x(t)\geqslant y(t)$ a. e. 对于任何元素 $x\in\mathbf{S}$，我们定义它的支集为

$$\operatorname{supp} x=\{t\in T:\ x(t)\neq 0\}.$$

显然，函数支集的确定，精确到零测度集．对于任意的集 $E\subset\mathbf{S}$，E 的支集不能定义为 E 中所有函数支集的并，因为在此情形不能保证其唯一性精确到零测度集，甚至可测性也成问题．所以，我们用下面的方式处理．对于任何集 $E\subset\mathbf{S}$，E 的支集为 $\operatorname{supp} E\in\Sigma$，它具有下列性质：

1) 对于任何 $x\in E$，$\operatorname{supp} x\subset\operatorname{supp} E\ (\operatorname{mod}\mu)$；

2) 如果集 $A\in\Sigma$ 具有这样的性质，对任何 $x\in E$，$\operatorname{supp} x\subset A\ (\operatorname{mod}\mu)$，则 $\operatorname{supp} E\subset A(\operatorname{mod}\mu)$.

因为从 2) 中推出支集的唯一性精确到零测度集，所以，为了说明引进的定义是合理的，应该指出满足条件 1) 与 2) 的集 $\operatorname{supp} E$ 是可以找到的．根据定理 I. 6. 17 存在 $x_0=\sup\{\chi_A:\ A=\operatorname{supp} x,$

$x\in E\}$. 如果令 $\operatorname{supp}E=\operatorname{supp}x_0$, 则这个集显然就是所要求的.

对于任何函数 $x\in\mathbf{S}$, 令 $|x|(t)=|x(t)|$.

如果 $x,y\in\mathbf{S}$ 是实函数, 则它们的上确界与下确界分别用下式定义:

$$(x\vee y)(t)=\max(x(t),y(t)),$$

$$(x\wedge y)(t)=\min(x(t),y(t)).$$

对于实函数 x, 还设

$$x_+=x\vee\mathbf{0},\ x_-=(-x)\vee\mathbf{0}.$$

于是 $|x|=x_++x_-$, $x=x_+-x_-$. 如果 x 是复函数, 则 $x(t)=\operatorname{Re}x(t)+i\operatorname{Im}x(t)$. 这些等式常可用以把问题归结为研究非负函数的情形. 令

$$\mathbf{X}_+=\{x\in\mathbf{X}: x\geqslant\mathbf{0}\}.$$

设元素 $x,y\in\mathbf{S}$. 如果 $|x|\wedge|y|=0$, 则称它们是离析的. 记号 $x_n\downarrow$ 表示当 $n\geqslant m$ 时 $x_m\geqslant x_n$. 记号 $x_n\downarrow x$ 表示 $x_n\downarrow$ 且 $x_n(t)\to x(t)$ a. e. 类似地可定义 $x_n\uparrow$ 及 $x_n\uparrow x$.

在 (T,Σ,μ) 上的理想空间是 $\mathbf{S}$ 中的线性子集 $\mathbf{X}$, 满足下列条件:

从 $x\in\mathbf{X}$, $y\in\mathbf{S}$, $|y|\leqslant|x|$ 可以推出 $y\in\mathbf{X}$.

在 (T,Σ,μ) 上的基本空间是满足条件 $\operatorname{supp}\mathbf{X}=T$ 的理想空间. 显然, 每一个理想空间可以看成是在 $\operatorname{supp}\mathbf{X}$ 上的基本空间.

引理 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是 (T,Σ,μ) 上的基本空间, 则对于任何非负函数 $x\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 可以找到序列 $x_n\uparrow x$, $\mathbf{0}\leqslant x_n\in\mathbf{X}$.

证. 考察集 $E=\{y\in\mathbf{X}_+:\ y\leqslant x\}$. 根据定理 I. 6. 17, $\tilde{y}=\sup E$ 存在, 并且可以找到可数集 $\{y_n\}\subset E$ 使得 $\tilde{y}(t)=\sup y_n(t)$ a. e. 我们来证明 $\tilde{y}=x$. 显然, $\tilde{y}\leqslant x$. 考察函数 $z=x-\tilde{y}\geqslant\mathbf{0}$ 及集 $A=\{t: z(t)>0\}$. 假设 $\mu(A)>0$, 则可以找到非负函数 $y_0\in\mathbf{X}$ 使得 $\mu(\operatorname{supp}y_0\cap A)>0$. 所以函数 $\tilde{y}_0=(y_0\chi_A)\wedge z>\mathbf{0}$, 又因为 $\mathbf{0}\leqslant\tilde{y}_0\leqslant y_0$, 故 $\tilde{y}_0\in$

$\mathbf{X}$. 因此，$\tilde{y}+\tilde{y}_0>\tilde{y}=\sup E$，另一方面，$\tilde{y}+\tilde{y}_0\in\mathbf{X}$ 且 $\tilde{y}+\tilde{y}_0\leqslant(x-z)+z=x$，从而得出矛盾. 因而，$x=\tilde{y}=\sup E=\sup y_n$. 令 $x_n=y_1\vee y_2\vee\cdots\vee y_n$，显然 $x_n\in\mathbf{X}$ 且 $\mathbf{0}\leqslant x_n\uparrow x$.

推论 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是 (T,Σ,μ) 上的基本空间，则对于任何非负函数 $x\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$，可以找到非降集序列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma$. 使得 $x\chi_{B_n}\in\mathbf{X}(n\in N)$，并且 $x\chi_{B_n}\uparrow x$.

证. 由引理 1 可以找到序列 $x_n\uparrow x$，$x_n\in\mathbf{X}$. 令

$$B_n=\{t\in T:2x_n(t)\geqslant x(t)\}.$$

因为 $x_n\uparrow x$，所以 $x\chi_{B_n}\uparrow x$，又因为 $x\chi_{B_n}\leqslant 2x_n\in\mathbf{X}$，所以 $x\chi_{B_n}\in\mathbf{X}$.

推论 2. 如果 $\mathbf{X}$ 是 (T,Σ,μ) 上的基本空间，则可以找到集 T 的分划 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对于任何 $n\in N$，$A_n\in\Sigma(\mu)$ 且 $\chi_{A_n}\in\mathbf{X}$.

证. 在推论 1 中取在 T 上恒等于 1 的函数 $\mathbf{1}$ 作为 x. 令 $A_1'=B_1$，$A_n'=B_n\backslash B_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，然后把每个集 A_n' 分解为有限测度集.

设 $\|\cdot\|$ 是在理想空间 $\mathbf{X}$ 上的范数. 如果从 $x,y\in\mathbf{X}$，$|x|\leqslant|y|$ 可推出 $\|x\|\leqslant\|y\|$，则称此范数是单调的.

赋有单调范数的 (T,Σ,μ) 上的理想空间叫做赋范理想空间. 是基本空间的赋范理想空间叫做赋范基本空间. 最后，依范数完备的赋范理想空间叫做 Banach 理想空间. 依范数完备的赋范基本空间叫做 Banach 基本空间.

由赋范理想空间 $\mathbf{X}$ 中范数的单调性引出一些最简单的推论. 设在 $\mathbf{X}$ 中按范数 $x_n\to x$. 则下列结论成立(其中收敛也表示在 $\mathbf{X}$ 中按范数收敛).

1) $|x_n-x|\to 0$.

2) 如果 $y_n\to y$，则 $x_n\vee y_n\to x\vee y$ 及 $x_n\wedge y_n\to x\wedge y$.

3) $(x_n)_+\to x_+$，$(x_n)_-\to x_-$，$|x_n|\to|x|$.

4) 如果 $x_n \geqslant y_n$ $(n \in N)$ 且 $y_n \to y$, 则 $x \geqslant y$.

5) 如果 $A \in \Sigma$, 则 $x_n \chi_A \to x \chi_A$.

命题 1)显然成立; 由不等式 $|(x_n \vee y_n)-(x \vee y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$ 及等式 $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$ 推出 2); 3)是 2)的直接推论; 4)也可由 2)推出: 事实上, 一方面, $x_n \vee y_n \to x \vee y$, 另一方面 $x_n \vee y_n = x_n \to x$. 所以 $x \vee y = x$, 由此 $x \geqslant y$; 最后, 由不等式 $|x_n \chi_A - x \chi_A| \leqslant |x_n - x|$ 推出 5).

我们给出与引进的空间类有关的几个定理.

定理 1. 设$(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$是(T, Σ, μ)上的赋范理想空间. 于是

1) 如果 $x_n, x \in \mathbf{X}$, 且 $\|x_n - x\| \to 0$, 则 $x_n \to x(\mu)$;

2) 如果$\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ 是 Cauchy 序列, 则它按测度收敛于某个 $x \in \mathbf{S}$.

证. 1) 由于引理 **1** 的推论 2, 可以找到集 supp$\mathbf{X}$ 的分划 $\{A_p\}_{p=1}^{\infty}$, 使得 $A_p \in \Sigma(\mu)$, $\chi_{A_p} \in \mathbf{X}$ $(p \in N)$. 假设 $x_n \nrightarrow x(\mu)$, 则由在直和性质定义后的注解(参见 I. 6. 10) 可知, 在某个 A_p 上 $x_n \nrightarrow x(\mu)$. 又由于在赋范理想空间中按范数收敛的性质 5), 可以认为在 T 上恒等于 1 的函数 **1** 属于 $\mathbf{X}$, 并且 $\mu(T) < \infty$. 还可以认为, 能够找到这样的数 $\varepsilon, \delta > 0$, 满足下列条件:

$$\mu(\{t \in T: |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \delta, \tag{1}$$

$$\|x_n - x\| < \varepsilon / 2^n; \tag{2}$$

否则可以取满足上述条件的子序列.

令

$$B_n = \{t \in T: \ |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\},$$

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n+1}^{\infty} B_m. \tag{3}$$

由(1)有

$$\mu(B_n) \geqslant \delta \quad (n \in N), \qquad \mu(B) \geqslant \delta. \tag{4}$$

由(2)，考虑到 $\varepsilon\chi_{B_n}\leqslant|x_n-x|$，得

$$\|\chi_{B_n}\|<1/2^n. \tag{5}$$

引进集合

$$C_{ns}=\bigcup_{m=n+1}^{n+s}(B_m\cap B).$$

则对于任何 $n\in\boldsymbol{N}$，序列 $\{C_{ns}\}_{s=1}^{\infty}$ 是非降的且由于(3)

$$B=\bigcup_{s=1}^{\infty}C_{ns}.$$

所以，对于任何 $n\in\boldsymbol{N}$，存在这样的下标 s_n，使得

$$\mu(B\backslash C_{ns_n})<1/2^{n+1}. \tag{6}$$

令

$$D_n=\bigcap_{m=n+1}^{\infty}C_{ms_m}.$$

显然，序列 $\{D_n\}$ 是非降的，且因为

$$B\Big\backslash\bigcap_{m=n+1}^{\infty}C_{ms_m}=\bigcup_{m=n+1}^{\infty}(B\backslash C_{ms_m}),$$

则由(6)得

$$\mu(B\backslash D_n)=\sum_{m=n+1}^{\infty}\mu(B\backslash C_{ms_m})<1/2^n.$$

因此，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n=B(\mathrm{mod}\ \mu)$. 由于(5)，当 $m>n$ 时有

$$\|\chi_{D_n}\|\leqslant\|\chi_{C_{ms_m}}\|\leqslant\left\|\sum_{k=m+1}^{m+s_m}\chi_{B_k}\right\|$$

$$\leqslant\sum_{k=m+1}^{m+s_m}\|\chi_{B_k}\|<1/2^m,$$

由此 $\chi_{D_n}=\mathbf{0}$，即 $\mu(D_n)=0$. 于是 $\mu(B)=0$ 它与(4)矛盾.

2) 因为空间 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 是完备的(定理 I. 6. 15), 所以只要证明, 如果 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{X}$ 中 Cauchy 序列, 则它也是 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中的 Cauchy序列. 假设不然, 这时, 如果 ρ 是 $\mathbf{S}$ 中的度量, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得对于任何 $n\in N$, 可以找到 m_n 与 $k_n(m_n,k_n>n)$, 满足 $\rho(x_{m_n}, x_{k_n})\geqslant\varepsilon$. 于是 $m_n, k_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ 且 $\|x_{m_n}-x_{k_n}\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, 所以由 1) $\rho(x_{m_n},x_{k_n})\to 0$, 从而导致矛盾.

推论. 如果 E 是赋范理想空间 $\mathbf{X}$ 中依范数有界的子集, 则 E 也在拓扑向量空间 $\mathbf{S}$ 中有界.

证. 根据定理 1, $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{S}$ 中的恒等嵌入是连续的, 而任何连续映射把有界集变为有界集.

引理 2. 设 $\mathbf{X}$ 是 Banach 理想空间. 如果在 $\mathbf{X}$ 中按范数 $x_n\to x$, 则可以找到子序列 $\{x_{n_k}\}$, 函数 $r\in\mathbf{X}_+$ 及数列 $\varepsilon_{n_k}\downarrow 0$, 使得 $|x_{n_k}-x|\leqslant\varepsilon_{n_k}r$.

证. 选取子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\|x-x_{n_k}\|<1/2^k(k\in N)$. 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|k(x-x_{n_k})\|<\sum_{k=1}^{\infty}k/2^k<\infty, \tag{7}$$

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}k|x-x_{n_k}|$ 在 B-空间 $\mathbf{X}$ 中按范数收敛(参见 1. 5). 令

$$r=\sum_{k=1}^{\infty}k|x-x_{n_k}|\in\mathbf{X},\quad \varepsilon_{n_k}=1/k.$$

由在赋范理想空间中按范数收敛的性质 4) 得到 $k|x-x_{n_k}|\leqslant r(k\in N)$, 由此 $|x_{n_k}-x|\leqslant\varepsilon_{n_k}r$.

我们指出, 当 $\mathbf{X}$ 是 Banach 理想空间时, 由引理 1 我们得到定理 1 的更简单的证明.

定理 2. 在理想空间 $\mathbf{X}$ 上给定的任意二个把 $\mathbf{X}$ 变为 Banach 理想空间的单调范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

证. 正如在 1.3 中指出，只要证明恒等算子$(\mathbf{X}, \|\cdot\|_1)\to(\mathbf{X}, \|\cdot\|_2)$是同构，即由于$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是平等的，只要证明由$\|x_n\|_1\to 0$推出$\|x_n\|_2\to 0$. 假设$\|x_n\|_2\not\to 0$，则可以认为$\|x_n\|_2\geqslant\varepsilon>0(n\in N)$，否则可以选出子序列满足此要求. 由引理 2，可以找到$\{x_{n_k}\}$，$r\in\mathbf{X}_+$及$\varepsilon_{n_k}\downarrow 0$，使得$|x_{n_k}|\leqslant\varepsilon_{n_k}r$. 因为范数$\|\cdot\|_2$是单调的，所以由此推出，$\|x_{n_k}\|_2\leqslant\varepsilon_{n_k}\|r\|_2\to 0$. 这与假设矛盾，定理得证.

3.2. 我们引进在赋范理想空间 $\mathbf{X}$ 中范数可能具有的几个重要条件.

如果在赋范理想空间 $\mathbf{X}$ 中的范数满足条件:

$$\text{由 } x_n\downarrow \mathbf{0} \text{ 推出 } \|x_n\|\to 0,$$

则称此范数是序连续的*)，或称它在 $\mathbf{X}$ 中满足条件(A).

引理 3. 如果 $\mathbf{X}$ 是满足条件(A)的赋范理想空间，则集

$$E=\left\{y=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\chi_{A_k}: A_k\in\Sigma(\mu),\ A_k\cap A_{k'}=\varnothing\quad(k\neq k'),\chi_{A_k}\in\mathbf{X},\ n\in N\right\},$$

在 $\mathbf{X}$ 中按范数稠密.

证. 显然，只要证明，任何函数$x\in\mathbf{X}_+$属于E的闭包之中. 因为截断$[x]_n\uparrow x$(参见 I.6.4)，而在 $\mathbf{X}$ 中满足条件(A)，所以在 $\mathbf{X}$ 中按范数$[x]_n\to x$. 因此，只要研究有界函数 x. 因为测度 μ 是 σ-有限，则 $T=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n$，其中 $T_n\subset T_{n+1}(n\in N)$且 $\mu(T_n)<\infty$. 又由于条件(A)，按范数 $x\chi_{T_n}\to x$. 因此，只要讨论有界函数 x 和有限测度 μ 这种情形. 根据定理 I.6.3，可以找到有限个值的函数 x_n，使得 $0\leqslant x_n\uparrow x$，由此按范数 $x_n\to x$. 显然 $x_n\in E$ $(n\in N)$.

为了验证具体空间的可分性，需要下面的定理.

---

*) 这里和以后的定义中我们常把"序"一词简记为(o)(取英文词"*order*"——序的第一个字母). 例如，在此情形我们将说范数的(o)-连续性.

定理 3. 在(T, Σ, μ)上 Banach 基本空间 $\mathbf{X}$ 可分的充要条件为测度 μ 可分且在 $\mathbf{X}$ 中满足条件(A).

证. 由于引理 1, 赋范基本空间 $\mathbf{X}$ 在度量空间 $\mathbf{S}$ 中稠密. 于是, 如果 $\mathbf{X}$ 是可分的, 则 $\mathbf{S}$ 可分, 从而根据定理 I. 6. 16 测度 μ 可分. 关于条件(A)的成立将在后面(参看定理 X. 4. 4 的推论)更一般的情况下来证明.

利用引理 3, 如同定理 I. 6. 16 的证明一样可证明逆命题成立.

如果在赋范理想空间 $\mathbf{X}$ 中的范数满足条件:

$$\text{由 } 0 \leqslant x_n \uparrow x \in \mathbf{X} \text{ 推出 } \|x_n\| \to \|x\|,$$

则称此范数是序半连续的, 或称在 $\mathbf{X}$ 中满足条件(C).

显然, 条件(A)蕴涵条件(C).

引理 4. 在赋范理想空间 $\mathbf{X}$ 中条件(C)成立的充要条件为由 $x_n \to x$ (μ); $x_n x \in \mathbf{X}$ 推出 $\|x\| \leqslant \underline{\lim}\|x_n\|$.

证. 设在 $\mathbf{X}$ 中条件(C)成立. 由定理 I. 6. 4 可以认为 $x_n \to x$ a. e. 从而 $|x_n| \to |x|$ a. e. 令 $y_n = \inf\{|x_m| : m \geqslant n\}$ (由定理 I. 6. 17 的推论, 此下确界存在). 显然, $0 \leqslant y_n \uparrow |x|$. 于是, 因为 $0 \leqslant y_n \leqslant |x_n|$, 故

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|y_n\| \leqslant \underline{\lim}\|x_n\|.$$

下面证明逆命题. 设 $0 \leqslant x_n \uparrow x \in \mathbf{X}$, 则 $x_n \to x(\mu)$, 且根据条件, $\|x\| \leqslant \underline{\lim}\|x_n\| = \lim\|x_n\|$. 因为 $\|x\| \geqslant \|x_n\|$ $(n \in N)$, 又由于范数的单调性, 故得 $\|x_n\| \to \|x\|$.

如果在赋范理想空间 $\mathbf{X}$ 中的范数满足条件:

由 $0 \leqslant x_n \uparrow$, $x_n \in \mathbf{X}$ $(n \in N)$, $\sup\|x_n\| < \infty$ 推出, 存在 $x \in \mathbf{X}$ 使得 $x_n \uparrow x$.

则称此范数是单调完备的, 或称在 $\mathbf{X}$ 中满足条件(B).

引理 5. 设 $\mathbf{X}$ 是(T, Σ, μ)上的赋范理想空间, 则下列命题等

价:

1) 在 $\mathbf{X}$ 中条件(B)与(C)成立.

2) 单位球 $B_{\mathbf{X}}=\{x\in\mathbf{X}: \|x\|\leqslant 1\}$ 在 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中是闭的, 即如果 $x_n\in\mathbf{X}, x\in\mathbf{S}, \|x_n\|\leqslant 1 (n\in N), x_n\to x(\mu)$, 则 $x\in\mathbf{X}$ 且 $\|x\|\leqslant 1$.

证. 1)$\Longrightarrow$2). 设序列 $\{x_n\}$ 满足 2)中的条件, 如同在引理 4 的证明中一样, 可以认为 $x_n\to x$ a. e. 如果令 $y_n=\inf\{|x_m|: m\geqslant n\}\in\mathbf{X}$, 则 $\mathbf{0}\leqslant y_n\uparrow|x|$ 且 $\sup\|y_n\|\leqslant\sup\|x_n\|\leqslant 1$, 故由于(B), $x\in\mathbf{X}$. 现在由引理 4 得知 $\|x\|\leqslant 1$.

2)$\Longrightarrow$1). 应该证明, 如果 $\mathbf{0}\leqslant x_n\uparrow, x_n\in\mathbf{X}(n\in N), \sup\|x_n\|<\infty$, 则存在 $x\in\mathbf{X}$, 使得 $x_n\uparrow x$ 且 $\|x_n\|\to\|x\|$.

可以认为 $\sup\|x_n\|=1$, 则 $x_n\in B_{\mathbf{X}}$. 由定理 1 的推论, 集合 $B_{\mathbf{X}}$ 在拓扑向量空间 $\mathbf{S}$ 中有界. 于是根据引理III. 1. 1(参看III. 1. 4), 存在元素 $x\in\mathbf{S}$, 使得 $x_n\uparrow x$, 故由于条件 2), $x\in\mathbf{X}$ 及 $\|x\|\leqslant 1$, 又因为 $\|x\|\geqslant\sup\|x_n\|=1$, 则 $\|x\|=1$. 证毕.

定理 4. 满足条件(B)与(C)的赋范理想空间 $\mathbf{X}$, 按范数完备.

证. 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的 Cauchy 序列. 因为所有 Cauchy 序列有界, 则可以认为 $\|x_n\|\leqslant 1(n\in N)$. 由定理 1, $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{S}$ 中的 Cauchy 序列. 又因为拓扑向量空间 $\mathbf{S}$ 完备(定理I. 6. 15), 则存在 $x\in\mathbf{S}$, 使得 $x_n\to x(\mu)$. 由引理 5, $x\in\mathbf{X}$, 我们来证明, 依范数 $x_n\to x$.

因为 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 则对于每一个 $\varepsilon>0$, 可以找到 N, 使得当 $n, m\geqslant N$ 时有

$$\|x_n-x_m\|<\varepsilon. \tag{8}$$

任意指定一个 $n\geqslant N$, 考察序列 $y_m=x_n-x_m\to x_n-x\ (\mu)$. 则由引理 4 及估计式(8)得 $\|x_n-x\|\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\|x_n-x_m\|\leqslant\varepsilon$. 所以, 按范数 $x_n\to x$, 从而证得 $\mathbf{X}$ 的完备性.

下面我们将会看到(参看第十章)定理 4 的条件(C)是多余的. 对于赋范理想空间完备性最方便的判别准则为(参见 Абрамович

[1]):

赋范理想空间 X 按范数完备的充要条件为由 $x_n \in \mathbf{X}_+$, $x_n \wedge x_m = \mathbf{0}(n \neq m)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ 推出 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathbf{X}$(这里和理解为几乎处处收敛的意思).

这个判别准则之所以方便，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 作为 S 的元素总存在，而且只要指出这个元素属于 X 即可.

理想空间的理论是向量格一般理论的一部分，我们将在第十章对它作较详细的研究*). 我们指出，在历史上向量格理论建立得比较早，理想空间理论的许多基本事实开始是作为关于向量格一般理论的应用而得出的.

在下一章中，我们还要研究在理想空间中的泛函和算子. 现在转到讨论具体的 Banach 理想空间的例子.

3.3. 我们现在研究空间 $\mathbf{L}^p$，它在泛函分析中及本书讨论的许多问题中起着很重要的作用.

仍设 (T, Σ, μ) 是 σ-有限测度空间，虽然实际上在研究空间 $\mathbf{L}^p$ 时 σ-有限性要求通常是多余的. 指定一个数 p, $1 \leqslant p < \infty$，用 $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ 表示使式子

$$\|x\| = \left[\int_T |x(t)^p|^p d\mu \right]^{1/p} \tag{9}$$

有限的所有函数 $x \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 构成的空间.

利用 Minkowski 积分不等式可得 $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ 是向量空间. 并且，用(9)式定义的泛函是范数. 从而，显然，$\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ 是赋范

---

*) 在第十章中还给出参考文献，这里仅指出 Забрейко 的评论[1]及 Zaanen 的书II，其中不用向量格工具讨论理想空间. 在 Лозановский [2] 的文章中有 Banach 基本空间的有趣结果.

理想空间.

在 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$ 中的收敛叫做指数为 p 的平均收敛:

$$\int_T |x_n(t)-x(t)|^p d\mu \to 0.$$

Lebesgue 定理和 Levi 定理(I. 6. 6)指出, 在赋范理想空间 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$ 中条件(A)与(B)成立, 于是, 根据定理 4, $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$ 是 B-空间. 因为如果 $A\in\Sigma(\mu)$ 则 $\chi_A\in\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$, 所以, 由测度的局部有限性(I. 6. 2), $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$ 是基本空间. 上述一切可以综合为下面的定理.

定理 5. 当 $1\leqslant p<\infty$ 时, 空间 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$ 是满足条件(A)与(B)的 Banach 基本空间.

现在对 $p=\infty$ 的情形引进空间 $\mathbf{L}^p$. 空间 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 由所有这样的函数 $x\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 组成, 对它们可以找到数 α_x, 使得 $|x(t)|\leqslant\alpha_x$ a. e. *). 对于函数 $x\in\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$, 我们定义其模的真实(或本质)的上确界 $\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in T}|x(t)|$ 为使得

$$\mu(\{t\in T:\ |x(t)|>\alpha\})=0$$

的数 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 所成的集合的下确界.

显然, $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 是 $\mathbf{S}$ 中的线性子集, $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 上的范数由下式给出:

$$\|x\|=\operatorname{vrai}\sup_{t\in T}|x(t)|.$$

读者不难验证 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 是满足条件(B)与(C)的 Banach 基本空间. 空间 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 中条件(A)实际上总不成立. 除非空间 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 退化为有限维, 即它等价于 (T,Σ,μ) 由有限个原子组成. 事实上, 设 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 是无限维的, 则存在两两不相交的正测度集序列 $\{A_n\}\subset\Sigma(\mu)$. 考察集

---

*) 这样的函数叫做本性有界的.

$$B_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad B_1=B_0\setminus A_1,\quad \cdots,\quad B_k=B_{k-1}\setminus A_k,\quad \cdots$$

于是，如果 $x_n=\chi_{B_n}$，则 $x_n\in \mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 且 $x_n\downarrow \mathbf{0}$. 然而，显然 $\|x_n\|=1(n\in N)$，由此 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 不满足条件(A).

以后，如果讲到的测度 μ 已很明确或相反讲到的测度 μ 没有意义，则我们就用 $\mathbf{L}^p$ 来记 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$. 如果取具有 Lebesgue 测度的可测子集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 作为测度空间，则 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$ 记为 $\mathbf{L}^p(D)$；如果 (T,Σ,μ) 是具有 Lebesgue 测度的区间 $[a,b]$，则记为 $\mathbf{L}^p(a,b)$. 在考察其他具体空间时，我们将遵循类似的规定.

由 I. 6. 10 的结果及定理 3 与 5 推出，当 $1\leqslant p<\infty$ 时，空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 是可分的. 因为 $\mathbf{L}^\infty(D)$ 不满足条件(A)，所以这个空间是不可分的. 有理系数的多项式或在以有理数为端点的区间上取有理值的阶梯函数可作为 $\mathbf{L}^p(a,b)$ 中的可数稠密集.

为了证明这一点，我们首先指出，如果 $[x]_n$ 是函数 x 的"截断"(参见 I. 6. 4)，则

$$\int_a^b |x(t)-[x]_n(t)|^p dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

因为被积函数趋于零并且由于被积函数以可积函数 $|x(t)|^p$ 为界，而准许在积分号下取极限.

取一个 n，使得 $\|x-[x]_n\|\leqslant\varepsilon$. 其次，可以找到一个连续函数 $y(t)$，除了一个集 A 外($\mathrm{mes}A<\varepsilon^p/(2n)^p$)处处与 $[x]_n(t)$ 重合，并且其函数值也不超过 n (参见 I. 6. 9)，我们有

$$\|x_n-y\|=\left\{\int_A |x_n(t)-y(t)|^p dt\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant\left\{\int_A (2n)^p dt\right\}^{1/p}=2n[\mathrm{mes}A]^{1/p}<\varepsilon.$$

最后，取有理系数多项式 $P(t)$，使 $|y(t)-P(t)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $(t\in$

$[a,b]$). 于是，显然 $\|y-P\|<\varepsilon$，从而最后得 $\|x-P\|\leqslant 3\varepsilon$.

在有理区间上仅取有理值且其中只有有限个值异于零的阶梯函数的总体是 $\mathbf{L}^p(-\infty, \infty)$ 中的可数稠密集.

现在来研究当指数 p 不同时空间 $\mathbf{L}^p$ 之间的相互关系.

定理 6. 设测度 μ 有限且 $1\leqslant s<r\leqslant\infty$，则 $\mathbf{L}^r(T, \Sigma, \mu)\subset \mathbf{L}^s(T,\Sigma,\mu)$，并且，如果

$$K(r,s)=\begin{cases}\mu(T)^{(r-s)/(rs)} & \text{当 } r<\infty,\\ \mu(T)^{1/s} & \text{当 } r=\infty,\end{cases}$$

则

$$\|x\|_{\mathbf{L}^s}\leqslant K(r,s)\|x\|_{\mathbf{L}^r}.$$

证. $r=\infty$ 的情形，我们让读者自行分析. 设 $r<\infty$，这时，令 $p=r/s, q=r/(r-s)$ $(p,q>0, 1/p+1/q=1)$，由 Hölder 积分不等式得

$$\begin{aligned}\|x\|_{\mathbf{L}^s}&=\left[\int_T|x(t)|^s d\mu\right]^{1/s}\\ &\leqslant\left[\int_T|x(t)|^{ps}d\mu\right]^{1/(ps)}\left[\int_T 1^q d\mu\right]^{1/(qs)}\\ &=\|x\|_{\mathbf{L}^r}\mu(T)^{1/(qs)}=K(r,s)\|x\|_{\mathbf{L}^r}.\end{aligned}$$

我们指出，$\|x\|_{\mathbf{L}^\infty}=\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_{\mathbf{L}^p}$（参见 Hardy, Littlewood, Pólya），但是 $\mathbf{L}^\infty\neq\bigcap\limits_{1\leqslant p<\infty}\mathbf{L}^p$. 在无限测度的情形，定理 6 不成立.

空间 $\mathbf{L}^p(1<p\leqslant\infty)$ 是由 F. Riesz[1]引进的，空间 $\mathbf{L}^1$ 是Steinhaus[1]引进的.

3.4. 现在我们研究可测函数空间的一个重要的特殊情形——序列空间. 我们已经指出过，如果 $T=N$，Σ 是 N 中所有子集全体，任一点的测度 μ 为 1，则 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 是所有序列的空间 $\mathbf{s}$. 前节中所有的定义和结果同样都可用于子空间 $\mathbf{s}$.

在这种情形下，空间 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$ 表示为 $\mathbf{l}^p$. 如果 $x=\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$，

则根据 $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ 中范数的定义，得

$$\|x\|_{\mathbf{l}^p} = \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right]^{1/p}, & \text{如果 } 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup_{k=1}^{\infty} |\xi_k|, & \text{如果 } p = \infty. \end{cases}$$

从 3.3 的结果推出，$\mathbf{l}^p (1 \leqslant p < \infty)$ 是可分的 Banach 空间，而 $\mathbf{l}^\infty$ 是不可分的 Banach 空间.

下面再引进两个序列空间，它们是 $\mathbf{l}^\infty$ 的子空间. 用 $\mathbf{c}$ 表示所有收敛序列构成的空间，而用 $\mathbf{c}_0$ 表示所有收敛于零的序列构成的空间. 从 $\mathbf{l}^\infty$ 中把范数诱导到 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{c}_0$，显然，$\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{c}_0$ 是 $\mathbf{l}^\infty$ 的线性子集. 我们来证明，它们在 $\mathbf{l}^\infty$ 中是闭的，由此可得，$\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{c}_0$ 是 Banach 空间. 下面仅对空间 $\mathbf{c}$ 来验证.

如果 $\{x_n\}$ 是收敛于 $x_0 \in \mathbf{l}^\infty$ 的 $\mathbf{c}$ 中的元素序列，则 $\|x_n - x\| \to 0$. 设 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$，对于任何 $\varepsilon > 0$，当 $n \geqslant N_\varepsilon$ 时有

$$\|x_n - x_0\| = \sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \varepsilon/3,$$

上式也可以改写为

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \varepsilon/3 \qquad (k = 1, 2, \cdots; n \geqslant N_\varepsilon).$$

取定 $n \geqslant N_\varepsilon$. 元素 $x_n \in \mathbf{c}$，由此序列 $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots$，收敛. 所以，对于充分大的 k 与 k' 有 $|\xi_k^{(n)} - \xi_{k'}^{(n)}| < \varepsilon/3$，因而对于同样的 k 和 k' 有

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_{k'}^{(0)}| \leqslant |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)} - \xi_{k'}^{(n)}| + |\xi_{k'}^{(n)} - \xi_{k'}^{(0)}| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

于是序列 $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_k^{(0)}, \cdots$ 收敛，即 $x_0 \in \mathbf{c}$.

我们指出，$\mathbf{c}_0$ 是满足条件(A)的 Banach 基本空间(从而也是可分的Banach 空间)，但条件(B)不成立. 由此可见，对于赋范理想空间的完备性来说，条件(B) 不是必要的. 空间 $\mathbf{c}$ 不是理想空间.

我们指出,对于空间 $\mathbf{l}^p(1\leqslant p<\infty)$来说,具有与定理 6 所述相反的包含关系和范数不等式(具有 $k(r,s)=1$).

最后引进截断序列空间 $\boldsymbol{\varphi}$. 它是由一切异于 0 的坐标至多有有限个的序列$(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$所组成. $\boldsymbol{\varphi}$ 中的范数由 $\mathbf{l}^{\infty}$诱导. 显然,$\boldsymbol{\varphi}$ 是赋范基本空间,但不是 Banach 空间,因为空间$\boldsymbol{\varphi}$在 $\mathbf{c}_0$ 中稠密.

空间 $\mathbf{l}^p$ 是由 F. Riesz[3]引进的, $\mathbf{l}^2$ 较早由 Hilbert 引进(参见 Hilbert).

3.5. 下面我们指出只与上述引进的序列空间 $\mathbf{l}^p$ 有关的有限维(维数为 n)空间 $\mathbf{l}_n^p$. 因为任意两个维数相同的有限维空间是同构的, 所以, 其中的差别可能仅在于定义范数的方法. 在空间 $\mathbf{l}_n^p$ 中范数定义如下:如果 $x=\{\xi_k\}_{k=1}^n$,则

$$\|x\|_{\mathbf{l}_n^p}=\begin{cases}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right]^{1/p}, & \text{如果 } 1\leqslant p<\infty,\\ \max\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|, & \text{如果 } p=\infty\end{cases}$$

(当 $p=2$ 时即得欧氏范数).

由定理 1.2 的推论 1 推出,如果不计这些空间中范数的区别,则其中的收敛有相同的意义,即这是按坐标收敛(这可以从不等式 $|\xi_k|\leqslant\|x\|$直接得到,此不等式对每一个所考察的有限维空间都成立).

空间 $\mathbf{l}_n^p$ 可以看成是空间 $\mathbf{l}^p$的子空间. 为此,只要把元素$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{l}_n^p$ 与元素$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)$同样看待.

3.6. 除了空间 $\mathbf{L}^p$外, 在泛函分析中还研究许多别的可测函数空间.

首先我们定义 Orlicz 空间,它是空间 $\mathbf{L}^p$的拓广. 设 $M(u)$是给定在$(-\infty,\infty)$上偶的,凸的,且当 $u\neq0$ 时为正的连续函数, 如

果

$$\lim_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0 \quad 及 \quad \lim_{u\to+\infty}\frac{M(u)}{u}=+\infty$$

则称 $M(u)$ 是 N-函数.

对于每一个 N-函数, 用等式

$$M^*(u)=\sup_{-\infty<v<\infty}(uv-M(v))$$

来定义一个余 N-函数. 显然, N-函数 M 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加且 $M(0)=0$. 可以证明, M^* 也是 N-函数, 并且 $M^{**}(=(M^*)^*)=M$.

设 (T, Σ, μ) 是有限测度空间. 指定一个 N-函数 M, 满足条件

$$\int_T M(|x(t)|)d\mu<+\infty$$

的所有函数 $x\in\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 的总体叫做 Orlicz 类 $\mathbf{L}_M^0(T, \Sigma, \mu)$ (或简记为 $\mathbf{L}_M^0$).

Orlicz 类可以是非线性集; 更确切地说, 当 $x\in\mathbf{L}_M^0$ 时也可能有 $2x\notin\mathbf{L}_M^0$. 显然 $\mathbf{L}^\infty\subset\mathbf{L}_M^0$.

所谓 Orlicz 空间 $\mathbf{L}_M(T, \Sigma, \mu)$ (或简记为 $\mathbf{L}_M$) 是由所有满足下列条件的函数 $x\in\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 组成的, 对于这些 x 可以找到数 $\lambda=\lambda(x)>0$, 使得 $\int_T M(|x(t)|/\lambda)d\mu<\infty$.

显然, $\mathbf{L}_M^0\subset\mathbf{L}_M$, 下面可以看到这两个集可能是不相等的. 空间 $\mathbf{L}_M$ 已是 $\mathbf{S}$ 中的线性子集. 事实上, 显然, 乘以数后仍在 $\mathbf{L}_M$ 中. 如果

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda_1)d\mu<\infty \quad 及 \quad \int_T M(|y(t)|/\lambda_2)d\mu<\infty$$

则由于M的凸性有

$$\int_T M\left(\frac{|x(t)+y(t)|}{\lambda_1+\lambda_2}\right)d\mu$$

$$\leqslant\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\int_T M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_1}\right)d\mu+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\int_T M\left(\frac{|y(t)|}{\lambda_2}\right)d\mu, \quad (10)$$

由此 $x+y\in\mathbf{L}_M$. 由于M的单调性，$\mathbf{L}_M$ 显然是(T,Σ,μ)上的基本空间. 在 Orlicz 空间上我们将研究下面两个范数:

$$\|x\|_1=\sup\left\{\int_T|xy|\,d\mu:\quad\int_T M^*(y)\,d\mu\leqslant 1\right\},$$

$$\|x\|_2=\inf\left\{\lambda>0:\quad\int_T M(|x(t)|/\lambda)\,d\mu\leqslant 1\right\}.$$

我们来证明，$\|\cdot\|_1$ 与$\|\cdot\|_2$ 是范数，从 M^* 的定义我们推出 Young 不等式.

$$|uv|\leqslant M(u)+M^*(v).$$

设$\int_T M(|x(t)|/\lambda)\,d\mu<\infty$, 则由 Young 不等式

$$\int_T|xy|\,d\mu=\lambda\int_T|x/\lambda|\,|y|\,d\mu$$

$$\leqslant\lambda\int_T M(|x|/\lambda)\,d\mu+\lambda\int_T M^*(|y|)\,d\mu \quad (11)$$

从(11)式推出$\|x\|_1<\infty$. 因为 $\mathbf{L}^\infty\subset\mathbf{L}^0_{M^*}$, 所以由$\|x\|_1=0$ 推出 $x=\mathbf{0}$, 范数的其余性质对于$\|\cdot\|_1$ 显然都成立.

根据定义, 显然$\|x\|_2<\infty$. 齐次性也显然成立; 三角不等式容易从不等式(10)得到. 如果$\|x\|_2=0$, 因为当 $u>0$ 时 $M(u)>0$, 则 $x=\mathbf{0}$. 于是, $\|\cdot\|_2$是范数. 从不等式(11)推出, $\|x\|_1\leqslant 2\|x\|_2$. 可以证明, $\|x\|_2\leqslant\|x\|_1$, 但是, 我们对此不予证明, 而只证明存在常数 $k_1>0$, 使得$\|x\|_1\geqslant k_1\|x\|_2$ $(x\in\mathbf{L}_M)$, 即范数$\|\cdot\|_1$ 与$\|\cdot\|_2$等价. 由于$\|\cdot\|_1$ 与$\|\cdot\|_2$是把 $\mathbf{L}_M$ 变为 Banach 基本空间的单调范数, 则由定理 2 即可得出上述结果.

定理 7. 具有范数$\|\cdot\|_1$或$\|\cdot\|_2$的 Orlicz 空间都是满足条件

(B) 与(C) 的 Banach 基本空间.

证. 因为满足条件(B)与(C)的赋范基本空间是完备的(定理4),所以只要证明$(\mathbf{L}_M, \|\cdot\|_i)$满足条件(B)与(C), 即由$0\leqslant x_n\uparrow$, $x_n\in\mathbf{L}_M$, $\sup\|x_n\|_i<\infty$ 推出存在 $x\in\mathbf{L}_M$, 使得 $x_n\uparrow x$且$\sup\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_i=\|x\|_i$ $(i=1,2)$.

先设 $i=1$. 令 $x(t)=\sup\limits_n x_n(t)$. 函数 x 也可能在正测度集上取无穷值. 但是, 根据定理 I.6.7 的推论, 对于任何满足条件 $\int_T M^*(y)d\mu\leqslant1$ 的 y, 得

$$\int_T x|y|d\mu=\sup_n\int_T x_n|y|d\mu\leqslant\sup\|x_n\|_1. \tag{12}$$

不等式(12)指出, 在$(\mathbf{L}_M, \|\cdot\|_1)$中满足条件(B)与(C).

研究 $i=2$ 情形. 因为$\|x\|_1\leqslant2\|x\|_2$,所以在$(\mathbf{L}_M, \|\cdot\|_2)$ 中条件(B)成立. 余下验证,从 $0\leqslant x_n\uparrow x\in\mathbf{L}_M$ 推出$\|x_n\|_2\to\|x\|_2$.

先指出$\|\cdot\|_2$具有下列性质: 对于任何 $x\neq0$ 有

$$\int_T M(|x(t)|/\|x\|_2)d\mu\leqslant1. \tag{13}$$

事实上, 取 $\lambda_n\to\|x\|_2$ $(\lambda_n\neq0)$, 并且

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda_n)d\mu\leqslant1. \tag{14}$$

对不等式(14)取极限, 根据 Fatou 定理得(13).

令$\lim\|x_n\|_2=\lambda$. 由(13)

$$\int_T M(|x_n(t)|/\|x_n\|_2)d\mu\leqslant1. \tag{15}$$

对(15)式取极限, 再由 Fatou 定理得

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda)d\mu\leqslant1.$$

由此$\|x\|_2\leqslant\lambda=\lim\|x_n\|_2\leqslant\|x\|_2$. 定理证毕.

现在我们来研究，什么时候 Orlicz 空间满足条件(A)。因为范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价，所以条件(A)对于这两个范数同时满足或同时不满足.

已经指出，$\mathbf{L}^\infty\subset\mathbf{L}_M^0\subset\mathbf{L}_M$. 用 $\mathbf{E}_M$ 表示 $\mathbf{L}^\infty$ 在 Orlicz 空间 $\mathbf{L}_M$ 中的闭包. 我们也要在 $\mathbf{E}_M$ 上研究范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$.

引理 6. 1) 如果$\{x_n\}\subset\mathbf{L}_M$ 且在 $\mathbf{L}_M$ 中按范数 $x_n\to x$, 则序列$\{x_n\}$"平均收敛"于函数 x, 即

$$\int_T M(|x_n(t)-x(t)|)d\mu\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0^{*)}.$$

2) 如果在 1) 的假设中$2x_n\in\mathbf{L}_M^0(n\in N)$, 则 $x\in\mathbf{L}_M^0$.

3) $\mathbf{E}_M\subset\mathbf{L}_M^0$.

证. 1) 首先指出, 由等式 $M(0)=0$ 及 M 的凸性推出

当 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 时 $\quad M(\alpha u)\leqslant\alpha M(u)$. (16)

因为$\|x_n-x\|_2\to0$, 所以当 $n\geqslant N$ 时$\|x_n-x\|_2\leqslant1$, 对于这些 n, 由(16)有($\alpha=\|x_n-x\|_2$)

$$1\geqslant\int_T M\left(\frac{x_n-x}{\|x_n-x\|_2}\right)d\mu\geqslant\frac{1}{\|x_n-x\|_2}\int_T M(|x_n-x|)d\mu, \quad (17)$$

由此

$$\int_T M(|x_n-x|)d\mu\leqslant\|x_n-x\|_2\to0.$$

2) 由不等式

$$\int_T M(|x|)d\mu\leqslant\frac{1}{2}\int_T M(|2x-2x_n|)d\mu+\frac{1}{2}\int_T M(|2x_n|)d\mu$$

推出.

3) 如果 $x\in\mathbf{E}_M$, 则可以找到$\{x_n\}\subset\mathbf{L}^\infty$, 使得按范数 $x_n\to x$, 因为 $2x_n\in\mathbf{L}^\infty\subset\mathbf{L}_M^0$, 则由于 2), $x\in\mathbf{L}_M^0$.

定理 8. 空间 $\mathbf{E}_M$ 是 Banach 基本空间, 在其中条件 (A) 成

---

*) 这些积分中可能有有限个等于无穷.

立.

证. 我们只须验证，在 $\mathbf{E}_M$ 中条件(A)成立. 假设不是这样，则可以找到序列 $\{x_n\}\subset\mathbf{E}_M$，使得 $x_n\downarrow\mathbf{0}$, $\|x_n\|_2>\delta>0$ $(n\in N)$. 由于(13)，则对于任何 $n\in N$,

$$\int_T M(|x_n|/\delta)d\mu>1.$$

另一方面，由于引理 6, $x_1/\delta\in\mathbf{E}_M\subset\mathbf{L}_M^0$, 于是根据 Lebesgue 定理有

$$\int_T M(|x_n|/\delta)d\mu\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

从而得出矛盾.

设 $M(u)$ 是 N-函数，如果存在这样的常数 $k>0$, $u_0\geqslant 0$, 使得

$$M(2u)\leqslant kM(u)\qquad(u\geqslant u_0),$$

则称 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件.

下面的定理中我们假设空间 (T,Σ,μ) 是连续的*).

定理 9. 下列命题等价:

1) 在 $\mathbf{L}_M$ 中满足条件(A);

2) $\mathbf{L}_M=\mathbf{E}_M$;

3) 在 $\mathbf{E}_M$ 中满足条件(B);

4) $\mathbf{L}_M=\mathbf{L}_M^0$;

5) $\mathbf{L}_M^0$ 是线性集;

6) N-函数 M 满足 Δ_2-条件.

证. 1) $\Longrightarrow$ 2). 如果在 $\mathbf{L}_M$ 中条件(A)成立，则根据引理 3 $\mathbf{L}^\infty$ 在 $\mathbf{L}_M$ 中稠密，因而 $\mathbf{E}_M=\mathbf{L}_M$.

2) $\Longrightarrow$ 3). 因为在 $\mathbf{L}_M$ 中条件(B)成立(定理 7).

3) $\Longrightarrow$ 2). 由于引理 1.

2) $\Longrightarrow$ 4). 因为根据引理 6, $\mathbf{E}_M\subset\mathbf{L}_M^0$.

---

*) 这个假设仅在证明(5)⇒(6)时用到.

4)$\Longrightarrow$5). 因为 $\mathbf{L}_M$ 是线性集.

5)$\Longrightarrow$4). 事实上,如果 $x\in\mathbf{L}_M, x\neq\mathbf{0}$, 则由于(13), $x/\|x\|_2\in\mathbf{L}_M^0$. 于是 $x=\|x\|_2(x/\|x\|_2)\in\mathbf{L}_M^0$.

4)$\Longrightarrow$1). 与定理 8 一样证明.

6)$\Longrightarrow$5). 设 $m\in N$. 容易看出,由 Δ_2-条件推出,当 $u\geqslant u_0$ 时不等式

$$M(2^m u)\leqslant k^m M(u)$$

成立.

现在设 $x\in\mathbf{L}_M^0$, λ 是某个数. 于是可以找到 $m\in N$, 使得 $|\lambda|\leqslant 2^m$. 故得

$$\int_T M(|\lambda x|)d\mu\leqslant k^m\int_T M(|x|)d\mu+\mu(T)M(2^m u_0)<\infty,$$

由此 $\lambda x\in\mathbf{L}_M^0$.

5)$\Longrightarrow$6). 设 N-函数 M 不满足 Δ_2-条件,则存在数列 $\{u_n\}$, 使得 $0<u_n\uparrow+\infty$, $M(u_1)>1$ 且

$$M(2u_n)>2^n M(u_n)\qquad(n=1,2,\cdots).\tag{18}$$

由于 (T,Σ,μ) 的连续性,可以求出不相交的集 $A_n\in\Sigma$, 使得

$$\mu(A_n)=\frac{\mu(T)}{2^n M(u_n)}\qquad(n=1,2,\cdots).\tag{19}$$

我们用下式

$$x(t)=\begin{cases}u_n, & \text{如果 } x\in A_n\qquad(n=1,2,\cdots)\\ 0, & \text{如果 } x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\end{cases}$$

来定义函数 $x(t)$.

由(19)

$$\int_T M(x(t))d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}M(x(t))d\mu$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)\mu(A_n)\leqslant\mu(T)<\infty,$$

由此 $x\in \mathbf{L}_M^0$. 另一方面, 由(18)与(19)得

$$\int_{A_n}M(2x(t))d\mu=M(2u_n)\mu(A_n)$$

$$>2^n M(u_n)\mu(A_n)=\mu(T),$$

故

$$\int_T M(2x(t))d\mu\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}M(2x(t))d\mu=+\infty.$$

所以, $2x\notin\mathbf{L}_M^0$, 定理完全证毕.

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有有限Lebesgue 测度的区域. 由定理 3 与定理 9 得:

推论. Orlicz 空间 $\mathbf{L}_M(D)$ 可分的充要条件为 N-函数 M 满足 Δ_2-条件.

最后指出, 空间 $\mathbf{L}^p(1<p<\infty)$包含在 Orlicz 空间类之中. 事实上, 设 $M(u)=u^p/p$, 则 Orlicz 空间 $\mathbf{L}_M$ 中的范数等价于 $\mathbf{L}^p$ 中的范数. 我们来证明

$$\|x\|_{\mathbf{L}^p}=p^{1/p}\|x\|_2. \tag{20}$$

如果

$$\int_T M(|x|/\|x\|_2)d\mu\leqslant 1,$$

则

$$\int_T |x(t)|^p/\|x\|_2^p d\mu\leqslant p,$$

由此

$$\left(\int_T |x(t)|^p d\mu\right)^{1/p}\leqslant p^{1/p}\|x\|_2.$$

另一方面,

$$\int_T M\left(\frac{|x(t)|}{p^{-1/p}\left(\int_T |x(t)|^p d\mu\right)^{1/p}}\right)d\mu=1,$$

由此$\|x\|_{L^p}\geqslant p^{1/p}\|x\|_2$，对照上面证明的不等式即得(20).

Orlicz 空间及其在解非线性积分方程中的应用，其较详细的讨论可参见 Красносельский 和 Рутицкий 的书．这方面的内容我们在其他一些地方还会提到(还可参见 Zaanen-I).

3.7. 下面我们简单地讨论两类空间，它们在线性算子内插理论中有重要应用(参见 Бирман 等).

如果$x\in S(0,1)$，则在$[0,1]$上用公式:

$$x^*(\tau)=\inf\{\alpha\geqslant 0:\ \mathrm{mes}(\{t:\ |x(t)|>\alpha\})\leqslant\tau\}$$

给出的函数叫做x的模按非增序的等可测置换.

设$\psi(t)$是$[0,1]$上连续凹的，当$t\neq 0$时为正的函数，使得$t/\psi(t)\xrightarrow[t\to 0^+]{}0$.

所谓 Marcinkiewicz 空间 $M(\psi)$ 是由满足下列条件的函数$x\in S(0,1)$组成的 Banach 空间，其范数

$$\|x\|=\sup\left\{\frac{1}{\psi(\mathrm{mes}(A))}\int_A|x(t)|dt: A\subset[0,1]\text{可测且}\ \mathrm{mes}(A)>0\right\}$$

$$=\sup_{0<h<1}\left\{\frac{1}{\psi(h)}\int_0^h x^*(\tau)d\tau\right\}$$

有限.

空间$M(\psi)$是 Banach 基本空间，它满足条件(B)与(C)，但不满足条件(A).

所谓 Lorentz 空间 $\Lambda(\psi)$ 是由满足下列条件的函数$x\in S(0,1)$组成的 Banach 空间，其范数

$$\|x\|=\int_0^1 x^*(\tau)d\psi(\tau)$$

有限.

空间$\Lambda(\psi)$是具有条件(A)与(B)的 Banach 基本空间.

对于$\psi(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha<1)$的空间$M(\psi)$与$\Lambda(\psi)$是最常见的，在此情形下它们分别记为$M(\alpha)$和$\Lambda(\alpha)$.

转换为等可测非增函数x^*的运算联系着一类重要的 Banach 基本空间

——对称空间类(参见 Бирман 等),即在区间[0, 1]上具有 Lebesgue测度的一种 Banach 基本空间, 使得由 $x\in\mathbf{X}$, $y\in\mathbf{S}(0,1)$, $x^*=y^*$ 推出 $y\in\mathbf{X}$ 且$\|x\|=\|y\|$. 空间 $\mathbf{L}^p(0,1)$, $\mathbf{L}_M(0,1)$, $\mathbf{E}_M(0,1)$, $\mathbf{M}(\psi)$及 $\mathbf{\Lambda}(\psi)$都是对称空间.

最后指出, 我们还可以研究与 Banach 理想空间类似的在 B-空间中取值的可测函数空间类. 这种空间在微分方程理论, 半群解析理论, 线性算子内插法等有其应用(例如参见 Bourbaki-V; Dunford 与 Schwartz-I, II; Dinculeanu; Yosida; Hille 与 Phillips; Edwards).

§4. 其他的赋范函数空间

4.1. 首先考虑早已知道的在紧集K上的连续函数组成的 B-空间 $\mathbf{C}(K)$. 我们简述关于子集按范数在 $\mathbf{C}(K)$上稠密的 Stone-Weierstrass 定理, 这个定理在应用中很重要.

在 $\mathbf{C}(K)$中定义按点乘法运算: $(xy)(t)=x(t)y(t)$. 设E是 $\mathbf{C}(K)$中的线性子集, 如果由 $x, y\in E$ 得出 $xy\in E$, 则称E是子代数. 用 $\mathbf{1}$ 表示在K上恒等于 1 的函数.

定理 1 (Stone-Weierstrass). 设E是实 B-空间 $\mathbf{C}(K)$ 中的子集, 如果下列条件成立:

1) E是子代数;

2) $\mathbf{1}\in E$;

3) E区分K上的点, 即对于任意的 $t, t'\in K$ $(t\neq t')$可以找到 $x\in E$, 使得 $x(t)\neq x(t')$;

则E在 $\mathbf{C}(K)$中稠密.

由定理 1 容易得到关于多项式集合在 $\mathbf{C}[a, b]$ 中稠密的经典结果.

如果我们考虑复空间 $\mathbf{C}(K)$, 定理 1 不再成立.

事实上, 取复平面上的闭单位圆作为 $K=\{z\in\mathbf{C}: |z|\leqslant 1\}$, 并考察$K$上的复多项式集 E, 即 $E=\mathscr{L}(1, z, z^2, \cdots)$. 集$E$满足定理 1 的条件, 但它不在复空间 $\mathbf{C}(K)$中稠密. 例如, 函数 $x(z)=$

Re $z\notin\bar{E}$, 因为, 不然的话, 根据 Weierstrass 定理它在单位圆内解析. 然而, 在复空间情形, 不难作一些修正.

定理 2. 设 E 是复 B-空间 $\mathbf{C}(K)$ 的子集, 满足定理 1 中的条件1)—3), 并满足:

4) 如果 $x\in E$, 则 $\bar{x}\in E$, 其中 $\bar{x}(t)=\overline{x(t)}$, 而划线表示复共轭. 则 E 在 $\mathbf{C}(K)$ 中稠密.

定理 1 与定理 2 的证明可参见 Dunford 与 Schwartz-I, Schäffer-I.

引理1. (关于单位分解). 如果 $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ 是紧集 K 的有限开复盖, 则可以找到一组 K 上的实连续函数 $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{n}$, 满足下列条件:

1) $\varphi_i(t)\geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$;

2) $\varphi_i(t)=0,\ t\notin U_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(t)=1$, 对任何 $t\in K$.

证. 我们仅对有度量为 $r(t,s)$ 的度量紧集 K 来验证. 记 $F_i=K\backslash U_i(i=1,2,\cdots,n)$. 对于任何 $t\in K$, 令

$$\varphi_i(t)=\frac{r(t,F_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}r(t,F_k)}$$

因为 $r(t,F_i)=0$ 等价于 $t\in F_i$, 所以函数组 $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{n}$ 满足条件 1)—3).

定理 3. 如果 K 是度量紧集, 则 B-空间 $\mathbf{C}(K)$ 是可分的.

注. 容易看出, 反之也成立: 如果 B-空间是可分的, 则紧集 K 是可度量的.

证. 不失一般性, 可以考察实的 $\mathbf{C}(K)$. 根据定理 I. 5. 2 的推论 1 紧集 K 是可分的. 设 M 是 K 中可数的处处稠密集. 由于 K

的紧性，对于每一个 $m\in N$，可以找到K的有限开复盖集 $U_i^m=\{s\in K: r(t_i, s)<1/m\}$ $(i=1, 2, \cdots, n(m))$，其中 $t_i\in M$. 设

$$\{\varphi_i^m(t)\}_{i=1}^{n(m)}$$

是根据引理 1 由 $\{U_i^m\}_{i=1}^{n(m)}$ 作出的单位分解，我们来证明形式为

$$\sum_{i=1}^{n(m)} r_i\varphi_i^m(t) \qquad (m=1, 2, \cdots)$$

的函数的可数集E在 $\mathbf{C}(K)$中稠密，其中 r_i 是任意的有理数. 取 $x\in\mathbf{C}(K)$ 及数 $\varepsilon>0$. 因为函数 $x(t)$ 在K上一致连续，所以对于 $\varepsilon>0$，可以找到 $\delta>0$ 使得如果 $r(t, s)<\delta$，则 $|x(t)-x(s)|<\varepsilon$. 取 $m\in N$，使得 $1/m<\delta$. 于是，可以取有理数 r_i 满足条件：对所有 $t\in U_i^m$，$|x(t)-r_i|<2\varepsilon$ $(i=1, 2, \cdots, n(m))$. 令

$$\tilde{x}(t)=\sum_{i=1}^{n(m)} r_i\varphi_i^m(t),$$

这时 $\tilde{x}\in E$，且如果 $t\in U_i^m$，则

$$|x(t)-\tilde{x}(t)|=\left|\sum_{i=1}^{n(m)} x(t)\varphi_i^m(t)-\sum_{i=1}^{n(m)} r_i\varphi_i^m(t)\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n(m)}|x(t)-r_i|\varphi_i^m(t)<2\varepsilon.$$

因为$\{U_i^m\}_{i=1}^{n(m)}$是K的复盖，则由此得到$\|x-\tilde{x}\|<2\varepsilon$. 从而证明了$E$在 $\mathbf{C}(K)$中稠密.

4.2. 下面我们将看到，有界变差函数空间与空间 $\mathbf{C}[a, b]$有着密切的联系.

设 $x(t)$是在区间$[a, b]$上给定的有限函数. 考虑区间 $[a, b]$ 的任意分划 $\tau(a=t_0<t_1<\cdots t_n=b)$，构成表示式

$$v_\tau=\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|. \tag{1}$$

如果对于区间$[a,b]$上所有可能的分划 τ 和式 v_τ 的总体有界，则称函数 $x(t)$是区间$[a,b]$ 上的有界变差函数，而量

$$\bigvee_a^b(x)=\sup_\tau v_\tau$$

叫做函数 $x(t)$ 的全变差.

我们来研究有界变差函数全体构成的集合 $\mathbf{V}$，这个集合 $\mathbf{V}$ 是向量空间. 事实上，每一个在区间$[a,b]$上的有界变差函数可以表示为两个非降函数之差的形式(参见 Фихтенгольц, 第三卷):

$$x(t)=x_1(t)-x_2(t) \qquad (t\in[a,b]).$$

反之，不难看出，每一个可以表示为两个非降函数之差的函数是有界变差函数. 从这个注解直接推出 $\mathbf{V}$ 是线性的.

对于 $x\in\mathbf{V}$，如果令

$$\|x\|=|x(a)|+\bigvee_a^b(x)$$

则$\mathbf{V}$成为赋范空间.

事实上，赋范空间的前两个公理显然成立. 所以只需验证三角不等式. 设 $x, y\in\mathbf{V}$, $z=x+y$. 于是，对于区间$[a,b]$的任何分划$(a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b)$,

$$|z(a)|=|x(a)+y(a)|\leqslant|x(a)|+|y(a)|$$

且

$$|(z(t_k)-z(t_{k-1})|$$
$$\leqslant|x(t_k)-x(t_{k-1})|+|y(t_k)-y(t_{k-1})| \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

因而

$$|z(a)|+\sum_{k=1}^n|z(t_k)-z(t_{k-1})|$$
$$\leqslant|x(a)|+\sum_{k=1}^n|x(t_k)-x(t_{k-1})|+|y(a)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}|y(t_k)-y(t_{k-1})|\leqslant\|x\|+\|y\|,$$

由此推出所要求的不等式.

我们来证明 $\mathbf{V}$ 是完备空间.

设 $\{x_n\}$ 是自收敛序列. 首先, 因为

$$\begin{aligned}
&|x_m(t)-x_n(t)|\\
&\quad\leqslant|[x_m(t)-x_n(t)]-[x_m(a)-x_n(a)]|+|x_m(a)-x_n(a)|\\
&\quad\leqslant|x_m(a)-x_n(a)|+\bigvee_a^b(x_m-x_n)\\
&\quad=\|x_m-x_n\|,
\end{aligned}$$

所以, 对于任何 $t\in[a,b]$ 数列 $\{x_n(t)\}$ 收敛. 令 $x_0(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$.

设 $\varepsilon>0$ 及 N_ε 充分大, 当 $m,n\geqslant N_\varepsilon$ 时

$$\|x_m-x_n\|<\varepsilon.$$

从而对于任何分划 $a=t_0<t_1<\cdots<t_r=b$ 有

$$|x_m(a)-x_n(a)|+\sum_{k=1}^{r}|[x_m(t_k)-x_n(t_k)]-[x_m(t_{k-1})-x_n(t_{k-1})]|<\varepsilon.$$

给定这个分划, 令 $m\to\infty$, 取极限后得

$$|x_0(a)-x_n(a)|+\sum_{k=1}^{r}|[x_0(t_k)-x_n(t_k)]-[x_0(t_{k-1})-x_n(t_{k-1})]|\leqslant\varepsilon.$$

因为上式对于任何分划成立, 所以

$$|x_0(a)-x_n(a)|+\bigvee_a^b(x_0-x_n)\leqslant\varepsilon\qquad(n>N_\varepsilon)$$

由此用通常的讨论就可得出结论: $x_0\in\mathbf{V}$ 及

$$\|x_0-x_n\|\leqslant\varepsilon\qquad(n>N_\varepsilon),$$

即 $x_n \to x_0$.

4.3. 在泛函分析中，除了连续函数空间和可测函数空间外，光滑函数和解析函数空间起着重要作用. 例如，下面要讨论的 Соболев 空间和 $\mathbf{C}^{(l)}(D)$ 空间是光滑函数空间. 作为例子，我们引进 Hardy 解析函数空间的定义（详细的内容参见 Hoffman ）.

用 $\mathbf{H}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示在单位开圆 D 中解析函数 $x(z)$ 的 B-空间，其中范数：

$$\|x\| = \begin{cases} \sup\limits_{0 \leqslant r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |x(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{z \in D} |x(z)|, & p = \infty \end{cases}$$

有限.

当 $1 < p < \infty$ 时，空间 $\mathbf{H}^p$ 可以用自然方式以余子空间形式嵌入 $\mathbf{L}^p(0, 2\pi)$. 当 $p = 1, \infty$ 时，$\mathbf{H}^p$ 不能这样嵌入任何 $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$.

4.4. 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域. 如果存在一个在闭包 $\bar{D}$ 上的连续函数 $\tilde{x}(t)$，它在 D 上与连续函数 $x(t)$ 重合，则称在 D 内连续的函数 $x(t)$ 连续延拓到 $\bar{D}$ 上（这样的函数 $\tilde{x}(t)$ 显然是唯一的）.

用 $\mathbf{C}(D)$ 表示所有在 D 内连续且连续延拓到 $\bar{D}$ 上的函数 $x(t)$ 组成的具有范数为

$$\|x\| = \sup_{t \in D} |x(t)|$$

的 B-空间.

容易看出，映射 $x \to \tilde{x}$ 是 B-空间 $\mathbf{C}(D)$ 到 $\mathbf{C}(\bar{D})$ 上的线性同构. 由此，空间 $\mathbf{C}(\bar{D})$ 是完备的.

如果函数 $x(t)$ 在 D 内存在阶数 $\leqslant l$ 的各阶连续偏导数，把它们连续延拓到 $\bar{D}$ 上，则称 $x(t)$ 在 $\bar{D}$ 内有 l 阶连续导数.

用 $\mathbf{C}^{(l)}(D)$ 表示所有 D 内的在 $\bar{D}$ 上有 l 阶连续导数的函数 $x(t)$ 组成的具有范数

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{l} \sum_{(k)} \sup_{t \in D} \left| \frac{\partial^k x(t)}{\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_n^{k_n}} \right|$$

的 B-空间，其中 $\sum\limits_{(k)}$ 是对所有可能的 k 阶导数求和.

空间 $\mathbf{C}(D)$ 与 $\mathbf{C}^{(l)}(D)$ 在嵌入理论有关的一些部分(参见后面的第十一章)起着重要作用.

§5. Hilbert 空间

5.1. 欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 与其他的有限维空间的区别在于其中定义了内积，这个内积与范数按照简单的关系联系着：元素的范数平方是这个元素与它本身的内积.

因此，研究那种定义了"内积"的空间，并以上述方式引进范数，是恰当的.

设 $\mathbf{H}$ 是复向量空间，如果对于每一对元素 $x, y\in\mathbf{H}$ 定义了内积 (x, y)，即满足下列条件(公理)的复数：

1) $(y, x)=\overline{(x, y)}$;

2) $(\lambda x_1+\mu x_2, y)=\lambda(x_1, y)+\mu(x_2, y)$;

3) $(x, x)\geqslant 0$, $(x, x)=0$ 等价于 $x=\mathbf{0}$.

则称 $\mathbf{H}$ 是内积空间*).

由内积空间的定义推出：

a) $(x, \lambda y_1+\mu y_2)=\bar{\lambda}(x, y_1)+\bar{\mu}(x, y_2)$.

(公理 1)和 2)).

b) $(x, \mathbf{0})=(\mathbf{0}, y)=0$.

事实上，$(x, 0\cdot y)=0\cdot(x, y)=0$.

c) $|(x, y)|^2\leqslant(x, x)(y, y)$ (Cauchy-Буняковский 不等式).

---

*) 也有对实向量空间来引进内积空间的，这时内积是个实数，同时条件 1)改为 $(y, x)=(x, y)$.

下面讲到内积时，如果不作声明，总认为是讨论复空间，然而，除了算子的谱论外全部结果对实空间情形也成立.

为了证明这个命题，研究式子

$$(x+\lambda y, x+\lambda y)=(x, x)+\bar{\lambda}(x, y)+\lambda(y, x)+|\lambda|^2(y, y).$$

按公理 3)对于任何数 λ 上式非负．设$(y, y)>0$(否则 $y=\mathbf{0}$，这个不等式显然成立)，令 $\lambda=-(x, y)/(y, y)$，根据以上所述得

$$(x, x)-\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}-\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}+\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}\geqslant 0,$$

即$(x, x)(y, y)-|(x, y)|^2\geqslant 0$，证毕．

如果在内积空间 $\mathbf{H}$ 中令

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)} \qquad (x\in\mathbf{H}), \tag{1}$$

则$\mathbf{H}$变成赋范空间．事实上，赋范空间的公理中，只有三角不等式不能直接从$\mathbf{H}$的定义推出．我们来证明它，设 $x, y\in\mathbf{H}$，利用 Cauchy-Буняковский 不等式有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y, x+y)=|(x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y)|\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=[\|x\|+\|y\|]^2\end{aligned}$$

如果在赋范空间$\mathbf{H}$中可以引进与范数按(1)式相联系的内积，则称空间$\mathbf{H}$是酉空间．

因为$\mathbf{H}$是赋范空间，它具有赋范空间的所有性质，特别在 1.1 中指出的那些基本事实都成立．我们还要指出与内积空间特别有关的几个简单命题．

1) 内积的连续性．如果 $x_n\to x$ 及 $y_n\to y$，则$(x_n, y_n)\to(x, y)$．事实上，利用 Cauchy-Буняковский 不等式得

$$\begin{aligned}|(x, y)-(x_n, y_n)|&\leqslant|(x, y-y_n)|+|(x-x_n, y_n)|\\&\leqslant\|x\|\|y-y_n\|+\|x-x_n\|\|y_n\|.\end{aligned}$$

因为收敛序列$\{y_n\}$有界，所以上述不等式的右端趋于零，因此

$$(x_n, y_n)\to(x, y).$$

2) 对于任意的元素 $x, y\in\mathbf{H}$，下列等式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2[\|x\|^2+\|y\|^2]^{*)} \tag{2}$$

成立.

实际上,根据范数的定义有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)$$
$$=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)+(x,x)-(x,y)$$
$$-(y,x)+(y,y)=2[\|x\|^2+\|y\|^2]$$

因此,$\mathbf{H}$是酉空间,这意味着在$\mathbf{H}$中的范数以内积的特殊方式来引进. 空间$\mathbf{H}$的完备化$\overline{\mathbf{H}}$也是赋范空间(1.4). 我们指出,$\mathbf{H}$中的内积可以推广到$\overline{\mathbf{H}}$上,使$\overline{\mathbf{H}}$成为酉空间.

3) 酉空间$\mathbf{H}$的完备化$\overline{\mathbf{H}}$仍是酉空间.

事实上,设$\xi,\eta\in\overline{\mathbf{H}}$. 存在序列$\{x_n\}$, $\{y_n\}\subset\mathbf{H}$, 使得$x_n\to\xi$, $y_n\to\eta$. 几乎逐字逐句重复1)中的讨论可知$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)$存在,它不依赖于序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的选法,而仅由元素$\xi$与$\eta$来确定. 根据1),对于$\xi,\eta\in\mathbf{H}$, $\lim(x_n,y_n)=(\xi,\eta)$, 对于任意的$\xi,\eta\in\overline{\mathbf{H}}$, 自然令

$$(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n).$$

由这个定义,不难验证$\overline{\mathbf{H}}$成为内积空间. 再由1.4指出的$\overline{\mathbf{H}}$中的范数与$\mathbf{H}$中范数的关系可得

$$\|\xi\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim\sqrt{(x_n,x_n)}=\sqrt{(\xi,\xi)}$$
$$(\xi\in\overline{\mathbf{H}},\ x_n\to\xi,\ x_n\in\mathbf{H},\ \ n=1,2,\cdots),$$

这表示$\overline{\mathbf{H}}$是酉空间.

还指出一个完全显然的命题.

4) 酉空间的子空间也是酉空间.

---

*) 此关系式是初等几何中平行四边形对角线平方和等于各边平方和这个事实的拓广.

如果在赋范空间$\mathbf{X}$中对于任意的元素$x,y\in\mathbf{X}$关系式(2)成立,则$\mathbf{X}$是酉空间,即在$\mathbf{X}$中可以引进内积,使得范数由等式(1)定义.

5.2. 下面我们主要讨论完备酉空间，这种空间叫做 Hilbert 空间(以德国数学家 D. Hilbert 命名)*).

Hilbert 空间是欧氏空间的直接推广，所以它的"几何"比其他任何 B-空间更接近于欧氏空间的几何. Hilbert 空间具有许多一般 B-空间所没有的欧氏空间性质(例如关系式(2)). 这一情况使得根据 Hilbert 空间发展起来的泛函分析要比根据一般赋范空间的更广泛更完全. 所以 Hilbert 空间理论成为有它自己的结果和方法的泛函分析的一个大的独立分枝，这些结果和方法与本书主要讨论的一般泛函分析不一样. 因此，在这里和以后讨论 Hilbert 空间，通常只作为例子考察与一般理论有关的一些结果.

5.3. 空间 $\mathbf{l}^2$ 是 Hilbert 空间的一个具体例子，其中的内积用下式定义：

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\bar{\eta}_k$$

$$(x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots), \quad y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots)).$$

根据(1)式通过内积定义范数

$$\|x\|=\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

它与 2.3 中定义的范数一致. 所以，我们仍沿用 $\mathbf{l}^2$ 来表示这个空间. 以前已经证明，这个空间是完备的.

更一般的设(T, Σ, μ)是测度空间，如果令

$$(x, y)=\int_T x(t)\bar{y}(t)d\mu,$$

则 $\mathbf{L}^2(T, \Sigma, \mu)$成为 Hilbert 空间.

$\mathbf{L}^2$ 中的范数与由公式(1)引进的范数一致. 现在考察一个特

*) 此外，有时还要求空间是无限维的. 抽象 Hilbert 空间是由 Neumann [1] 引进的.

殊情形. 设函数 $\varphi\in\mathbf{L}^1(a,b)$，且$\varphi(t)>0$ a.e.(区间也可能是无限的). 对于所有的 Lebesgue 可测集 A, 令

$$\nu(A)=\int_A\varphi(t)\,dt,$$

用 $\mathbf{L}^2_\varphi(a,b)$表示关于测度 ν 平方可积的函数构成的Hilbert空间. 同时, 显然用下式

$$(x,y)=\int_a^b\varphi(t)[x(t)\overline{y(t)}]\,dt$$

定义内积.

如果 $\varphi(t)=1$, 则 $\mathbf{L}^2_\varphi(a,b)=\mathbf{L}^2(a,b)$. 我们已经证明，空间 $\mathbf{l}^2$ 和 $\mathbf{L}^2(a,b)$都是可分的.

由定义在整个数直线上且取非零值不多于可数多个的函数构成的空间 $\mathbf{H}_c$ 是不可分 Hilbert 空间的一个例子. 这时设

$$\sum_t|x(t)|^2<\infty^{*)}.$$

在空间 $\mathbf{H}_c$ 中的内积用下式来定义:

$$(x,y)=\sum_t x(t)\overline{y(t)}.$$

据 $\mathbf{l}^2$ 的完备性, 请读者自己证明这个空间的完备性.

如果用 x_τ 表示 $\mathbf{H}_c$ 中的元素:

$$x_\tau(t)=\begin{cases}1, & t=\tau,\\ 0, & t\neq\tau,\end{cases}$$

则不难验证, $\|x_\tau-x_{\tau'}\|=\sqrt{2}$ (如果 $\tau\neq\tau'$)，由此可见 $\mathbf{H}_c$ 是不可分的.

5.4. 在研究 Hilbert 空间时，元素正交性的概念是极为重要的.

---

*) 因仅对不多于可数个 t 的值函数 $x(t)$ 异于零，所以可把和式看成一般的级数.

设 x 与 y 是 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的两个元素，如果 $(x, y)=0$，则称它们是相互正交的，并且记为 $x \perp y$.

对于一个指定的元素 $x \in \mathbf{H}$，如果它与某个集 $E \subset \mathbf{H}$ 中的每一个元素都正交，则称 x 与 E 正交，并且记为 $x \perp E$.

最后，如果两个集 E_1 与 E_2 中的元素相互正交，则称这两个集合正交 $(E_1 \perp E_2)$.

下面给出与正交性概念有关的几个简单性质:

a) 如果 $x \perp y_1$ 且 $x \perp y_2$，则 $x \perp \lambda y_1 + \mu y_2$.

b) 如果 $x \perp y_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ 且 $y_n \to y$，则 $x \perp y$.

这可从内积的连续性直接推出(参见 5.1 中的 1)).

c) 如果 $x \perp E$，则 $x \perp \overline{\mathscr{L}}(E)$.

只要利用 a) 与 b) 即可证得.

d) 如果 $x \perp E$，其中 E 是 $\mathbf{H}$ 中的基本集，即 $\overline{\mathscr{L}}(E)=\mathbf{H}$，则 $x=\mathbf{0}$.

事实上，这时 $x \perp \mathbf{H}$，因而 x 与自己正交，即 $(x, x)=0$，这等价于 $x=\mathbf{0}$.

e) 与给定的集 E 正交的元素全体是空间 $\mathbf{H}$ 的子空间，即它们构成闭线性集*). 这个子空间叫做集 E 的正交补.

下面的定理在 Hilbert 空间理论中有重要意义.

定理 1. 设 $\mathbf{H}_1$ 是 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 的子空间，$\mathbf{H}_2$ 是 $\mathbf{H}_1$ 的正交补，则对于任何元素 $x \in \mathbf{H}$，可以把它唯一地表示为下列形式:

$$x=x'+x'' \qquad (x' \in \mathbf{H}_1,\ x'' \in \mathbf{H}_2). \tag{3}$$

并且，元素 x' 实现了 x 到 $\mathbf{H}_1$ 的距离，即

$$\|x-x'\|=\rho(x, \mathbf{H}_1)^{**)}. \tag{4}$$

---

*) 在 Hilbert 空间情形，术语"子空间"总表示"闭线性集".

**) 此定理以这种形式表示的是由 Rellich[1] 证明的.

证. 令

$$d=\rho(x, \mathbf{H}_1),$$

可以找到元素 $x_n \in \mathbf{H}_1$, 使得

$$\|x-x_n\|^2<d^2+\frac{1}{n^2} \qquad (n=1, 2, \cdots). \tag{5}$$

由关系式(2)

$$\begin{aligned}&\|x_n-x_m\|^2+\|(x-x_n)+(x-x_m)\|^2\\&\quad=2[\|x-x_n\|^2+\|x-x_m\|^2]\end{aligned} \tag{6}$$

而因为 $\frac{x_m+x_n}{2}\in\mathbf{H}_1$, 所以

$$\|(x-x_n)+(x-x_m)\|^2=4\left\|x-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2\geqslant 4d^2,$$

因此, 利用(5)由(6)式及这个估计式得

$$\|x_n-x_m\|^2\leqslant 2\left[d^2+\frac{1}{n^2}+d^2+\frac{1}{m^2}\right]-4d^2=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{m^2}.$$

这样, 序列 $\{x_n\}$ 是自收敛的. 由于空间 $\mathbf{H}$ 的完备性, 存在 $x'=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 并且 $x'\in\mathbf{H}_1$(根据闭性). 对(5)式取极限后求得 $\|x-x'\|\leqslant d$, 又因为对于 $\mathbf{H}_1$ 中任何元素其中包括 x' 应有 $\|x-x'\|\geqslant d$, 所以

$$\|x-x'\|=d \tag{7}$$

现在来证明元素 $x''=x-x'$ 与 $\mathbf{H}_1$ 正交, 因而它属于 $\mathbf{H}_2$. 取异于零的元素 $y\in\mathbf{H}_1$, 对于任何 λ 有 $x'+\lambda y\in\mathbf{H}_1$, 于是

$$\|x''-\lambda y\|^2=\|x-(x'+\lambda y)\|^2\geqslant d^2,$$

利用(7)式可以把上式改写为

$$-\bar{\lambda}(x'', y)-\lambda(y, x'')+|\lambda|^2(y, y)\geqslant 0.$$

特别当 $\lambda=\frac{(x'', y)}{(y, y)}$ 时得

$$-\frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)}-\frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)}+\frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)}\geqslant 0,$$

即

$$|(x'', y)|^2 \leqslant 0,$$

从而只可能是$(x'', y)=0$, $x'' \perp y$.

于是, 证明了可以把 x 表示为(3)的形式, 并且(4)式成立.

下面来证明式(3)是唯一的. 事实上, 如果

$$x = x_1' + x_1'' \qquad (x_1' \in \mathbf{H}_1,\ x_1'' \in \mathbf{H}_2),$$

把它与(3)式比较得

$$x' - x_1' = x_1'' - x''.$$

这等式左边的元素属于 $\mathbf{H}_1$, 而右边的元素属于 $\mathbf{H}_2$, 所以 $x' - x_1' \perp x_1'' - x''$, 由此得 $x' - x_1' = x_1'' - x'' = \mathbf{0}$, 定理完全证毕.

由元素 x 单值确定的元素 x' 和 x'' 分别叫做元素 x 在子空间 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 上的投影.

如果集合$\{x_\alpha\}$在$\mathbf{H}$中是基本的, 即 $\mathbf{H} = \overline{\mathscr{L}}(\{x_\alpha\})$ (参见 III. 3. 2), 则称这组元素$\{x_\alpha\}$($\alpha \in A$)在 Hilbert 空间$\mathbf{H}$中是完全的.

推论. 元素组$\{x_\alpha\}$($\alpha \in A$) 在空间$\mathbf{H}$中是完全的, 其充要条件为不存在与组中每一个元素正交的非零元素.

事实上, 条件的必要性由 5.4 的命题 d) 推出. 现在来证明充分性, 因为如果$\{x_\alpha\}$是不完全组, 则子空间 $\mathbf{H}_1 = \overline{\mathscr{L}}(\{x_\alpha\}) \neq \mathbf{H}$, 于是, 取元素 $x \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{H}_1$ 并把它分解为投影的和 $x = x' + x''$ $(x' \in \mathbf{H}_1, x'' \perp \mathbf{H}_1)$, 有 $x'' \neq \mathbf{0}$ 且 $x'' \perp x_\alpha$($\alpha \in A$), 这与条件矛盾.

5.5. 设$\{x_\alpha\}$($\alpha \in A$) 是 Hilbert 空间$\mathbf{H}$中的一组元素, 如果其中任意两个不同的元素相互正交, 则称这组元素为正交的. 此外, 如果每个元素 x_α 的范数等于 1, 则称这组元素是规格化正交的.

三角函数系 1, $\cos\frac{2\pi(t-a)}{b-a}$, $\sin\frac{2\pi(t-a)}{b-a}$, $\cdots$, $\cos\frac{2\pi n(t-a)}{b-a}$, $\sin\frac{2\pi n(t-a)}{b-a}$, $\cdots$ 是$\mathbf{L}^2(a, b)$中正交系的重要例子. 这是一个完全系, 因为这个函数系的线性包, 即三角多项式全体构成的集合在$\mathbf{L}^2(a, b)$中稠密.

为了证明这一点，首先指出，所有有界(可测)函数的集合在$\mathbf{L}^2(a,b)$中稠密.其次，利用Лузин定理可知连续周期函数(即在$[a, b]$的两端上取值相等的函数)的集合在这个集合中稠密. 最后，根据Weierstrass定理得知三角多项式集合在连续函数集合中稠密.

在$\mathbf{L}^2(a,b)$中正交系的另一个例子是所谓Rademacher系，它由下列函数组成:

$$x_n(t)=(-1)^k$$

$$\left(\frac{k}{2^n}(b-a)<t-a<\frac{k+1}{2^n}(b-a);\quad k=0,1,\cdots,2^n-1;\quad n=0,1,\cdots\right).$$

这个函数系是不完全的. 事实上，函数$x(t)=(t-a)(t-b)+\dfrac{(b-a)^2}{b}$与系中所有的函数都正交.

元素组$\{x_n\}$, $x_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$是$\mathbf{l}^2$中的正交系，显然这是一个完全系.

元素$\{x_\tau\}$的全体是$\mathbf{H}_c$中的正交系，其中x_τ是在前面5.3中定义的元素.

如果在正交系的元素中没有零元素，则这个正交系是线性独立的. 事实上，如果存在线性相关性:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}=\mathbf{0},$$

则在这等式两边与x_{α_j}取内积后得$\lambda_j\|x_{\alpha_j}\|^2=0$.

不难把任何一个正交系变为规格化正交系，如果把每个元素除以它的范数(假设这个正交系不包含零元素). 对任意一组元素进行规格正交化就比较复杂，我们限于对可数组情形证明下面的正交化定理.

定理 3 (正交化定理). 设$\{y_n\}$是Hilbert空间$\mathbf{H}$中的一组线性独立元素，则存在规格化正交系$\{x_n\}$. 使得

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}y_k\qquad(\lambda_n^{(n)}\neq 0;\quad n=1,2,\cdots).\tag{8}$$

我们给出定理的两个证明.

证明一. 令

$$x_1=\lambda_1^{(1)}y_1 \qquad (\lambda_1^{(1)}=1/\|y_1\|).$$

假设已构造得相互正交的规格化元素 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, 它们与 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 之间的关系满足(8)式. 用 $\mathbf{H}'_n$表示元素 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 的线性包, 而用 $\mathbf{H}''_n$ 表示 $\mathbf{H}'_n$ 的正交补. 因为 $y_n \notin \mathbf{H}'_n$, 所以在分解式

$$y_n=y'_n+y''_n \quad (y'_n\in\mathbf{H}'_n,\ y''_n\in\mathbf{H}''_n)$$

中投影 $y''_n\neq\mathbf{0}$. 记

$$x_n=\lambda_n^{(n)}y''_n \qquad \left(\lambda_n^{(n)}=\frac{1}{\|y''_n\|}\right),$$

有$\|x_n\|=1$, 且因为 $x_n\perp\mathbf{H}'_n$, 而 $x_k\in\mathbf{H}'_n\,(k<n)$, 所以 $x_n\perp x_k\,(k<n)$.

其次,

$$x_n=\lambda_n^{(n)}y''_n=\lambda_n^{(n)}y_n-\lambda_n^{(n)}y'_n,$$

由于 $y'_n\in\mathbf{H}'_n$, 有

$$y'_n=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k^{(n)}y_k.$$

令 $\lambda_k^{(n)}=-\alpha_k^{(n)}\lambda_n^{(n)}\ \ (k<n)$, 得

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}y_k.$$

这是用归纳法证明此定理.

注 1. 因为$\lambda_n^{(n)}\neq0$, 所以元素 y_n 可以通过 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 来表示:

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}x_k \qquad \left(\mu_n^{(n)}=\frac{1}{\lambda_n^{(n)}};\ \ n=1,2,\cdots\right) \tag{9}$$

注 2. 由元素 y_n 确定元素 x_n 并不是单值的. 然而, 如果要求

$\lambda_n^{(n)}>0\,(n=1,2,\cdots)$，则元素组 $\{x_n\}$ 是唯一的。

事实上，设有两组元素 $\{x_n\}$ 与 $\{\tilde{x}_n\}$ 满足上述要求．利用关系式(8)与(9)及元素组 $\{\tilde{x}_n\}$ 的类似式子，我们可以通过元素组 $\{x_n\}$ 来表示另一组 $\{\tilde{x}_n\}$ 的元素，即得下列形式的式子：

$$\tilde{x}_n=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(n)}x_k. \tag{10}$$

同时不难看出，系数 $\beta_k^{(n)}$ 是正的(它等于乘积 $\tilde{\lambda}_n^{(n)}\mu_n^{(n)}$，其中 $\tilde{\lambda}_n^{(n)}$ 表示公式(8)对于元素组 $\{\tilde{x}_n\}$ 的对应系数)．由此显然有 $\tilde{x}_1=x_1$．如果已证明 $\tilde{x}_1=x_1$，$\tilde{x}_2=x_2,\cdots,\tilde{x}_{n-1}=x_{n-1}$，则在(10)式两端与 x_j 求内积有 $0=\beta_j^{(n)}\,(j<n)$，即 $\tilde{x}_n=\beta_n^{(n)}x_n$．从而因为 $\|\tilde{x}_n\|=\|x_n\|=1$，有 $\beta_n^{(n)}=1$，所以 $\tilde{x}_n=x_n$．

证明二． 引用表示式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & (y_1,y_2) & \cdots & (y_1,y_n)\\ (y_2,y_1) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_2,y_n)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ (y_n,y_1) & (y_n,y_2) & \cdots & (y_n,y_n)\end{vmatrix},$$

$$\Delta_0=1 \qquad \text{(Gram 行列式)},$$

$$x'_n=\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & (y_1,y_2) & \cdots & (y_1,y_{n-1}) & y_1\\ (y_2,y_1) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_2,y_{n-1}) & y_2\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ (y_n,y_1) & (y_n,y_2) & \cdots & (y_n,y_{n-1}) & y_n\end{vmatrix},$$

后一个行列式理解为最后一列的元素乘上其对应的代数余子式的和，显然

$$(x'_n,\ y_n)=\Delta_n \tag{11}$$

$$(x'_n,y_k)=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n-1) \tag{12}$$

后面式子是由于在左端行列式中有两列元素相同(第 k 列和第 n 列)．

如果在行列式 x'_n 的最后一列乘以(内积) x'_n，并利用(11)式与(12)式，这时得到的是其中最后一列元素除了最后一个元素等于

Δ_n 外其余都等于 0 的行列式. 把得到的行列式按 最后一列展开, 即得关系式

$$(x'_n, x'_n) = \Delta_n \Delta_{n-1} \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

因为元素 $x'_n \neq \mathbf{0}$(否则元素 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 线性相关), 由此得知 $\Delta_n \neq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$.

最后指出, 元素 x'_k $(k<n)$ 用 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 线性表出时, 根据关系式(12), 它与 x'_n 正交.

按上面的讨论, 如果令

$$x_n = \frac{x'_n}{\|x'_n\|} = \frac{x'_n}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \qquad (n=1, 2, \cdots), \tag{13}$$

则得所要求的规格化正交系.

5.6. 利用所得的结果可构造关于有权的正交多项式系.

在空间 $\mathbf{L}^2_{\varphi}(a, b)$ 中取

$$y_n(t) = t^n \qquad (n=0, 1, \cdots) \tag{14}$$

作为$\{y_n\}$, 这个序列正交化后得序列$\{x_n\}$, 使得

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} t^k \qquad (\lambda_n^{(n)} \neq 0; \ \ n=0, 1, \cdots),$$

并且

$$(x_m, x_n) = \int_a^b \varphi(t) x_m(t) \overline{x_n(t)} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m=n. \end{cases}$$

多项式 $x_n(t)$ 叫做有权 $\varphi(t)$ 的正交多项式, 它们在函数构造论中起很大的作用. 因为函数系(14)是完全的, 所以由此产生的正交多项式系也是完全的.

利用公式(13)可得到正交多项式的明显表达式, 在此情形

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n0} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad c_{jk} = \int_a^b \varphi(t) t^{j+k} dt \quad (j, k=0, 1, \cdots, n),$$

于是

$$x_n(t)=\frac{x'(t)}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}}=\frac{\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0\,n-1} & 1 \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1\,n-1} & t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n0} & c_{n1} & \cdots & c_{n\,n-1} & t^n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}} \qquad (n=0,1,\cdots).$$

附带指出，从这些公式可知，多项式 x_n 是实系数的.

如果 $\varphi(t)\equiv 1$; $a=-1$, $b=1$, 则称这正交多项式为 Legendre 多项式，并记为 $P_n(t)$. 可以证明，

$$P_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{(2n)!!}\,\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n] \qquad (n=0,1,\cdots). \tag{15}$$

当 $\varphi(t)=(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{\beta}$; $a=-1$, $b=1$ 时，得 Jacobi 多项式

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(t)=k_n(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^n}{dt^n}[(1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}], \tag{16}$$

其中

$$k_n=(-1)^n\sqrt{2^{-(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\,\frac{\alpha+\beta+2n+1}{n!}}$$

特别，当 $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ 时得 Чебышев 多项式，这种多项式在函数论的各种问题中经常遇到.

当 $\varphi(t)=e^{-t}$; $a=0$, $b=\infty$ 时，得 Laguerre 多项式

$$L_n(t)=\frac{(-1)^n}{n!}e^t\frac{d^n}{dt^n}[e^{-t}t^n]. \tag{17}$$

最后，如果 $\varphi(t)=e^{-t^2}$; $a=-\infty$, $b=\infty$, 得 Hermite 多项式，并记为 $H_n(t)$, 此时

$$H_n(t)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}[e^{-t^2}]^{*)}. \tag{18}$$

5.7. 下面主要讨论可分 Hilbert 空间. 在讨论具体的可分空间中的具体正交系时，我们看到它们都是可数的. 这种情况并非偶然. 即下面的定理成立:

---

*) 关于正交多项式比较详细的讨论，特别是公式(15)—(18)的证明，读者可参考 Натансон-I(也可参见 Szegö).

定理 3. 可分Hilbert 空间$\mathbf{H}$中的规格化正交系$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$中元素不多于可数个.

证. 设D是$\mathbf{H}$中的可数稠密集. 对于每一个x_α, 可以找到$y_\alpha\in D$使得

$$\|x_\alpha-y_\alpha\|<1/2.$$

同时, 不同的元素x_α与$x_{\alpha'}$对应于不同的元素y_α与$y_{\alpha'}$. 事实上,

$$\begin{aligned}\|y_\alpha-y_{\alpha'}\|&=\|(x_\alpha-x_{\alpha'})+(x_{\alpha'}-y_{\alpha'})+(y_\alpha-x_\alpha)\|\\&\geqslant\|x_\alpha-x_{\alpha'}\|-[\|x_{\alpha'}-y_{\alpha'}\|+\|y_\alpha-x_\alpha\|]>\sqrt{2}-1>0,\end{aligned}$$

因为

$$\|x_\alpha-x_{\alpha'}\|^2=(x_\alpha-x_{\alpha'},x_\alpha-x_{\alpha'})=(x_\alpha,x_\alpha)+(x_{\alpha'},x_{\alpha'})=2.$$

由此可见, 集合$\{x_\alpha\}$等价于可数集D的一部分, 故其中元素不超过可数个.

下述定理是上面定理的补充.

定理 4. 如果可分 Hilbert 空间$\mathbf{H}$是无限维的, 则其中存在完全的可数的规格化正交系.

证. 从$\mathbf{H}$中的可数稠密集$D=\{z_n\}$出发, 构造在$\mathbf{H}$中完全的线性独立系$\{y_k\}$. 为此, 可以认为$z_1\neq 0$, 令$y_1=z_1$. 其次, 取元素z_{n_2}作为y_2, 使得y_1与$y_2=z_{n_2}$线性独立, 且下标$n_2\geqslant 2$是最小的. 这个过程继续下去即得要求的元素组$\{y_k\}$. 事实上, $\{y_k\}$是完全系, 因为任何元素z_n显然是元素$y_j=Z_{n_j}(n_j<n)$的线性组合, 于是$D\subset\mathscr{L}(\{y_k\})$, 从而$\overline{\mathscr{L}(\{y_k\})}=\mathbf{H}$.

对元素组$\{y_k\}$运用正交化过程得完全的规格化正交系, 显然它是可数的.

5.8. 设在 Hilbert 空间$\mathbf{H}$中给定一个规格化正交系$\{x_k\}$, 再设$x\in\mathbf{H}$, 数

$$a_k=(x,x_k)\qquad(k=1,2,\cdots)$$

叫做元素 x 在给定的规格化正交系中的Fourier系数，而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ 叫做元素 x 的 Fourier 级数.

构造子空间 $\mathbf{H}_n = \mathscr{L}(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$，由此可见其中元素是所给规格化正交系中前 n 个元素的所有可能的线性组合.

定理 5. 元素 x 的Fourier级数的部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ 是元素 x 在子空间 $\mathbf{H}_n$ 上的投影.

证. 因为

$$x = s_n + (x - s_n)$$

且 $s_n \in \mathbf{H}_n$，所以只要证明 $x - s_n \perp \mathbf{H}_n$. 但是，显然 $x - s_n \perp x_k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$)，于是，根据 5.4 中的 c)得 $x - s_n \perp \mathbf{H}_n$. 证毕.

利用定理 1 的结论得到

推论 1. 对于任何元素 $z = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \in \mathbf{H}_n$,

$$\|x - s_n\| = \rho(x, \mathbf{H}_n) \leqslant \|x - z\|.$$

其次，因为

$$\|x\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2 \geqslant \|s_n\|^2, \tag{19}$$

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2, \tag{20}$$

则下述结论成立:

推论 2. 下列不等式成立(Bessel 不等式):

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

上式中令 $n \to \infty$ 取极限后得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{21}$$

如果对于某个 $x\in\mathbf{H}$, (21) 式中等号成立，则称对于 x 封闭性方程成立，或 Parseval 等式成立。

定理 6. 对于任何元素 $x\in\mathbf{H}$, 其 Fourier 级数总是收敛的，并且，Fourier 级数的和是元素 x 在子空间 $\mathbf{H}_0=\overline{\mathscr{L}}(\{x_k\})$ 上的投影.

元素 x 的 Fourier 级数的和等于该元素的充要条件为对于此元素封闭性方程成立.

证. 从不等式(21)推出，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ 收敛. 与前面一样，用 s_n 表示 Fourier 级数的部分和，有

$$\|s_{n+p}-s_n\|^2=\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

由此推出 Fourier 级数收敛.

设 $s=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k$. 因为 $s\in\mathbf{H}_0$ 且

$$x=s+(x-s),$$

所以，如同定理 5 的证明那样，我们只须证明 $x-s\perp\mathbf{H}_0$. 这只须再次利用 5.4 中 c)即可推出.

最后，如果利用等式(20)把(19)式改写为

$$\|x-s_n\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2,$$

则不难证实这个定理的第二部分也成立.

如果元素组$\{x_k\}$是完全的，则 $\mathbf{H}_0=\mathbf{H}$ 且任何元素 $x\in\mathbf{H}$ 在 $\mathbf{H}$ 上的投影与它本身一致. 这样就证明了:

推论 1. 如果$\{x_k\}$是完全系，则对于任何 $x\in\mathbf{H}$, 其 Fourier 级数收敛于 x.

给出一个规格化正交系，如果对于每一个 $x\in\mathbf{H}$, 封闭性方程

成立，则称它是一个封闭系.

推论 2. 一组元素是封闭系的充要条件为它是完全的.

事实上，根据定理 6，封闭性方程对于所有的 $x \in \mathbf{H}_0$ 成立，且只对这些元素成立，因此元素组的封闭性等价于 $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}$，这也表示所给元素组是完全的.

注. 如果对于 $\mathbf{H}$ 中的基本集 E 封闭性方程成立，则给定的规格化正交系是封闭的.

事实上，因为 $\mathbf{H}_0 \supset E$，所以 $\mathbf{H}_0 = \overline{\mathscr{L}}(E) = \mathbf{H}$.

于是，如果 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{H}$ 中完全的规格化正交系，则任何元素 $x \in \mathbf{H}$ 可用其 Fourier 级数表示:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

所以完全的规格化正交系叫做 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的规格化正交基（参见XII. 7. 2）.

定理 7（Riesz-Fisher）. 设有数列 $\{c_k\}$，使级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ 收敛，并在 $\mathbf{H}$ 中确定规格化正交系 $\{x_k\}$，则存在唯一的元素 $x \in \mathbf{H}$，使得其 Fourier 系数 $a_k = c_k$ $(k=1, 2, \cdots)$，并且对于 x 封闭性方程成立.

证. 与前面定理的证明一样，可知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ 收敛. 用 x 表示它的和，因为对于 $m \geqslant n$ 有 $\left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_k, x_n \right) = c_n$，所以

$$a_n = (x, x_n) = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_k, x_n \right) = c_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

于是，从前面的定理推出，对于元素 x 封闭性方程成立.

元素 x 的唯一性由定理 6 推出，因为封闭性方程成立的元素应等于其 Fourier 级数的和.

还给出一个拓广的封闭性方程.

设对于元素 $x, y\in \mathbf{H}$ 封闭性方程成立. 那么，如果$\{a_k\}$与$\{b_k\}$是这两个元素对应的 Fourier 系数，则

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k. \tag{22}$$

事实上，根据定理 6

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad y=\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k,$$

所以

$$\begin{aligned}(x, y) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} b_k x_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k.\end{aligned}$$

如果所讨论的正交系是完全的，则拓广的封闭性方程对任意的 $x, y\in \mathbf{H}$ 都成立.

如果在可分的无限维 Hilbert 空间$\mathbf{H}$中有不完全的规格化正交系$\{x_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$，则这时在$\{x_k\}$上所张的子空间 $\mathbf{H}_0$ 不等于 $\mathbf{H}$. 用 $\tilde{\mathbf{H}}$表示子空间$\mathbf{H}_0$ 的正交补. 子空间$\tilde{\mathbf{H}}$是可分的 Hilbert空间，所以在其中可以找到元素不多于可数个的完全的规格化正交系$\{x_k\}$ $(k=0, -1, -2, \cdots)$. 把它与前面的不完全正交系合并起来得到元素组$\{x_k\}$ $(k=\cdots, -1, 0, 1, \cdots)$，它在整个空间$\mathbf{H}$中是完全的. 事实上，与所有 x_k $(k=\cdots -1, 0, 1, \cdots)$正交的一切元素 $y\in \mathbf{H}$ 应该与子空间 $\mathbf{H}_0$ 正交，即应有 $y\in\tilde{\mathbf{H}}$. 于是，因为$\{x_k\}$ $(k=0, -1, \cdots)$是$\tilde{\mathbf{H}}$中的完全系，所以 $y=\mathbf{0}$.

我们指出实变函数论中的两个命题，其证明可从上面推导的一般结论中推出.

因为在空间 $\mathbf{L}^2(a, b)$ 中三角系是完全的，所以，根据定理 6 的推论 1 可知，任意的平方可积函数展开为 Fourier(三角)级数是平均(二阶)收敛的.

从 Riesz-Fisher 定理及不等式(21)还可推出，一个给定的可积函数是 $\mathbf{L}^2$ 空间中元素的充要条件为其 Fourier 系数的模平方级数是收敛的.

有趣的是对于其他的函数类要证明类似的结果是相当困难的.

5.9. 最后证明，任意两个可分的无限维 Hilbert 空间是线性等距的(参见 1.3)，确切地说，在这两个空间的元素之间可以建立一一对应，保持线性运算和内积运算的对应（当然也包括范数对应）. 设 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{H}'$ 是这种空间. 根据定理 4 在 $\mathbf{H}$ 中存在可数的完全的规格化正交系 $\{x_k\}$，在 $\mathbf{H}'$ 中也存在这样的正交系 $\{x'_k\}$. 设 $x\in\mathbf{H}$ 是任意的元素，用 $\{a_k\}$ 表示这个元素的 Fourier 系数列. 于是根据定理 6 的推论 1

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k,$$

并且，由不等式(21)可知 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty$. 在空间 $\mathbf{H}'$ 中应用 Riesz-Fisher 定理到序列 $\{a_k\}$ 上，可以找到元素 $x'\in\mathbf{H}$，它与元素 x 有一样的 Fourier 系数. 并且

$$x'=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x'_k.$$

把元素 x' 与给定的元素 x 相对应，此对应满足 1.3 中全部条件（这里，我们用对应元素的内积等式代替范数等式）. 我们不去验证代数运算保持对应关系，因为比较简单. 下面来证明，如果 $x, y\in\mathbf{H}$，且 x' 和 y' 是它们在 $\mathbf{H}'$ 中的对应元素，则 $(x, y)=(x', y')$. 事实上，因为两个正交系 $\{x_k\}$ 和 $\{x'_k\}$ 是完全的，对于元素 x, y 及类似地对于 x', y'，它们都满足拓广的封闭性方程(22)，即

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k, \quad (x', y') = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k'} \bar{b}_k,$$

其中 $\{a_k\}$ 表示元素 x(和 x') 的 Fourier 系数列, $\{b_k\}$ 是元素 y (和 y')的 Fourier 系数列.

特别, 每一个可分的无限维 Hilbert 空间**H**与空间 $\mathbf{l}^2$ 线性等距(按上述定义), 这个结果是在 Neumann[1]的文章中给出的.

我们不加证明地指出, 对于任意的 Hilbert 空间也有类似的结果, 即可以证明完全的规格化正交系的势是空间的不变量(空间的维数)且维数相同的空间是线性等距的. 这个结论的证明可参见 Ахиезер 与 Глазман.

第五章　线性算子与线性泛函

§1. 算子空间与共轭空间

1.1. 因为除了线性算子外我们有时还需要研究非线性算子，所以在这一段中引进的记号，包括这两种情形.

设$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是两个空间(度量空间或赋范空间)及集合$\Omega\subset\mathbf{X}$.

如果每个$x\in\Omega$对应一个元素$y=U(x)\in\mathbf{Y}$，则称在Ω上定义了一个把Ω变换(映射)到$\mathbf{Y}$内(或由Ω到$\mathbf{Y}$内)的算子U，集合Ω叫做算子U的定义域并记为Ω_U. 形式为$y=U(x)$的元素全体组成的集Δ_U叫做算子U*)的值域. 如果$\Omega_U=\mathbf{X}$，而$\Delta_U\subset\mathbf{X}$，即如果算子$U$把$\mathbf{X}$映入自身，则称$U$是$\mathbf{X}$中的算子.

如果U是由$\Omega\subset\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$内的算子，则用$U(E)$ $(E\subset\Omega)$表示形式为$y=U(x)$的元素$y\in\mathbf{Y}$的全体，其中$x\in E$. 同时我们称集$U(E)$为集E的象.

下面定义最重要的算子类.

a) 设$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是度量空间，U是$\Omega\subset\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$内的算子. 如果当$x_n\to x_0$ $(x_n\in\Omega)$时，$U(x_n)\to U(x_0)$，则称U在点$x_0\in\Omega$处连续. 如果U在集$E\subset\Omega$中每一点处连续，则简称U在E上连续.

b) 如果$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是赋范空间，Ω是包含在$\mathbf{X}$中的线性集合，由Ω到$\mathbf{Y}$内的算子U满足条件

$$U(\lambda x)=\lambda U(x)\qquad(x\in\Omega,\ \lambda\in\mathbf{K}),$$

---

*) 时常以Ux代替$U(x)$，而在非线性算子情形，“算子”这个术语用“映射”这个词代替.

则称U是齐次的；如果

$$U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2) \qquad (x_1, x_2\in\Omega),$$

则称U是可加的.

c）如果算子U在Ω_U上是可加的与齐次的，则称U是线性算子.

我们指出，如果$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$是赋范空间，U是由$\Omega\subset\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$内的可加算子，它在某一点$x_0\in\Omega$处连续，则U在Ω上连续，即在集Ω中每一点处连续.

事实上，设$x_n\to x$ $(x, x_n\in\Omega)$，因为

$$x_n=[x_0+(x_n-x)]+(x-x_0)$$

及

$$x_0+(x_n-x)\to x_0,$$

所以

$$U(x_n)=U(x_0+(x_n-x))+U(x-x_0)\to U(x_0)+U(x-x_0)$$
$$=U(x).$$

1.2. 下面给出线性算子连续性的判别准则.

设U是把赋范空间$\mathbf{X}$变换到赋范空间$\mathbf{Y}$内的线性算子，如果存在这样的常数C，使得对于所有的$x\in\mathbf{X}$

$$\|U(x)\|\leqslant C\|x\|, \tag{1}$$

则称U是有界的.

定理 1. 线性算子U连续的充要条件为它是有界的.

证. 必要性. 设U是线性连续算子. 我们来证明

$$C_0=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\mathbf{X}}}\|U(x)\|<\infty.$$

如果不然，$C_0=\infty$，则可以找到这样的序列$\{x_n\}$ $(x_n\in\mathbf{X}, \|x_n\|=1)$，使得$\lambda_n=\|U(x_n)\|\to\infty$. 研究序列$\{x'_n\}$，$x'_n=x_n/\lambda_n$. 显然，$x'_n\to\mathbf{0}$；因此，由$U$的连续性，应有$U(x'_n)\to\mathbf{0}$，这与$\|U(x'_n)\|=1$相

矛盾.

现在设 $x\neq 0$ 是 $\mathbf{X}$ 中任意的元素. 令 $x'=x/\|x\|$, 则 $\|x'\|=1$. 因而, $\|U(x')\|\leqslant C_0$. 但根据算子的齐次性, $U(x')=\frac{1}{\|x\|}U(x)$, 从而

$$\|U(x)\|\leqslant C_0\|x\|,$$

可见(1)式成立($C=C_0$).

充分性. 由条件 (1) 直接推出算子 U 在点 $\mathbf{0}$ 处的连续性. 根据 1.1, U 在空间 $\mathbf{X}$ 中每一点连续.

定理证毕.

我们来证明, C_0 是满足不等式(1) 的最小常数. 事实上, 如果 $\|x\|=1$, 则 $\|U(x)\|\leqslant C$, 因而 $C_0\leqslant C$. 另一方面, C_0 满足不等式(1).

注. 不难看出

$$C_0=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|U(x)\|.$$

事实上, 显然 $C_0\leqslant\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|U(x)\|$. 同时, 对于 $x\in\mathbf{X}$ ($\|x\|\leqslant 1, x\neq\mathbf{0}$) 有 $\|U(x)\|=\|x\|\left\|U\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\leqslant C_0$, 由此导出相反的不等式.

由算子 U 确定的数 C_0 叫做线性算子 U 的范数*), 记为 $\|U\|$. 根据上面的讨论

$$\|U\|=C_0=\sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|U(x)\|.$$

在(1)中取 $C=C_0=\|U\|$ 得

$$\|U(x)\|\leqslant\|U\|\|x\|.$$

还要指出, 如果有形如(1)的不等式, 则 $\|U\|\leqslant C$.

最后注意到, 范数 $\|U\|$ 的简单的几何意义是由算子 U 实现变换

---

*) Hilbert 空间中算子的范数最先由 Hilbert 定义(参见 Hilbert). 一般的定义参见 Banach [1].

线性连续算子和泛函的概念有许多作者都引进过.

时向量伸长系数的上界.

1.3. 我们研究两个赋范空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{Y}$. 所有由$\mathbf{X}$变到$\mathbf{Y}$内的线性算子全体$L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$是个向量空间(II. 2.1). 用$B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$表示所有由$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$内的线性连续算子的集合. 现在我们来验证$B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$是$L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$中的线性子集, 且算子的范数$\|U\|$是在$B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$上的范数, 即$B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$是个赋范空间.

如果$U_1, U_2\in B(\mathbf{X},\mathbf{Y}), U=U_1+U_2$, 则

$$\|U(x)\|\leqslant\|U_1(x)\|+\|U_2(x)\|\leqslant(\|U_1\|+\|U_2\|)\|x\|.$$

因此, $U\in B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$且$\|U\|\leqslant\|U_1\|+\|U_2\|$.

如果$U\in B(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \lambda\in\mathbf{K}, \tilde{U}=\lambda U$, 则$\|\tilde{U}\|=\|\lambda U\|=|\lambda|\,\|U\|$.

显然, 由$\|U\|=0$推出对于任意的$x\in\mathbf{X}$, $\|U(x)\|=0$. 因而, $U=0$. 于是, 我们证明了$B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$是个赋范空间.

我们来证明, 如果象空间$\mathbf{Y}$是完备的, 则空间$B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$也是完备的.

事实上, 设$\{U_n\}$是空间$B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$中的自收敛序列. 任取$\varepsilon>0$, 有

$$\|U_m-U_n\|<\varepsilon \qquad (m,n\geqslant N_\varepsilon),$$

即对于任何$x\in\mathbf{X}$

$$\|U_m(x)-U_n(x)\|<\varepsilon\|x\|. \tag{2}$$

由此推出空间$\mathbf{Y}$中的元素序列$\{U_n(x)\}$是自收敛的, 故由空间$\mathbf{Y}$的完备性, 存在

$$U(x)=\lim_{n\to\infty}U_n(x) \qquad (x\in\mathbf{X}).$$

显然, 算子$U\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. 在不等式(2)中令$m\to\infty$, 取极限后得

$$\|U(x)-U_n(x)\|=\lim_{m\to\infty}\|U_m(x)-U_n(x)\|\leqslant\varepsilon\|x\|$$

$$(n\geqslant N_\varepsilon), \tag{3}$$

即算子V:

$$V(x)=U(x)-U_n(x) \qquad (x\in \mathbf{X})$$

是空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 中的元素. 因此 $U=V+U_n\in B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. 同时由(3)推出

$$\|U-U_n\|\leqslant \varepsilon \qquad (n\geqslant N_\varepsilon),$$

这表示在空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 中 $U_n\to U$.

以上所述归结为下面的定理.

定理 2. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范空间, $\mathbf{Y}$ 是 B-空间, 则 $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 是 B-空间.

因为标量空间 $\mathbf{K}$ 是完备的, 所以, 线性连续泛函全体构成的空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{K})$ 是 B-空间, 记为 $\mathbf{X}^*$. 这个 B-空间 $\mathbf{X}^*$ 叫做赋范空间 $\mathbf{X}$的共轭空间. 如果 $f\in \mathbf{X}^*$, 则

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|.$$

回顾(II.2.2), 如果所研究的空间 $\mathbf{X}$ 是复的, 则在 $\mathbf{X}^*$ 中乘以复数的运算按下式

$$(\lambda f)(x)=\bar{\lambda} f(x) \qquad (f\in \mathbf{X}^*,\ x\in \mathbf{X}) \tag{4}$$

定义.

按公式(4)定义的合理性的根据将在下面(参见 3.2) 讨论.

§2. 具体空间中的某些泛函和算子

2.1. 在空间 $\mathbf{C}[a, b]$中研究下列泛函:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k), \tag{1}$$

其中 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是区间 $[a, b]$中的某一组点. 这种泛函的例子有: 函数在指定点的值、函数的有限差、函数的 Riemann 和、按某组结点函数值的加权和等等.

我们来证明, 用等式(1)定义的泛函是线性的, 并且

$$\|f\|=\sum_{k=1}^{n}|c_k|. \tag{2}$$

f 显然是线性的:

$$\begin{aligned}f(\lambda x_1+\mu x_2)&=\sum_{k=1}^{n}c_k[\lambda x_1(t_k)+\mu x_2(t_k)]\\&=\sum_{k=1}^{n}c_k\lambda x_1(t_k)+\sum_{k=1}^{n}c_k\mu x_2(t_k)\\&=\lambda f(x_1)+\mu f(x_2).\end{aligned}$$

其次,由不等式

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|\sum_{k=1}^{n}c_k x(t_k)|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\sum_{k=1}^{n}|c_k|\\&=\sum_{k=1}^{n}|c_k|\,\|x\|\end{aligned}$$

显然可见 f 是连续的,并且

$$\|f\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|c_k|.$$

现在在区间$[a,b]$中作分段线性函数 $\tilde{x}$, 它在点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 处取值为

$$\tilde{x}(t_k)=\operatorname{sign}c_k \qquad (k=1,2,\cdots,n),$$

在区间$[t_k, t_{k+1}]$$(k=1,2,\cdots,n-1)$中是线性的, 在区间$[a,t_1]$和$[t_n,b]$中是常数.

显然

$$|\tilde{x}(t)|\leqslant1,$$

即

$$\|\tilde{x}\|\leqslant1.$$

于是

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|\geqslant f(\tilde{x})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}c_k\tilde{x}(t_k)=\sum_{k=1}^{n}c_k\mathrm{sign}c_k=\sum_{k=1}^{n}|c_k|,$$

从而连同已有的相反的不等式，证得(2)式成立.

2.2. 研究$\mathbf{C}[a,b]$中的泛函，其定义为

$$f(x)=\int_a^b\varphi(t)x(t)dt, \tag{3}$$

其中φ是给定的可积函数.

这种泛函的例子有：函数在整个区间$[a,b]$上的积分或在部分区间上的积分，函数的矩量，函数的 Fourier 系数等等.

我们来证明泛函(3)是线性的并且

$$\|f\|=\int_a^b|\varphi(t)|dt. \tag{4}$$

泛函f对于所有$x\in\mathbf{C}[a,b]$，甚至对于所有$x\in\mathbf{L}^\infty(a,b)$有定义，而且显然是线性的. 由不等式

$$|f(x)|\leqslant\int_a^b|\varphi(t)x(t)|dt$$

$$\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\int_a^b|\varphi(t)|dt$$

$$=\|x\|\int_a^b|\varphi(t)|dt$$

推出它的连续性以及对范数的估计：

$$\|f\|\leqslant\int_a^b|\varphi(t)|dt.$$

下面来建立相反的不等式，先考虑函数φ连续的情形. 任取$\varepsilon>0$，把区间$[a,b]$用分点$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$分割，使得函数φ在每个小区间$[t_k,t_{k+1}]$上的振幅小于ε. 我们把所有的部分区间分为两类. 在第一类区间$\Delta_1',\Delta_2',\cdots,\Delta_r'$上所有的函数值符号相

同(在不同的区间上符号可以不相同). 其余的区间 $\Delta_1'', \Delta_2'', \cdots, \Delta_s''$ 作为第二类. 我们指出, 因为函数 φ 的值在区间 $\Delta_k''(k=1,2,\cdots,s)$ 上变号, 则必有等于零的值; 又因为函数 φ 在每个部分区间上的振幅小于 ε, 所以

$$|\varphi(t)|<\varepsilon \qquad (t\in\Delta_k'';\ k=1,2,\cdots,s).$$

现在来定义函数 $\tilde{x}\in\mathbf{C}[a,b]$. 对于第一类区间, 设

$$\tilde{x}(t)=\operatorname{sign}\varphi(t) \qquad (t\in\Delta_j';\ j=1,2,\cdots,r).$$

在区间 $[a,b]$ 的其余点上函数是线性的. 同时, 如果 a (或 b) 是第二类区间的端点, 则令 $\tilde{x}(a)=0$ (或 $\tilde{x}(b)=0$).

估计下面的量:

$$f(\tilde{x})=\int_a^b\varphi(t)\tilde{x}(t)dt.$$

因为 $|\tilde{x}(t)|\leqslant1\ (a\leqslant t\leqslant b)$, 得

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\varphi(t)\tilde{x}(t)dt\\
&\quad=\sum_{j=1}^{r}\int_{\Delta_j'}\varphi(t)\tilde{x}(t)dt+\sum_{k=1}^{s}\int_{\Delta_k''}\varphi(t)\tilde{x}(t)dt\\
&\quad\geqslant\sum_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j'}|\varphi(t)|dt-\sum_{k=1}^{s}\int_{\Delta_k''}|\varphi(t)|dt\\
&\quad=\int_a^b|\varphi(t)|dt-2\sum_{k=1}^{s}\int_{\Delta_k''}|\varphi(t)|dt\\
&\quad>\int_a^b|\varphi(t)|dt-2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

因为 $\|\tilde{x}\|\leqslant1$, 更有

$$\|f\|\geqslant f(\tilde{x})>\int_a^b|\varphi(t)|dt-2\varepsilon(b-a).$$

令 $\varepsilon\to0$, 即得所需的不等式.

现在认为 φ 是任意的可积函数. 因为所有连续函数组成的集在空间 $\mathbf{L}^1$ 中稠密, 所以可以找到连续函数 $\tilde{\varphi}$ 使得

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L^1}=\int_a^b|\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)|dt<\varepsilon.$$

对于函数 $\tilde{\varphi}$ 按上面所述方法作函数 $\tilde{x}\in C[a,b]$, $\|\tilde{x}\|\leqslant 1$, 即使得

$$\int_a^b\tilde{\varphi}(t)\tilde{x}(t)dt\geqslant\int_a^b|\tilde{\varphi}(t)|dt-2\varepsilon(b-a)$$

$$=\|\tilde{\varphi}\|_{L^1}-2\varepsilon(b-a).$$

但是

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^1}\geqslant\|\varphi\|_{L^1}-\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L^1}>\|\varphi\|_{L^1}-\varepsilon,$$

所以

$$\begin{aligned}f(\tilde{x})&=\int_a^b\varphi(t)\tilde{x}(t)dt\\&=\int_a^b\tilde{\varphi}(t)\tilde{x}(t)dt+\int_a^b[\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)]\tilde{x}(t)dt\\&>\|\varphi\|_{L^1}-\varepsilon-2\varepsilon(b-a)-\int_a^b|\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)|dt\\&>\|\varphi\|_{L^1}-2\varepsilon(b-a+1).\end{aligned}$$

同上面一样, 由此推出

$$\|f\|\geqslant f(\tilde{x})>\|\varphi\|_{L^1}-2\varepsilon(b-a+1).$$

于是, 当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\|f\|\geqslant\|\varphi\|_{L^1},$$

定理证毕.

2.3. 还可以在 $L^p(a,b)$ 中研究形如(3)的泛函. 更一般地. 设 (T,Σ,μ) 是 σ-有限测度空间. 我们来证明*)

$$f(x)=\int_T x(t)y(t)d\mu, \tag{5}$$

其中 $y\in L^q(T,\Sigma,\mu)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty,\ 1/p+1/q=1)$, 它是空间 $L^p(T,\Sigma,\mu)$ 中的线性连续泛函, 并且

---

*) 后面将要证明, 表示为形式(5)的泛函已经取遍 $L^p(1\leqslant p<\infty)$ 中线性泛函的集合, 即(5)是 L^p 中线性泛函的一般形式(参见第六章 § 2).

$$\|f\|=\|y\|_{L^p}=\begin{cases}\left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{1/q}, & 1<p\leqslant\infty,\\ \underset{t\in T}{\text{vrai}\sup}|y(t)|, & p=1.\end{cases} \tag{6}$$

1）先考察 $1<p<\infty$ 情形．积分(5)对于所有 $x\in L^p$ 有定义．这由 Hölder 积分不等式推出(参见 IV. 2. 3)．利用这个不等式还可以求出

$$|f(x)|=\left|\int_T x(t)y(t)d\mu\right|$$

$$\leqslant\left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{1/q}\left[\int_T |x(t)|^p d\mu\right]^{1/p}=\|y\|_{L^q}\|x\|,$$

因此，

$$\|f\|\leqslant\|\varphi\|_{L^q}. \tag{7}$$

为了证明相反的不等式成立，考察函数

$$\tilde{x}(t)=|y(t)|^{q-1}\text{sign}\, y(t).$$

因为

$$|\tilde{x}(t)|^p=|y(t)|^{p(q-1)}=|y(t)|^q,$$

所以 $\tilde{x}\in L^p$；并且

$$\|\tilde{x}\|=\left[\int_T |\tilde{x}(t)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left[\int_T |y(t)|^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}\frac{q}{p}}=[\|y\|_{L^q}]^{\frac{q}{p}},$$

由此有

$$\|f\|\geqslant f\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right)=\frac{1}{\|\tilde{x}\|}\int_a^b y(t)\tilde{x}(t)d\mu$$

$$=\frac{1}{\|\tilde{x}\|}\int_a^b |y(t)|^q d\mu=[\|y\|_{L^q}]^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$=\|y\|_{L^q}.$$

上式与(7)式一起，即给出所求的等式．

2）现在设 $p=1$．记

$$\|y\|_{L^\infty}=\operatorname{vrai}\sup_{t\in T}|y(t)|=Q.$$

不等式$\|f\|\leqslant Q$显然成立．另一方面，取$\varepsilon>0$，用A表示集合

$$A=\{t\in T:y(t)>Q-\varepsilon\}.$$

我们指出，$\mu(A)>0$，定义函数

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}\operatorname{sign}y(t), & t\in A,\\ 0, & t\notin A.\end{cases}$$

显然，$\tilde{x}\in L^1$，且$\|\tilde{x}\|=\int_a^b|\tilde{x}(t)|d\mu=\mu(A)$．其次

$$\begin{aligned}\|f\|\geqslant f\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right)&=\frac{1}{\mu(A)}\int_T y(t)\tilde{x}(t)d\mu\\ &=\frac{1}{\mu(A)}\int_T|\varphi(t)|d\mu\geqslant\frac{1}{\mu(A)}[Q-\varepsilon]\mu(A)\\ &=Q-\varepsilon.\end{aligned}$$

因此由于ε的任意性有$\|f\|\geqslant Q$，此式与前面的式子一起，即得等式$\|f\|=Q$．

3）最后设$p=\infty$．不等式$\|f\|\leqslant\|y\|_{L^1}$显然成立．另一方面，函数$\tilde{x}(t)=\operatorname{sign}y(t)$在$L^\infty$之中且$\|\tilde{x}\|_{L^\infty}\leqslant 1$．由不等式

$$\begin{aligned}\|f\|\geqslant|f(\tilde{x})|&=\int_T\operatorname{sign}y(t)\cdot y(t)d\mu\\ &=\int_T|y(t)|d\mu=\|y\|_{L^1}\end{aligned}$$

推得$\|f\|\geqslant\|y\|_{L^1}$，故$\|f\|=\|y\|_{L^1}$．

注．如果研究复空间L^p，则把泛函(5)写成

$$f(x)=\int_T x(t)\overline{y(t)}d\mu$$

是恰当的．同时，公式(6)显然仍成立(参见1.3)．

2.4. 我们研究用下面的等式

$$y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt \tag{8}$$

给出的积分算子 $y=U(x)$，其中 $K(s,t)$ 是连续函数. 作为形如(8)的算子的例子有: Dirichlet 积分和 Fejer 积分. 我们来证明 U 是空间 $\mathbf{C}[a,b]$ 到空间 $\mathbf{C}[a,b]$ 内的线性算子, 并且

$$\|U\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)|dt=M. \tag{9}$$

算子(8)显然是线性的, 而由不等式

$$\|U(x)\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)dt\right|$$

$$\leqslant\|x\|\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)|dt=M\|x\|$$

推出其连续性, 并且 $\|U\|\leqslant M$. 下面来建立相反的不等式. 因为积分

$$\int_a^b|K(s,t)|dt$$

是 s 的连续函数, 所以存在这样的 $s_0\in[a,b]$ 使得

$$M=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)dt=\int_a^b|K(s_0,t)|dt.$$

考察空间 $\mathbf{C}[a,b]$ 中形如(3)的泛函, 其中 $\varphi(t)=K(s_0,t)$, 即

$$f(x)=\int_a^b K(s_0,t)x(t)dt \qquad (x\in\mathbf{C}[a,b]).$$

根据前面的讨论. (参见 2.2)，可以找到这样的元素 $\tilde{x}\in\mathbf{C}[a,b]$, $\|\tilde{x}\|\leqslant 1$, 使得

$$f(\tilde{x})\geqslant\|f\|-\varepsilon=\int_a^b|K(s_0,t)|dt-\varepsilon=M-\varepsilon.$$

令 $\tilde{y}=U(\tilde{x})$, 则显然有

$$\|U\|\geqslant\|U(\tilde{x})\|=\|\tilde{y}\|\geqslant\tilde{y}(s_0)$$

$$=\int_a^b K(s_0,t)\tilde{x}(t)dt=f(\tilde{x})\geqslant M-\varepsilon,$$

由于 ε 的任意性, 即得(9)式.

2.5. 我们来证明，积分算子(8)可以看作空间 $\mathbf{L}^1(a,b)$ 到

$\mathbf{L}^1(a, b)$内的线性算子；然而，在此情形

$$\|U\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b |K(s, t)|ds = M'. \tag{10}$$

U 的可加性在这里显然成立. 利用可交换积分次序的 Fubini 定理得不等式

$$\|U(x)\| = \int_a^b \left|\int_a^b K(s, t)x(t)dt\right|ds,$$

$$\leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|ds\right]|x(t)|dt \leqslant M'\|x\|,$$

从而

$$\|U\| \leqslant M'.$$

其次，和前面一样，取 $t_0 \in [a, b]$ 使得

$$M' = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b |K(s, t)|ds = \int_a^b |K(s, t_0)|ds,$$

然后，任取 $\varepsilon > 0$，由函数 $K(s, t)$ 的一致连续性，可以找到 $\delta > 0$，使得当 $|s' - s| < \delta$, $|t' - t| < \delta$ 时

$$|K(s', t') - K(s, t)| < \varepsilon.$$

环绕点 t_0 取区间 $d = [t_1, t_2]$ $(a \leqslant t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2 \leqslant b)$，使得其长度小于 δ $(t_2 - t_1 < \delta)$. 现在设

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_2 - t_1}, & t \in d, \\ 0, & t \notin d. \end{cases} \qquad (\|\tilde{x}\| = 1).$$

记 $\tilde{y} = U(\tilde{x})$，得

$$\|U\| \geqslant \|U(\tilde{x})\| = \|\tilde{y}\| = \int_a^b |\tilde{y}(s)|ds$$

$$= \int_a^b \left|\int_a^b K(s, t)\tilde{x}(t)dt\right|ds$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_a^b \left|\int_{t_1}^{t_2} K(s, t)dt\right|ds$$

$$\geqslant \frac{1}{t_2-t_1}\int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s,t_0)\,dt \right| ds$$

$$-\frac{1}{t_2-t_1}\int_a^b \left[\int_{t_1}^{t_2} |K(s,t)-K(s,t_0)|\,dt \right] ds$$

$$= M' - \varepsilon(b-a),$$

从而得出(10)式.

读者不难证实，如果把算子(8)看作空间 $\mathbf{L}^1(a,b)$ 到 $\mathbf{C}[a,b]$ 内的算子，则

$$\|U\| = \max_{\substack{a\leqslant s\leqslant b\\ a\leqslant t\leqslant b}} |K(s,t)|.$$

2.6. 现在把积分算子(8)看成空间 $\mathbf{L}^2(a,b)$ 到 $\mathbf{L}^2(a,b)$ 内的算子. 同时，我们减弱加在这个算子的核上的要求，即不假设它是连续的，只认为它是平方可测的，且

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt = N^2 < \infty. \tag{11}$$

我们来证明，在此条件下式子(8)确定了 $\mathbf{L}^2$ 到 $\mathbf{L}^2$ 内的连续算子，并且

$$\|U\| \leqslant N. \tag{12}$$

算子(8)的连续性及对范数的估计式(12)都可以由 Cauchy-Буняковский 不等式推出:

$$\|U(x)\|^2 = \int_a^b \left| \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt \right|^2 ds$$

$$\leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |K(s,t)|^2\,dt \int_a^b |x(t)|^2\,dt \right] ds$$

$$= N^2\|x\|^2.$$

我们来证明，在对称核情形($K(s,t)=K(t,s)$)，有精确的等式

$$\|U\| = \frac{1}{|\lambda_1|}, \tag{13}$$

其中 λ_1 是核 $K(s, t)$的按模最小的特征值.

如果核不是对称的，则算子 U 的范数的表示较复杂一些，即

$$\|U\| = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}} \tag{14}$$

其中 Λ_1 是核

$$K^*(s, t) = \int_a^b K(\tau, s) K(\tau, t) d\tau$$

的最小特征值.

为了建立等式(13)与(14)，我们需要利用积分方程理论的某些知识*). 大家知道，具有对称核的积分方程有基本函数和特征值的完全系列(规格化的): $\omega_1(t), \omega_2(t), \cdots$; $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$，它们是齐次方程的线性独立解全体，而这些 λ 使得下列齐次方程

$$\omega_k(s) = \lambda_k \int_a^b K(s, t) \omega_k(t) dt \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

有异于零的解. 根据 Hilbert-Schmidt 定理**)，所有通过核表达的函数，特别算子的值 $y(s)$可以按特征函数展开为 ($\mathbf{L}^2$ 中的) 平均收敛的级数:

$$y(s) = \sum_k \frac{h_k}{\lambda_k} \omega_k(s) \qquad \left(h_k = \int_a^b x(t) \omega_k(t) dt; \quad k = 1, 2, \cdots\right).$$

由此(参见定理 IV. 5. 6)

$$\|y\|^2 = \int_a^b |y(s)|^2 ds = \sum_k \frac{h_k^2}{\lambda_k^2} \leqslant \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_k h_k^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1^2} \|x\|^2.$$

这表示，$\|U\| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|}$. 取 $\tilde{x} = \omega_1$，则有 $\tilde{y} = U(\tilde{x}) = \frac{1}{\lambda_1} \tilde{x}$，所以

$$\|U\| \geqslant \|U(\tilde{x})\| = \frac{1}{|\lambda_1|} \|\tilde{x}\| = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

---

*) 参见 Петровский.

**) 仍参见上书.

从而证明了(13).

再来讨论任意核的情形. 利用 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}\|y\|^2&=\int_a^b|y(s)|^2ds\\&=\int_a^b\left[\int_a^bK(s,t)x(t)dt\int_a^bK(s,\tau)x(\tau)d\tau\right]ds\\&=\int_a^bx(\tau)d\tau\int_a^b\left[\int_a^bK(s,t)K(s,\tau)ds\right]x(t)dt\\&=\int_a^b\int_a^bK^*(t,\tau)x(t)x(\tau)\,dt\,d\tau.\end{aligned}$$

用 Λ_k, $\Omega_k(t)$表示核$K^*(t,\tau)$的特征值和基本函数. 再用 Hilbert-Schmidt 定理, 求得

$$\begin{aligned}\|y\|^2&=\int_a^bx(\tau)d\tau\int_a^bK^*(t,\tau)x(t)dt\\&=\int_a^bx(\tau)d\tau\sum_k\frac{H_k}{\Lambda_k}\Omega_k(\tau)=\sum_k\frac{H_k^2}{\Lambda_k}\leqslant\frac{1}{\Lambda_1}\leqslant\|x\|\end{aligned}$$

$$\left(H_k=\int_a^bx(t)\Omega_k(t)dt,\quad k=1,2,\cdots\right).$$

由此看出, $\|U\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}}$; 与上面一样, 取 $\tilde{x}=\Omega_1$, 可以证明等号成立. 即(14)式成立.

2.7. 当(8)式中积分号外还有一项时, 类似地讨论可以确定算子U的范数. 设

$$y=U(x),\quad y(s)=x(s)-\lambda\int_a^bK(s,t)x(t)dt. \tag{15}$$

我们限于讨论对称核情形. 再次利用 Hilbert-Schmidt 定理, 在基本函数系中补充某些函数 $\omega_0,\omega_{-1},\omega_{-2},\cdots$, 使之成为完全系. 函数 x 按此函数系有 Fourier 系数, 我们把它们表示为$\cdots$, $h_{-1},h_0,h_1,h_2,\cdots$, 函数 y 有 Fourier 系数

$$\eta_k=\int_a^by(s)\omega_k(s)ds=\int_a^b\left[x(s)-\lambda\int_a^bK(s,t)x(t)dt\right]\omega_k(s)ds$$

$$=h_k\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right),$$

$$(k=1,2,\cdots),\quad \eta_k=h_k\quad (k=0,-1,-2,\cdots).$$

我们指出，在一切情形下都可利用这些公式中的第一个，只要对于 $k=0,-1,-2,\cdots$ 认为 $\lambda_k=\infty$. 于是得出

$$\|y\|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\eta_k|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_k|^2\left|1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|^2$$
$$\leqslant L^2\Sigma|h_k|^2=L^2\|x\|^2,$$

其中

$$L=\sup_k\left|1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|.$$

显然

$$\|U\|=L.$$

2.8. 现在我们研究有限维空间中的算子. 设 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 是有限维 B-空间，它们的维数分别为 m 和 n. 设 U 是把 $\mathbf{X}$ 变到 $\mathbf{Y}$ 内的线性算子，用 e_k $(k=1,2,\cdots,m)$ 表示 $\mathbf{X}$ 中的元素，其坐标除了第 k 个为 1 外其余都是 0，元素 $g_k\in\mathbf{Y}(k=1,2,\cdots,n)$ 有类似的意义. 如果 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\in\mathbf{X}$ 及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{Y}$，则

$$x=\sum_{k=1}^{m}\xi_k e_k,\quad y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k g_k.$$

所以，如果 $y=U(x)$，则

$$y=\sum_{k=1}^{m}\xi_k U(e_k).$$

用 $a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk}$ 表示元素 $U(e_k)(k=1,2,\cdots,m)$ 的坐标，便得

$$y=\sum_{j=1}^{n}\eta_j g_j=\sum_{k=1}^{m}\xi_k\sum_{j=1}^{n}a_{jk}g_j$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\xi_k\right)g_j.$$

由于元素 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 线性独立，所以

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\xi_k \qquad (j=1, 2, \cdots, n),$$

即元素 $y=U(x)$ 的坐标可以由元素 x 的坐标用矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

变换后得出.

反之，每一个这样的矩阵定义了由 **X** 到 **Y** 内的线性算子，我们留给读者自行证明*）. 算子 U 的范数与我们在空间 **X** 和 **Y** 中使用的度量有关.

a) 讨论 U 作为由 $\mathbf{l}_m^\infty$ 到 $\mathbf{l}_n^\infty$ 内的算子(参见 IV. 3. 5)，则

$$\|y\| = \|U(x)\| = \max_j |\eta_j| \leqslant \max_j \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|\,|\xi_k|$$

$$\leqslant \|x\| \max_j \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|,$$

即

$$\|U\| \leqslant \max_j \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}| = L.$$

取 j_0 使得

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{j_0 k}| = L,$$

作 $\tilde{x} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \cdots, \tilde{\xi}_m)$ 并设

$$\tilde{\xi}_k = \operatorname{sign} a_{j_0 k} \qquad (k=1, 2, \cdots, m).$$

---

*）这样，在有限维 B- 空间中的所有线性算子都是连续的.

于是

$$\|U\|\geqslant\|U(\tilde{x})\|=\max_j\left|\sum_{k=1}^m a_{jk}\tilde{\xi}_k\right|\geqslant\sum_{k=1}^m a_{j_0k}\tilde{\xi}_k$$

$$=\sum_{k=1}^m|a_{j_0k}|=L.$$

从而

$$\|U\|=L=\max_j\sum_{k=1}^m|a_{jk}|.$$

b) 如果把 U 看成 $\mathbf{l}_m^1$ 到 $\mathbf{l}_n^1$ 内的算子(参见 IV. 3.5), 则

$$\|U\|=\max_k\sum_{j=1}^n|a_{jk}|=L'.$$

事实上, $\|U\|\leqslant L'$ 显然成立. 其次, 存在这样的 k_0, 使得

$$\sum_{j=1}^n|a_{jk_0}|=L'.$$

现在只须取 $\tilde{x}=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)$ (1 处在第 k_0 个位置). 于是

$$\|U\|\geqslant\|U(\tilde{x})\|=\sum_{j=1}^n\left|\sum_{k=1}^m a_{jk}\tilde{\xi}_k\right|=\sum_{j=1}^n|a_{jk_0}|=L',$$

从而, $\|U\|=L'$.

c) 还是讨论这个算子, 空间看成是欧氏空间, 即 $\mathbf{X}=\mathbf{l}_m^2$, $\mathbf{Y}=\mathbf{l}_n^2$. 这时, 如果 $m=n$ 且矩阵 A 对称, 则

$$\|U\|=|\lambda_1|,$$

其中 λ_1 是矩阵 A 的特征值中按模最大的一个.

在一般情形

$$\|U\|=\sqrt{\Lambda_1},$$

其中 Λ_1 是矩阵 A^*A 的特征值中按模最大的一个 (A^*是 Hermite-

共轭矩阵)*).

先讨论第一种情形. 矩阵 A 具有实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 和线性独立的特征向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 可以认为这些向量是规格化和两两正交的. 如果 $x=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$, 则

$$y=U(x)=U(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)$$
$$=c_1\lambda_1x_1+c_2\lambda_2x_2+\cdots+c_n\lambda_nx_n,$$
$$\|y\|^2=|c_1\lambda_1|^2+|c_2\lambda_2|^2+\cdots+|c_n\lambda_n|^2$$
$$\leqslant\lambda_1^2(|c_1|^2+|c_2|^2+\cdots+|c_n|^2)$$
$$=\lambda_1^2\|x\|^2.$$

并且等式在 $x=x_1$ 时达到.

注. 我们指出, $\|U\|$ 还有另一个表示式, 即

$$\|U\|=\sup_{\|x\|=1}|(Ax, x)|$$
$$=\sup_{\|x\|=1}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\xi_k\right)\xi_j\right|.$$

事实上,

$$|(Ax, x)|\leqslant\|Ax\|\|x\|=\|U(x)\|\|x\|$$
$$\leqslant\|U\|=|\lambda_1|\qquad(\|x\|=1).$$

但 $x=x_1$ 时等式成立. 因而 $\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax, x)|=\|U\|$.

现在设 A 是任意的矩阵. 在此情形得

$$\|U\|^2=\sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|^2=\sup_{\|x\|=1}(Ax, Ax)$$
$$=\sup_{\|x\|=1}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\xi_k\sum_{s=1}^{m}\bar{a}_{js}\bar{\xi}_s\right)$$
$$=\sup_{\|x\|=1}\sum_{s=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jk}a_{sj}^{*}\right)\xi_k\right]\bar{\xi}_s$$

---

*) 矩阵 A^* 的元素 a_{jk}^* 由等式 $a_{jk}^*=\bar{a}_{kj}(j=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$ 来确定, 特别, 如果 A 是实阵, 则 $a_{jk}^*=a_{kj}$.

$$= \sup_{\|x\|=1} (A^*Ax, x) = A_1,$$

根据上面的注解，其中 A_1 是矩阵 A^*A 的最大特征值.

当 $n=1$ 时算子 U 变为泛函. 矩阵 A 退化为单行的. 于是得知，m 维空间 $\mathbf{X}$ 中的任一个线性泛函 f 可用一组 m 个数 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ 来确定:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k \xi_k \qquad (x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in \mathbf{X}). \tag{17}$$

因为，反过来，任给一组数 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$，由公式 (17) 确定 $\mathbf{X}$ 中的某个线性泛函，所以可以把这组数和泛函看成是一致的，并写作

$$f = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m). \tag{18}$$

在各种不同的具体空间中，泛函(18)的范数由下面的式子

$$\mathbf{X} = \mathbf{l}_m^\infty, \quad \|f\| = \sum_{k=1}^{m} |\varphi_k|, \tag{19}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{l}_m^1, \quad \|f\| = \max_k |\varphi_k|, \tag{20}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{l}_m^2, \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |\varphi_k|^2} \tag{21}$$

来确定.

注. 如果 $\mathbf{X}$ 是复空间，则应把公式(17)改写为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \bar{\varphi}_k \xi_k,$$

和前面一样，把 f 与数组 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ 看成是一致的(参见在 2.3 中的注).

§3. Hilbert 空间中的线性泛函与线性算子

3.1. 在可分 Hilbert 空间中的算子*)，类似于有限维空间中算子的矩阵表示，也可用矩阵表出(参见 2.8)

---

*) 在讲到 Hilbert 空间时，“算子”这个术语永远表示是“线性连续算子”. 此外，用 Ux 代替 $U(x)$.

事实上，设U是(无限维)可分Hilbert空间$\mathbf{H}$中的算子．任取一个完全的规格化正交系$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$．每个元素$x\in\mathbf{H}$都可以表示为

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}c_k x_k,$$

其中$c_k=(x, x_k)$是元素x的Fourier系数．所以，根据算子U的连续性，

$$y=Ux=\sum_{k=1}^{\infty}c_k U x_k.$$

比较左右两端的Fourier系数得

$$d_j=\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}c_k, \tag{1}$$

其中d_j是元素y的Fourier系数，而a_{jk}是元素Ux_k的Fourier系数．

于是，元素$y=Ux$的Fourier系数序列可以由元素x的Fourier系数序列经过矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jk} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{2}$$

的变换后得出．

因此，如同有限维情形一样，算子U可以用矩阵表出．

然而，与有限维情形不同，并不是所有形如(2)的这种矩阵都确定一个线性算子．它能确定线性算子的充要条件为存在这样的常数c，使得对于任何$m, n=1, 2, \cdots$及任意的$c_1, c_2, \cdots, c_m$都有

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{jk}c_k\right|^2\leqslant C^2\sum_{k=1}^{m}|c_k|^2. \tag{3}$$

这个条件的必要性几乎是显 然成立的．取其 Fourier 系数从第$(m+1)$项起为 0 的元素作为x，得

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{jk}c_k\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{jk}c_k\right|^2$$

$$=\|y\|^2=\|Ux\|^2\leqslant\|U\|^2\|x\|^2=\|U\|^2\sum_{k=1}^{m}|c_k|^2,$$

由此看出，可取$\|U\|$作为 C.

反之，如果不等式(3)成立，则先令其中m趋于无穷，然后再令n 趋于无穷，便得

$$\|y\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}c_k\right|^2\leqslant C^2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=c^2\|x\|^2.$$

上述判别准则验证时很困难，因为这个缘故，我们给出一个比较简单的充分条件，它使算子类缩小许多，即，如果

$$D^2=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<\infty$$

则矩阵(2)按公式(1)定义了 **H** 中的线性算子.

事实上，

$$\|y\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}c_k\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2\|x\|^2,$$

由此推出算子U的有界性和估计式$\|U\|\leqslant D$.

还应该指出，算子U的矩阵表示依赖于规格化正交系x_1，x_2，…，x_n，…的选择，当它改变时，给定的算子U的表示矩阵(2)也要

改变. 在什么条件下两个形如(2)的矩阵确定同一个算子，这个问题比较复杂，我们不去讨论它了，建议读者去看专门的著作*⁾.

3.2. 现在来阐明 Hilbert 空间中的线性泛函的一般形式.

在空间$\mathbf{H}$中研究具有指定元素$y\in\mathbf{H}$的内积(x, y). 不难证实它是个线性泛函. 事实上，设

$$f(x)=(x, y), \tag{4}$$

泛函f的可加性和齐次性由内积空间的公理 2 推出，而f的有界性是 Cauchy-Буняковский 不等式的推论：

$$|f(x)|=|(x, y)|\leqslant\|x\|\|y\|,$$

由此断定

$$\|f\|\leqslant\|y\|. \tag{5}$$

我们来证明，形如(4)的泛函已包括了$\mathbf{H}$中所有的线性泛函，并且(5)式中等号成立.

定理 1. 对于 Hilbert 空间$\mathbf{H}$中任何连续线性泛函f，存在一个元素$y\in\mathbf{H}$，唯一地确定这个泛函f，使得对于每一个$x\in\mathbf{H}$，(4)式成立，并且成立等式

$$\|f\|=\|y\|. \tag{6}$$

证. 首先证明元素y的存在性. 用$\mathbf{H}_0$表示使$f(x)=0$成立的元素$x\in\mathbf{H}$的集合. 由于f是线性连续泛函，所以这个集合是闭子空间. 如果$\mathbf{H}_0=\mathbf{H}$，则可以取$y=\mathbf{0}$.

我们讨论$\mathbf{H}_0\neq\mathbf{H}$的情形. 设$y_0\notin\mathbf{H}_0$，把$y_0$表示为

$$y_0=y'+y'' \qquad (y'\in\mathbf{H}_0,\ \ y''\perp\mathbf{H}_0)$$

(定理 IV.5.1)，显然$y''\neq\mathbf{0}$，$f(y'')\neq0$，所以可以认为$f(y'')=1$. 任取一个元素$x\in\mathbf{H}$，记$f(x)=\alpha$. 令$x'=x-\alpha y''$，因为

$$f(x')=f(x)-\alpha f(y'')=\alpha-\alpha=0,$$

所以元素$x'=x-\alpha y''\in\mathbf{H}_0$，因此

*) 例如，参见 Ахиезер 和 Глазман.

$$(x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha(y'', y''),$$

故

$$f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')}\right),$$

从而可以取 $y = \frac{y''}{(y'', y'')}$.

于是证明了 y 的存在性.

这个元素的唯一性的证明很简单. 事实上, 如果对于所有的 $x \in \mathbf{H}$,

$$(x, y) = (x, y_1),$$

则$(x, y - y_1) = 0$, 因此 $y - y_1 \perp \mathbf{H}$, 这只有在 $y = y_1$ 时才有可能.

其次,

$$\|f\| \geqslant f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|,$$

它与(5)式一起, 便得等式(6)*).

定理证毕.

特别, 在空间 $\mathbf{L}^2(T, \Sigma, \mu)$ 中线性泛函的一般形式为

$$f(x) = (x, y) = \int_T x(t)\overline{y(t)}d\mu \quad (x, y \in \mathbf{L}^2).$$

在空间 $\mathbf{l}^2$ 中

$$f(x) = (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k$$

$$(x = (\xi_1, \xi_2, \cdots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in \mathbf{l}^2).$$

空间 $\mathbf{L}^2(a, b)$ 中泛函的一般形式由 Fréchet[2]给出, 对于抽象 Hilbert 空间, 在可分情形由 Neumann[1] 给出, 一般情形由 Rellich[1]给出.

在 1.3 中我引进过在复赋范空间中泛函与标量乘积的公式

$$(\lambda f)(x) = \overline{\lambda} f(x). \tag{7}$$

---

*) 如果 $y = 0$, 则(6)式从(4)式直接推出.

为了说明这个定义的合理性，我们考察 Hilbert 空间$\mathbf{H}$中的泛函．Hilbert空间中线性泛函一般形式的定理指出了泛函 $f\in\mathbf{H}^*$与确定此泛函的元素 $y\in\mathbf{H}$ 之间的对应关系：

$$f(x)=(x, y) \qquad (x\in\mathbf{H}). \tag{8}$$

同时，如果 f_1 由元素 y_1 确定，f_2 由元素 y_2 确定，则显然 f_1+f_2 由元素 y_1+y_2 确定，由此 λf 按公式(7)来确定这同泛函 λf 由元素 λy 来确定是一致的．事实上，

$$(\lambda f)(x)=\bar{\lambda}f(x)=\bar{\lambda}(x, y)=(x, \lambda y). \tag{9}$$

此外，因为$\|f\|=\|y\|$，所以按此方式建立泛函 f 的空间$\mathbf{H}^*$与元素y的空间$\mathbf{H}$ 之间的对应是线性等距的．

3.3. 设U是 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的线性(有界) 算子．考察泛函

$$f(x)=(Ux, y),$$

其中 y 是$\mathbf{H}$中指定的元素．显然 f 是线性泛函，而因为

$$|f(x)|=|(Ux, y)|\leqslant\|Ux\|\|y\|\leqslant\|U\|\|x\|\|y\|,$$

所以泛函 f 有界，并且

$$\|f\|\leqslant\|U\|\|y\|. \tag{10}$$

因此，由定理 1 存在元素 $y^*\in\mathbf{H}$ 使得

$$f(x)=(x, y^*) \qquad (x\in\mathbf{H}),$$

即

$$(Ux, y)=(x, y^*) \qquad (x\in\mathbf{H}). \tag{11}$$

元素 y^* 由泛函 f 唯一地确定，因而它也由元素 y 唯一确定．从而建立了元素 y 与元素 y^*之间的对应．我们得到了$\mathbf{H}$中的一个算子，这个算子叫做U 的共轭算子，并记为U^*．在(11)式中用U^*y 代替 y^*，我们得到确定共轭算子的关系式

$$(Ux, y)=(x, U^*y) \qquad (x, y\in\mathbf{H}).$$

算子 U^* 是可加的．事实上，对于任意的 $x\in\mathbf{H}$，

$$(Ux, y_1) = (x, U^*y_1),$$
$$(Ux, y_2) = (x, U^*y_2),$$
把这两个式子相加后得
$$(Ux, y_1 + y_2) = (x, U^*y_1 + U^*y_2).$$
由此
$$U^*(y_1 + y_2) = U^*y_1 + U^*y_2.$$
类似地
$$(Ux, iy) = -i(Ux, y) = -i(x, U^*y) = (x, iU^*y)$$
$$(x, y \in \mathbf{H}).$$
由此
$$U^*(iy) = iU^*y.$$
因而对于任何 λ, $U^*(\lambda y) = \lambda U^*y$, 故 U^* 是线性算子.

其次, 因为 $\|f\| = \|y^*\|$, 所以不等式(10)可改写为
$$\|y^*\| = \|U^*y\| \leqslant \|U\| \|y\|.$$
由此推出算子 U^* 的有界性, 并且 $\|U^*\| \leqslant \|U\|$.

不难看出, 算子 $U^{**} = (U^*)^*$ 与 U 重合. 事实上, 对于任意的 $x, y \in \mathbf{H}$ 有等式
$$(U^*x, y) = (x, U^{**}y)$$
及
$$(U^*x, y) = (x, Uy).$$
由此 $(x, U^{**}y) = (x, Uy)$, 于是对于任意的 $y \in \mathbf{H}$, $U^{**}y = Uy$.

从上面的式子可以得出算子 U 与 U^* 的范数相等. 事实上, 利用已证的不等式, 得 $\|U\| = \|U^{**}\| \leqslant \|U^*\|$, 再和前面的不等式比较推出等式 $\|U^*\| = \|U\|$.

同它的共轭算子一致的算子 U 叫做自共轭的, 自共轭算子用等式
$$(Ux, y) = (x, Uy) \qquad (x, y \in \mathbf{H})$$

来描述. 自共轭算子在Hilbert空间的算子理论中起着主要的作用,因为这个理论的最深刻的结果都与自共轭算子有关. 同时,还可以讨论无界算子.

下面(第九章),共轭算子的概念将推广到任意B-空间中线性算子的情形. 然而,一般来讲,共轭算子要定义在另一个空间中,所以,自共轭算子的概念不能推广到一般情形.

设$\mathbf{H}=\mathbf{L}^2(a,b)$,$U$是在2.6中定义的积分算子,即$y=Ux$表示

$$y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt \quad \left(\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt<+\infty\right). \tag{12}$$

不难验证,共轭算子U^*也是积分算子,即如果$y^*=U^*y$,则

$$y^*(s)=\int_a^b K^*(s,t)y(t)dt \qquad (K^*(s,t)=\overline{K(t,s)}). \tag{13}$$

事实上,对于任意的$x\in\mathbf{L}^2$应有

$$(Ux,y)=(x,y^*),$$

即

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right]\overline{y(s)}ds=\int_a^b x(t)\overline{y^*(t)}dt.$$

因而

$$\int_a^b x(t)\overline{\left[y^*(t)-\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)ds\right]}dt=0,$$

由x的任意性可得

$$y^*(t)=\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)ds,$$

即(13)式成立.

如果核$K(s,t)$是复对称的,即

$$K(t,s)=\overline{K(s,t)},$$

则算子(12)是自共轭的.

现在设算子U用矩阵(2)来定义. 用d_1, d_2, …表示元素y的Fourier系数, 便有

$$(Ux, y)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}c_k\right)\bar{d}_j$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\overline{\sum_{j=1}^{\infty}\bar{a}_{jk}d_j}=(x, y^*),$$

其中y^*是这样的元素, 它的Fourier系数为

$$d_j^*=\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}^*d_k \quad (j=1, 2, \cdots;\ a_{jk}^*=\bar{a}_{kj}).$$

因为$y^*=U^*y$, 所以这表示算子U^*的矩阵为

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1k}^* & \cdots \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2k}^* & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}^* & a_{j2}^* & \cdots & a_{jk}^* & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

这个矩阵是矩阵(2)的Hermite共轭. 特别, $U^*=U$表示$a_{jk}=\bar{a}_{kj}$.

3.4. 所谓投影算子, 这是Hilbert空间中的一类重要的算子.

设$\mathbf{H}_0$是Hilbert空间$\mathbf{H}$的子空间. 根据定理IV.5.1, 对于每一个$x\in\mathbf{H}$, 都唯一对应着它在子空间$\mathbf{H}_0$上的投影. 这就在$\mathbf{H}$中定义了一个算子$P=P_{\mathbf{H}_0}$, 称为(在子空间$\mathbf{H}_0$上的)投影算子或投影.

投影算子显然有下列性质:

a) 对于任意的$x\in\mathbf{H}$, 元素Px与$x-Px$相互正交.

b) $x\in\mathbf{H}_0$等价于$Px=x$.

c) $x\perp\mathbf{H}_0$等价于$Px=0$.

其次，因为 $\|x\|^2=\|Px\|^2+\|x-Px\|^2$，所以$\|Px\|\leqslant\|x\|$，因而$\|P\|\leqslant 1$. 如果 $\mathbf{H}_0$ 具有非零元素，则取 $\bar{x}\in\mathbf{H}_0$，$\|\bar{x}\|=1$，便得$\|P\|\geqslant\|P\bar{x}\|=\|\bar{x}\|=1$. 于是有

d) $\|P\|=1$.

下面的定理描述了投影算子类的特征.

定理 2. $\mathbf{H}$ 中的线性算子 P 是投影算子的充要条件为

(1) P 是自共轭算子;

(2) 对于每一个 $x\in\mathbf{H}$，等式$P(Px)=Px$ 成立.

证. 必要性. 设P是子空间 $\mathbf{H}_0$ 上的投影算子. 任取 $x, y\in\mathbf{H}$ 并把它们表示为

$$x=x'+x'' \qquad (x'=Px\in\mathbf{H}_0,\ x''\perp\mathbf{H}_0),$$

$$y=y'+y'' \qquad (y'=Py\in\mathbf{H}_0,\ y''\perp\mathbf{H}_0).$$

于是有

$$(Px, y)=(x', y'+y'')=(x', y')$$
$$=(x'+x'', y')=(x, Py),$$

从而推出算子P的自共轭性.

其次，利用 b)

$$P(Px)=Px'=x'=Px,$$

即证得第二个条件的必要性.

充分性. 设P是满足定理两个条件的线性算子. 以$\mathbf{H}_0$表示使 $Px=x$ 成立的所有 $x\in\mathbf{H}$ 的集合. 不难验证 $\mathbf{H}_0$ 是子空间. 我们来证明P是 $\mathbf{H}_0$ 上的投影算子. 事实上，任取 $x\in\mathbf{H}_0$，把它表示为 $x=Px+(x-Px)$. 应该证明 $Px\in\mathbf{H}_0$, $x-Px\perp\mathbf{H}_0$.

第一个关系式显然成立，因为$P(Px)=Px$. 其次，如果 $u\in\mathbf{H}_0$，则 $Pu=u$，因而

$$(x-Px, u)=(x, u)-(Px, u)$$
$$=(x, u)-(x, Pu)=0;$$

于是 $x-Px\perp\mathbf{H}_0$，定理证毕.

为了得到投影算子 P 的适当的矩阵表示，应选择规格化正交系 $x_1, x_2, \cdots$，使得对于每一个 $k=1, 2, \cdots$，或者 $x_k\in\mathbf{H}_0$，或者 $x_k\perp\mathbf{H}_0$ *).

在这种选择下有

$$a_{jk}=(Px_k, x_j)=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ 0, & j=k, \quad x_k\perp\mathbf{H}_0,\\ 1, & j=k, \quad x_k\in\mathbf{H}_0.\end{cases}$$

因此，表示投影算子 P 的矩阵(2)的所有元素，除了位于主对角线上的元素可能等于1外，其余元素全为0.

共轭算子和投影算子的概念，对于可分的Hilbert空间是由Neumann[1]引进的，在一般情形是由Rellich[1]引进的.

3.5. 我们来建立在3.4中引进的投影算子和在赋范空间理论中讨论的(IV.1.9)投影算子之间的关系. 第一种算子我们有时叫它为正交投影算子，而第二种叫做投影算子. 设H是Hilbert空间. 显然正交投影算子是投影算子；反之并不成立. 定理IV.5.1指出，存在到Hilbert空间的任何子空间上的正交投影算子，而这时它是可补的(按IV.1.9意义). 这个性质还描述了 B-空间中Hilbert空间类的特征.

定理3. 如果在 B-空间X中的任何闭子空间有补，则X与某个Hilbert空间同构.

定理3及其证明(还有在各种 B-空间中具体的不可补的子空间的例子)可在Кадец和Митягин[1]的文章中找到，J. Lindenstrauss和L. Tzafriri也给出了证明. 不可补子空间的最有名的具

*) 这可以用下述方法得到：在 $\mathbf{H}_0$ 及其正交余空间中各选一个规格化正交系，使它们在每个子空间中都是完全的. 然后把这两个正交系合并在一起(和IV.5.8比较).

体例子有：$\mathbf{c}_0$在$\mathbf{l}^\infty$中不可补，$\mathbf{C}[0,1]$在$\mathbf{L}^\infty(0,1)$中不可补.

§4. 算 子 环

4.1. 线性算子不仅可以相加，而且还可以相乘. 设$\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$和$\mathbf{Z}$是三个赋范空间，U和V分别是由$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$内及由$\mathbf{Y}$到$\mathbf{Z}$内的线性算子($U\in B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $V\in B(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$). 算子$V$与$U$的乘积是算子$W=VU$，它是$\mathbf{X}$到$\mathbf{Z}$内的算子，其定义为：

$$W(x)=V(U(x))\qquad (x\in\mathbf{X})^{*)}.$$

因为

$$\begin{aligned}W(x_1+x_2)&=V(U(x_1+x_2))\\&=V(U(x_1)+U(x_2))\\&=V(U(x_1))+V(U(x_2))\\&=W(x_1)+W(x_2)\end{aligned}$$

并且

$$\|W(x)\|=\|V(U(x))\|\leqslant\|V\|\|U(x)\|\leqslant\|V\|\|U\|\|x\|,$$

所以W是线性算子，并且

$$\|W\|=\|VU\|\leqslant\|V\|\|U\|. \tag{1}$$

如果$\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$、$\mathbf{Z}$是有限维空间(维数分别为m、n、p)，而A、B、C是对应于算子U、V、W的矩阵，则$C=BA$. 事实上，$z=W(x)$表示

$$\zeta_j=\sum_{k=1}^m c_{jk}\xi_k$$

$$(j=1,2,\cdots,p;\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m);\ z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_p)).$$

另一方面，$z=V(y)$，其中$y=U(x)$，即

$$\zeta_j=\sum_{m=1}^n b_{jm}\eta_m,\qquad \eta_m=\sum_{k=1}^m a_{mk}\xi_k$$

---

*) 这个定义对于非线性算子也有意义.

$$(j=1,2,\cdots,p;\quad m=1,2,\cdots,n;\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n))$$

把这个式子与前式比较, 又由于元素 x 的任意性得

$$c_{jk}=\sum_{m=1}^{n} b_{jm}a_{mk}\qquad (j=1,2,\cdots,p;\quad k=1,2,\cdots,m),$$

证毕.

从线性代数中知道, 两个矩阵之积可能是一个元素全为 0 的矩阵, 虽然各矩阵因子异于零. 这表明在(1)式中不等式不能改为等式, 甚至在有限维情形也不能.

然而, 数的乘积运算的一系列性质对算子也成立. 例如, 可证算子乘法具有结合律和分配律. 其次, 算子乘法也存在数的乘积运算中起单位作用的那种算子, 然而与数的乘积不同, 这里有两个单位算子——左单位算子和右单位算子. 实现 $\mathbf{X}$ 中恒等变换的算子 $I\in B(\mathbf{X},\mathbf{X})$:

$$I(x)=x\qquad (x\in\mathbf{X}),\tag{2}$$

是右单位算子:

$$UI=U,$$

实现 $\mathbf{Y}$ 中恒等变换的算子 I_1 是左单位算子:

$$I_1U=U.$$

应该特别着重指出, 算子乘法不满足交换律. 不但如此, 一般来说, 算子 UV 连定义也没有, 所以等式 $UV=VU$ 毫无意义. 但即使算子 UV 有意义时 (例如, $\mathbf{Z}=\mathbf{X}$时), 算子 VU 和 UV 定义在不同的空间中, 第一个在 $\mathbf{X}$ 中, 第二个在 $\mathbf{Y}$ 中.

因此, 关于算子 U 和 V 可交换性的问题仅在 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}=\mathbf{Z}$ 时, 即当此两个算子是同一个空间 $\mathbf{X}$ 中的算子时, 换句话说, 它们是空间 $B(\mathbf{X},\mathbf{X})$ 中的元素时才可以提出.

然而, 如果 $\mathbf{X}$ 不是一维空间, 等式 $UV=VU$ 对任意的算子 U、$V\in B(\mathbf{X},\mathbf{X})$ 一般也不成立.

4.2. 在连续线性算子空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 中，把 $\mathbf{X}$ 映射到自身的算子 $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 有特殊的意义，因为只有在这种情形下任意两个元素的乘积有意义.

设有一个系统，对于其中的元素定义了两种运算：加法和乘法，并服从数的运算的通常法则(除了乘法的可交换性和可求逆性外)，则称它是个环. 如果对赋范空间中的元素定义了乘法，则称之为赋范环*). 同时，为了使乘法运算和空间的度量发生联系，要求乘积具有连续性.

这样，空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 是赋范环(乘积的连续性由不等式(1)推出)**).

在赋范环中，特别在空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 中可以定义任何元素的幂. 设 $U \in B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$，我们定义

$$U^0 = I, U^n = U^{n-1} U \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

其中 I 是 $\mathbf{X}$ 中的恒等算子(参看(2)).

因为这个定义与数的相当的定义没有什么区别，所以，对于任意正整数 m 和 n，

$$U^m U^n = U^{m+n},$$

由此推出，一个算子 U 的任意次幂之间是可交换的.

其次，相继利用不等式(1)可得

$$\|U^n\| \leqslant \|U\|^n \qquad (n = 0, 1, \cdots); \tag{3}$$

并且，等号一般不成立.

下面我们认为空间 $\mathbf{X}$ 是完备的. 于是根据定理1.2，空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 也是完备的. 在此假设下，研究“几何级数”：

$$I + U + U^2 + \cdots + U^n + \cdots. \tag{4}$$

---

*) 在文献中通常分别利用术语代数和赋范代数，在范数完备时叫 Banach 代数.

**) 我们只考察与空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 有关的赋范环理论，希望进一步了解赋范环的读者，我们介绍去读 М. А. Наймарк 的书(参见 Наймарк).

我们来阐明在怎样的条件下这个级数收敛. 由(3)直接推出, 如果

$$\|U\|<1, \tag{5}$$

则因收敛的数项级数

$$1+\|U\|+\|U\|^2+\cdots+\|U\|^n+\cdots$$

为级数(4)的优级数, 又由于空间 $B(\mathbf{X},\mathbf{X})$ 的完备性, 故知级数(4)收敛(参见 IV. 1.5). 然而, 与数项级数情形不同, 条件(5)并不是级数(4)收敛的必要条件.

定理1. 对于任何算子 $U\in B(\mathbf{X},\mathbf{X})$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|U^n\|}=c_U$$

存在. 并且, 如果 $c_U<1$, 则级数(4)收敛, 如果 $c_U>1$ 则级数发散.

证. 记

$$a=\inf_n\sqrt[n]{\|U^n\|},$$

我们来证 明 $c_U=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|U^n\|}=a$. 设 $\varepsilon>0$, 可以找到 m 使得

$$\sqrt[m]{\|U^m\|}<a+\varepsilon.$$

其次, 设

$$M=\max[1,\|U\|,\cdots,\|U^{m-1}\|],$$

考虑任意的 n, 把它表示为 $n=k_nm+l_n$ $(0\leqslant l_n\leqslant m-1)$. 同时, 根据(3),

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\|U^n\|}&=\sqrt[n]{\|U^{l_n}\|\,\|U^m\|^{k_n}}\\&\leqslant M^{1/n}\|U^m\|^{k_n/n}\\&<M^{1/n}(a+\varepsilon)^{(n-l_n)/n},\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}M^{1/n}(a+\varepsilon)^{(n-l_n)/n}=a+\varepsilon,$$

则可以找到 N_ε 使得

$$M^{1/n}(a+\varepsilon)^{(n-l_n)/n}<a+2\varepsilon \qquad (n\geqslant N_\varepsilon).$$

所以，对于 $n\geqslant N_\varepsilon$

$$a\leqslant\sqrt[n]{\|U^n\|}<a+2\varepsilon,$$

由此推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|U^n\|}=a$存在.

现在把Cauchy收敛判别法应用到级数$\sum\limits_{k=0}^{n}\|U^n\|$上来得到级数(4)是收敛的($c_U<1$时)或是发散的($c_U>1$时).

推论. 级数(4)收敛的充要条件为对于某个 k

$$\|U^k\|<1. \tag{6}$$

事实上，如果级数(4)收敛，则$\|U^n\|\to 0$，因此，当 k 充分大时(6)式成立. 反之，如果(6)式成立，则 $c_U=\inf\limits_{n}\sqrt[n]{\|U^n\|}\leqslant\sqrt[k]{\|U^k\|}<1$，因而级数(4)收敛.

4.3. 我们研究算子乘法的逆运算问题. 设有一个把赋范空间$\mathbf{X}$映射到赋范空间$\mathbf{Y}$内的线性算子 U. 如果存在一个把$\mathbf{Y}$映射到$\mathbf{X}$内的算子 V，使得

$$VU=I_{\mathbf{X}}, \qquad UV=I_{\mathbf{Y}}, \tag{7}$$

则称算子U有逆算子(或称U是可逆的)，其中$I_{\mathbf{X}}$和$I_{\mathbf{Y}}$分别是空间$\mathbf{X}$和空间$\mathbf{Y}$中的恒等变换*). 算子V叫做U的逆算子并记为 $V=U^{-1}$.

从定义直接推出，逆算子U^{-1}与U一样也是线性的. 事实上，如果$y_1, y_2\in\mathbf{Y}$，则由于关系式(7)的第二式

$$y_k=U(x_k) \qquad (x_k=V(y_k);\ k=1,2).$$

因此根据关系式(7)的第一式得

$$V(y_1+y_2)=V(U(x_1+x_2))=x_1+x_2=$$

---

*) 今后我们利用记号$I_{\mathbf{X}}$, $I_{\mathbf{Y}}$等时不每次都作说明，在不致产生误解的情况下，表示空间的下标将被略去.

$$=V(y_1)+V(y_2).$$

类似地可证算子 U^{-1} 的齐次性.

其次,由定义推出算子 U 是 U^{-1} 的逆算子,即 $(U^{-1})^{-1}=U$.

上述逆算子的定义带有形式上的特征.为了弄清楚它的本质,我们来证明,如果存在逆算子 U^{-1}, 则算子 U 实现空间 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 上的一一映射.

事实上,取 $x_1\neq x_2$ $(x_1, x_2\in\mathbf{X})$. 如果 $U(x_1)=U(x_2)$, 则根据关系式(7)的第一个式子有

$$x_1=VU(x_1)=VU(x_2)=x_2.$$

其次,每一个 $y\in\mathbf{Y}$ 是某个 $x\in\mathbf{X}$ 的象(并且由前面的证明,这样的 x 只有一个),即作为 x 可取元素 $x=V(y)$. 于是,根据关系式(7)的第二式

$$U(x)=UV(y)=y.$$

反之,设算子 U 实现 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 上的一一映射. 把元素 $y\in\mathbf{Y}$ 与它的原象相对应,即与使得 $U(x)=y$ 的元素 $x\in\mathbf{X}$ 对应. 这就得出把 $\mathbf{Y}$ 映射到 $\mathbf{X}$ 上的算子 V. 不难验证 V 是线性算子,并且 $V=U^{-1}$.

事实上,关系式 $x=V(y)$ 与 $y=U(x)$ 是等价的,因此

$$VU(x)=V(y)=x, \qquad UV(y)=U(x)=y.$$

顺便指出,从以上讨论推得,逆算子如果存在,只能有一个. 还可以从另一种观点来考察逆算子,设有方程

$$U(x)=y, \tag{8}$$

其中 y 是 $\mathbf{Y}$ 中任意指定的元素,而 x 是空间 $\mathbf{X}$ 中的未知元素.

显然,如果存在逆算子 U^{-1}, 则对于任何 $y\in\mathbf{Y}$, 方程(8)有唯一的解,并且这个解是 $x=U^{-1}(y)$.

方程(8)有唯一解这点还不能保证连续逆算子 U^{-1} 的存在.

定理 2. 设对于任何 $y\in\mathbf{Y}$ 方程(8)有解,又设存在正数 m 使得对于每一个 $x\in\mathbf{X}$

$$\|U(x)\| \geqslant m\|x\|. \tag{9}$$

则算子 U 存在连续逆算子 U^{-1}, 并且

$$\|U^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}. \tag{10}$$

证. 因为如果 $x_1 \neq x_2$, 则

$$\|U(x_1)-U(x_2)\| \geqslant m\|x_1-x_2\| > 0,$$

所以算子 U 是一对一的映射. 此外, 由于方程(8)对任何 $y \in \mathbf{Y}$ 有解, 故 $U(\mathbf{X})=\mathbf{Y}$.

因此, 由前面的讨论可知存在线性算子 $V=U^{-1}$. 因为 $x=V(y)$ 表示 $y=U(x)$, 所以, 由(9)得

$$\|y\| \geqslant m\|V(y)\| \qquad (y \in \mathbf{Y}),$$

或

$$\|U^{-1}(y)\| = \|V(y)\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\| \qquad (y \in \mathbf{Y}). \tag{11}$$

换句话说, U^{-1} 是有界的, 因此它是连续算子. 由(11)式可直接推出估计式(10).

注. 定理的条件对于连续逆算子 U^{-1} 的存在性来说也是必要的.

第一个条件显然是必要的, 如果取 $m=\frac{1}{\|U^{-1}\|}$, 容易验证第二个条件的必要性.

作为应用上述定理的例子, 考察 $\mathbf{L}^2(a, b)$ 中的算子 U, 其定义如 2.7 中那样:

$$y=U(x), \quad y(s)=x(s)-\lambda\int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

(假定核 $K(s, t)$ 是对称的).

设 λ 不是核的特征值, 根据积分方程理论可知, 对于任何 $y \in \mathbf{L}^2$ 方程(8)有解(见 Петровский). 其次, 在 2.7 中曾经指出(我

们仍沿用以前的记号）

$$\|y\|^2=\|U(x)\|^2=\sum_{-\infty}^{\infty}h_k^2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2,$$

由此可见

$$\|U(x)\|^2\geqslant m^2\sum_{-\infty}^{\infty}h_k^2=m^2\|x\|^2,$$

其中

$$m=\inf\left|1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right| \qquad (k=\cdots,\ -1,0,1,\cdots),$$

而λ_k表示核$K(s,t)$的特征值($k=0,\ -1,\ -2,\ \cdots$时可认为$\lambda_k=\infty$)．因为$\lambda_k\neq\lambda$并且当$k\to\infty$时$\lambda_k\to\infty$，所以$m>0$．于是存在连续算子U^{-1}，并且

$$\|U^{-1}\|\leqslant\frac{1}{m}=\sup\left|1+\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right| \qquad (k=\cdots,\ -1,0,1,\cdots).$$

4.4. 在关系式(7)中只有一个式子成立时，我们分别得到左逆算子和右逆算子的概念，确切地说，如果

$$V_lU=I_{\mathbf{X}},$$

则称由$U(\mathbf{X})$到$\mathbf{X}$内的算子V_l为算子U的左逆；如果

$$UV_r=I_{\mathbf{Y}},$$

则称由$\mathbf{Y}$到$\mathbf{X}$内的算子V_r为算子U的右逆．

我们以记号U_l^{-1}表示左逆算子、以U_r^{-1}表示右逆算子，当讲到某个逆算子其含意已经清楚时，下标有时就略去．从上面讨论可知，左逆算子一定是线性的．

当左逆或右逆算子存在时能够对方程(8)的可解性作出某些结论．也就是说，如果存在左逆算子U_l^{-1}，则方程(8)的解，要是存在必定唯一，换句话说，如果有左逆算子，则U是$\mathbf{X}$到$U(\mathbf{X})$上的一一映射．事实上，在逆算子存在情形，验证这一性质时，我们只

利用了关系式(7)中的第一式，此式对左逆算子也成立.

应当注意，集合 $U(\mathbf{X})$ 一般并不与 $\mathbf{Y}$ 重合，因此算子 U_l^{-1} 并不是在整个空间 $\mathbf{Y}$ 上有意义.

同样可以证明，右逆算子的存在蕴涵方程(8)对任何 $y\in\mathbf{Y}$ 时的可解性（但一般说来不是唯一的，解为 $x=U_r^{-1}(y)$），即这时有 $U(\mathbf{X})=\mathbf{Y}$.

由上面讨论可知，如果左逆 U_l^{-1} 和右逆 U_r^{-1} 同时存在，则它们相等，并且存在逆算子 $U^{-1}=U_l^{-1}=U_r^{-1}$. 所以，我们有时把逆算子叫做双边逆.

最后指出，连续左逆算子存在的充要条件为算子 U 满足条件(9).

4.5. 当 $\mathbf{Y}=\mathbf{X}$ 时，如果对于给定的算子 $U\in B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 存在连续逆算子，则这个逆算子也是同一空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 中的元素.

考虑 4.2 中的级数(4)：

$$I+U+U^2+\cdots+U^n+\cdots,$$

得到下面的定理(参见 Banach[2]).

定理 3 (Banach). 设 $\mathbf{X}$ 是 B-空间，且 $U\in B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$. 于是，如果

$$\|U\|\leqslant q<1, \tag{12}$$

则算子 $I-U$ 有连续逆算子，并且

$$\|(I-U)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-q}. \tag{13}$$

证. 在 4.2 中已经证明，在定理的条件下，即在条件(5)下级数(4)收敛. 用 V 表示这个级数的和，有

$$\begin{aligned} V(I-U)&=(I+U+\cdots+U^n+\cdots)(I-U)\\ &=(I+U+\cdots+U^n+\cdots)-(U+U^2+\cdots+U^{n+1}+\cdots)\\ &=I \end{aligned} \tag{14}$$

类似地也可得

$$(I-U)V=I. \tag{15}$$

由此可见，$V=(I-U)^{-1}$.

其次，由于(3)

$$\|V\|\leqslant\|I\|+\|U\|+\cdots+\|U^n\|+\cdots$$
$$\leqslant 1+q+\cdots+q^n+\cdots=\frac{1}{1-q},$$

从而得估计式(13).

注. 因为当级数(4)收敛时关系式(14)与(15)总是成立的，所以，由定理1及其推论可知，当

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|U^n\|}<1 \tag{16}$$

或在某个 $k=1, 2, \cdots$

$$\sqrt[k]{\|U^k\|}<1 \tag{17}$$

时存在连续线性算子 $(I-U)^{-1}$.

4.6. Banach 定理指出，与具有连续逆算子的恒等算子 $I(I^{-1}=I)$ 相差不大的算子 $I-U$ 具有连续逆算子. 这个事实可以推广.

定理 4. 设 $U_0\in B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$，其中 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 是两个 B-空间，又设存在 $U_0^{-1}\in B(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. 于是，如果算子 $U\in B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 满足条件

$$\|U\|<\frac{1}{\|U_0^{-1}\|}, \tag{18}$$

则算子 $V=U_0+U$ 具有连续逆算子 V^{-1}，并且

$$\|V^{-1}\|\leqslant\frac{\|U_0^{-1}\|}{1-\|U_0^{-1}U\|}\leqslant\frac{\|U_0^{-1}\|}{1-\|U_0^{-1}\|\|U\|}.$$

证. 研究算子

$$W=U_0^{-1}V=I_X+U_0^{-1}U.$$

因为

$$\|U_0^{-1}U\|\leqslant\|U_0^{-1}\|\|U\|<1,$$

所以由Banach定理算子W具有连续逆算子W^{-1}，并且

$$\|W^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|U_0^{-1}U\|} \leqslant \frac{1}{1-\|U_0^{-1}\|\|U\|}. \tag{19}$$

其次

$$U_0^{-1}VW^{-1}=I_{\mathbf{X}},$$

由此

$$VW^{-1}=U_0,$$

因而

$$VW^{-1}U_0^{-1}=I_{\mathbf{Y}}.$$

另一方面

$$W^{-1}U_0^{-1}V=I_{\mathbf{X}}.$$

由上面最后二式可知算子$W^{-1}U_0^{-1}$是算子V的连续逆算子.

利用(19)及由等式$V^{-1}=W^{-1}U_0^{-1}$可得估计式

$$\|V^{-1}\| \leqslant \|W^{-1}\|\|U_0^{-1}\|$$

$$\leqslant \frac{\|U_0^{-1}\|}{1-\|U_0^{-1}U\|} \leqslant \frac{\|U_0^{-1}\|}{1-\|U_0^{-1}\|\|U\|}.$$

§5. 逐次逼近法

5.1. 我们研究方程

$$x-U(x)=y, \tag{1}$$

其中U是B-空间$\mathbf{X}$中的连续线性算子，y是空间$\mathbf{X}$中的给定元素，x是其中的未知元素.

所谓逐次逼近法是求方程(1)的解的一种常用的方法，其组成如下：任给一个元素$x_0\in\mathbf{X}$为初始逼近，由它出发构造近似解的序列$\{x_n\}$：

$$x_{n+1}=y+U(x_n) \qquad (n=0,1,\cdots). \tag{2}$$

如果这时得到收敛序列，其极限是所讨论方程的解，则称对于方程(1)以元素x_0为初始逼近的逐次逼近过程是收敛的（收敛于方

程(1)的解). 因为$U\in B(\mathbf{X},\mathbf{X})$,由序列$\{x_n\}$收敛推出, $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$是方程(1)的解. 为了证明这一点, 只要在关系式(2)中令$n\to\infty$取极限就够了.

方程(1)的逐次逼近过程的收敛问题与级数

$$I+U+\cdots+U^n+\cdots \tag{3}$$

的收敛有关,其和(在收敛时)为$(I-U)^{-1}$(见 Banach 定理 4.3 的注).

定理 1. 如果级数(3)收敛,则对于任意的初始逼近x_0, 方程(1)的逐次逼近过程收敛于方程(1)的唯一的解x^*, 并且有估计式

$$\|x^*-x_n\|\leqslant\|(I-U)^{-1}\|\|U^n\|\|x_1-x_0\| \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{4}$$

特别,如果满足 Banach 定理的条件,则这个估计式可以改为

$$\|x^*-x_n\|\leqslant\frac{q^n}{1-q}\|x_1-x_0\| \qquad (n=1,2,\cdots).$$

证. 相继应用公式(2)可以求得

$$x_n=y+U(y)+\cdots+U^{n-1}(y)+U^n(x_0) \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{5}$$

显然,如果级数(3)收敛,由于$U^n(x_0)\to\mathbf{0}$,则存在

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_n=\sum_{k=0}^{\infty}U^k(y)=(I-U)^{-1}(y).$$

因为x^*显然是方程(1)的解,所以定理的第一部分得证.

为了要得到估计式(4), 在等式(5)中用x^*代替x_0. 于是,由公式(2)显然有$x_n=x^*(n=1,2,\cdots)$. 由此可见, 我们得到关系式

$$x^*=y+U(y)+\cdots+U^{n-1}(y)+U^n(x^*) \qquad (n=1,2,\cdots).$$

上式减去(5)式后再取范数得

$$\|x^*-x_n\|\leqslant\|U^n\|\|x^*-x_0\| \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{6}$$

记$\tilde{x}=x^*-x_0$. 注意x^*是方程(1)的解, 所以$x^*-U(x^*)=y$, 我们有

$$(I-U)(\tilde{x})=\tilde{x}-U(\tilde{x})=x^*-U(x^*)-x_0+U(x_0)$$
$$=y+U(x_0)-x_0=x_1-x_0;$$

由此求得

$$\tilde{x}=(I-U)^{-1}(x_1-x_0).$$

把上式代入(6)式就得到所需的估计式.

5.2. 定理1有各种各样的应用,我们举其中几个.

首先，设**X**是m维空间. 这时线性算子$U\in B(\mathbf{X},\ \mathbf{X})$由方阵$A=(a_{jk})$所确定,方程(1)可以用展开式写成方程组的形式:

$$\xi_j-\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\xi_k=\eta_j \tag{7}$$

$$(j=1,2,\cdots,m;\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m);\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)).$$

根据公式

$$\xi_j^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\xi_k^{(n)}+\eta_j \qquad (j=1,2,\cdots,m,\ \ n=0,1,\cdots)$$

求出解的逐次逼近

$$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_m^{(n)}) \qquad (n=0,1,\cdots).$$

上节的条件(12)保证逐次逼近过程收敛于解，这个条件与**X**中范数的取法有关. 例如,如果$\mathbf{X}=\mathbf{l}_m^\infty$,因为在此情形(参见2.8)

$$\|U\|=\max_j\sum_{k=1}^{m}|a_{jk}|,$$

所以在条件

$$\sum_{k=1}^{m}|a_{jk}|<1 \qquad (j=1,2,\cdots,m) \tag{8}$$

下存在$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_j^{(n)}=\xi_j^*$ $(j=1,2,\cdots,m)$，并且$\xi_1=\xi_1^*$，$\xi_2=\xi_2^*$，$\cdots$，$\xi_m=\xi_m^*$是方程组(7)的(唯一的)解.

如果取 $\mathbf{X}=\mathbf{l}_m^1$, 则得另外的条件

$$\sum_{j=1}^{m}|a_{jk}|<1 \qquad (k=1, 2, \cdots, m). \tag{9}$$

最后, 取 $\mathbf{X}=\mathbf{l}_m^2$, 在此情形由于有估计式

$$\|U\|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|a_{jk}|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

条件变为

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}|a_{jk}|^2<1. \tag{10}$$

有趣的是, 如果矩阵 A 是对称阵且 $\mathbf{X}=\mathbf{l}_m^2$, 则对于逐次逼近过程的收敛性来说, 条件 $\|U\|<1$ 不仅是充分的, 而且也是必要的.

事实上, 如同在 2.8 中指出, 在此情形

$$\|U\|=|\lambda_1|,$$

其中 λ_1 是矩阵 A 的按绝对值最大的一个特征值. 在方程组(7)中取与 λ_1 相对应的特征向量作为 y, 并令 $x_0=\mathbf{0}$, 则得

$$x_1=y; \quad x_2=U(x_1)+y=(\lambda_1+1)y; \ \cdots;$$

$$x_{n+1}=U(x_n)+y=(\lambda_1^n+\cdots+\lambda_1+1)y \qquad (n=1, 2, \cdots),$$

由此推出, 如果 $|\lambda_1|\geqslant 1$ ($\eta_j\neq 0$), 则当 $n\to\infty$ 时序列 $\{\xi_j^{(n)}\}$ 没有极限.

这样, 当矩阵 A 是对称阵时, 逐次逼近过程收敛于解的充要条件为矩阵 A 的一切特征值的绝对值都小于 1.

在第八章中我们将证明更一般的结果, 从其中可以推出当矩阵 A 没有关于对称的假设时上述结论也成立, 请读者自行验证这个结论.

我们还要给出任意矩阵 A 的按模最大的特征值 λ_1 的估计. 用 $x_1\in\mathbf{X}$ 表示与特征值 λ_1 相对应的特征向量, 我们有 $U(x_1)=\lambda_1x_1$,

因而

$$|\lambda_1|\,\|x_1\|=\|U(x_1)\|\leqslant\|U\|\,\|x_1\|,$$

即$|\lambda_1|\leqslant\|U\|$. 如果以 $\mathbf{l}_m^\infty$ 作为空间 $\mathbf{X}$, 由此得

$$|\lambda_1|\leqslant\max_j\sum_{k=1}^m|a_{jk}|.$$

取 $\mathbf{X}=\mathbf{l}_m^1$, 则得估计式

$$|\lambda_1|\leqslant\max_k\sum_{j=1}^m|a_{jk}|.$$

最后, 如果 $\mathbf{X}=\mathbf{l}_m^2$, 则

$$|\lambda_1|\leqslant\|U\|\leqslant\left[\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m|a_{jk}|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

5.3. 下面来研究无限组*), 考虑方程组

$$\xi_j-\sum_{k=1}^\infty a_{jk}\xi_k=\eta_j\qquad(j=1,2,\cdots).\tag{11}$$

如果有这样的数列$\{\xi_j^*\}$, 当 $\xi_j=\xi_j^*$ 时(11)式左端的级数收敛, 且(11)的所有方程成为恒等式, 则称这个数列是方程组的解.

在研究数学物理方程边值问题和积分方程时遇到这类方程组**).

首先假设方程组(11)的无穷矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jk} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

---

*) 关于有限组的迭代解法, 参见 Фаддеев 和 Фаддеева 第三章.

**) 关于无限组, 参见 Канторович[4], 在 Канторович 和 Крылов 的书中有无限组的文献.

满足条件

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<1. \tag{12}$$

同时，如同在 3.1 中曾经指出，矩阵 A 定义了在空间 $\mathbf{l}^2$ 中的线性连续算子 U:

$$z=U(x),\quad \zeta_j=\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\xi_k$$

$$(j=1,2,\cdots;\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\ z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)).$$

条件(12)给出

$$\|U\|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2\right]^{\frac{1}{2}}<1,$$

所以，把方程组(11)写成形如(1)的一个方程:

$$x-U(x)=y\qquad (x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)).$$

根据定理 1，对于每一个 $y\in\mathbf{l}^2$ 存在唯一的(在空间 $\mathbf{l}^2$ 中)解 $x^*=\{\xi_k^*\}$，这个解可以由逐次逼近法得到:

$$\xi_j^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\xi_k^{(n)}+\eta_j\qquad (j=1,2\cdots;\ n=0,1,\cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^*-\xi_j^{(n)}|^2=0$$

($\{\xi_k^{(0)}\}$是 $\mathbf{l}^2$ 中任意的序列).

现在用更弱的条件

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<\infty \tag{13}$$

来代替条件(12)，虽然在此条件下矩阵 A 在 $\mathbf{l}^2$ 中确定了线性连续算子 U，但是一般来说，不等式$\|U\|<1$ 已不成立，从而不能应用定理 1.

我们指出，在条件(13)下研究方程组(11)归结为研究有限组（我们假设右端序列$\{\eta_j\}$是空间l^2的元素）.

可以找到这样的n_0，使得

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|a_{jk}|^2<1.$$

指定前n_0个未知数$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_0}$，并研究方程组

$$\xi_j-\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_{jk}\xi_k=\eta_j+\sum_{k=1}^{n_0}a_{jk}\xi_k \qquad (j=n_0+1,\ n_0+2,\cdots). \tag{14}$$

因为

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty}|a_{jk}\xi_k|^2=|\xi_k|^2\sum_{j=n_0+1}^{\infty}|a_{jk}|^2\leqslant|\xi_k|^2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}|a_{js}|^2<\infty \qquad (k=1,2,\cdots,n_0),$$

所以方程组(14)的右端序列属于l^2，由此根据上面的讨论，这方程组在l^2中有唯一的解$\tilde{\xi}_{n_0+1},\tilde{\xi}_{n_0+2},\cdots$，它与指定的值$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_0}$有关，我们来阐明这种相互关系的特征，为此考察方程组

$$\xi_j-\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_{jk}\xi_k=a_{js} \qquad (j=n_0+1,n_0+2,\cdots;\ s=1,2,\cdots,n_0)$$

及

$$\xi_j-\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_{jk}\xi_k=\eta_j \qquad (j=n_0+1,\ n_0+2,\cdots),$$

它们的解（已指出过解是唯一的）分别用$\{c_{ks}\}$与$\{\tilde{\eta}_k\}$ $(k=n_0+1,n_0+2,\cdots;\ s=1,2,\cdots,n_0)$表示，于是便有等式

$$c_{js}-\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_{kj}c_{ks}=a_{js}$$

$$(j=n_0+1,\ n_0+2,\cdots;\ s=1,2,\cdots,n_0), \tag{15}$$

$$\tilde{\eta}_j-\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_{jk}\tilde{\eta}_k=\eta_j \qquad (j=n_0+1,\ n_0+2,\cdots). \tag{16}$$

第一个等式乘以 ξ_s 后求和，再加上后一式得

$$(\tilde{\eta}_j+\sum_{s=1}^{n_0}c_{js}\xi_s)-\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_{jk}(\tilde{\eta}_k+\sum_{s=1}^{n_0}c_{ks}\xi_s)=\eta_j+\sum_{s=1}^{n_0}a_{js}\xi_s$$

$$(j=n_0+1,n_0+2,\cdots),$$

由此推得序列 $\{\tilde{\eta}_k+\sum_{s=1}^{n_0}c_{ks}\xi_s\}$ 是方程组(14)的解，又由于唯一性，故

$$\tilde{\xi}_k=\tilde{\eta}_k+\sum_{s=1}^{n_0}c_{ks}\xi_s \qquad (k=n_0+1,\ n_0+2,\cdots).$$

所得的结果可以简述如下：给定的方程组（11）等价于方程组

$$\begin{aligned}&\xi_j-\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\xi_k=\eta_j \qquad (j=1,2,\cdots,n_0),\\&\xi_j-\sum_{k=1}^{n_0}c_{jk}\xi_k=\tilde{\eta}_j \qquad (j=n_0+1,\ n_0+2,\cdots).\end{aligned} \tag{17}$$

把从第二组中得到的 $\xi_k(k>n_0)$ 代入第一组中得

$$\xi_j-\sum_{k=1}^{n_0}a_{jk}\xi_k-\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_{jk}(\tilde{\eta}_k+\sum_{s=1}^{n_0}c_{ks}\xi_s)=\eta_j$$
$$(j=1,2,\cdots,n_0), \tag{18}$$

或者，如果记（与(15)及(16)比较）

$$c_{jk}=a_{jk}+\sum_{s=n_0+1}^{\infty}a_{js}c_{sk}, \qquad \tilde{\eta}_j=\eta_j+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_{jk}\tilde{\eta}_k$$

$$(j,k=1,2,\cdots,n_0)^{*)},$$

则方程组(18)可以改写为

$$\xi_j-\sum_{k=1}^{n_0}c_{jk}\xi_k=\tilde{\eta}_j \qquad (j=1,2\cdots,n_0) \tag{19}$$

把这些方程合并入(17)中的第二组

$$\xi_j-\sum_{k=1}^{n_0}c_{jk}\xi_k=\tilde{\eta}_j \qquad (j=n_0+1,\ n_0+2,\cdots), \tag{20}$$

即得等价于给定方程组(11)的无限组.

解这样的方程组可以分两步来实现:第一,由有限组(19)求出前 n_0 个未知数,第二,把它们代入方程组(20),确定其余未知数的值.

因为当第一步实现后第二步总是可以实现的,所以解无限组(11)的问题就归结为解有限组(19).

利用这个事实可以指出,在条件(13)下方程组(11)具有有限组的所有性质.因为在第八章中我们将另外从一般的考虑来推导这些结果,这里只指出一个性质:如果对应于(11)的齐次方程组(即在(11)式中令 $\eta_1=\eta_2=\cdots=0$ 后得出的方程组)在 l^2 中有唯一解(显然是零解),则对于任意的右端序列$\{\eta_j\}$,方程组(11)有唯一解.

事实上,如果方程组(11)是齐次的,则方程组(19)也是齐次的 又因为对于有限组上述命题成立,所以对于任意的右端序列$\{\eta_j\}$非齐次方程组(19)有唯一解.

我们留给读者验证,齐次方程组(11)具有有限多个线性独立

---

*) 因为级数 $\sum\limits_{s=n_0+1}^{\infty}|a_{js}|^2$, $\sum\limits_{s=n_0+1}^{\infty}|c_{sk}|^2$ 及 $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty}|\tilde{\eta}_k|^2$ 收敛,所以右端的两个级数也收敛.

的解，还可以推出，当这个解的个数大于零时非齐次方程组是可解的.

5.4. 现在假设矩阵 A 满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|\leqslant 1-\rho \qquad (j=1,2,\cdots), \tag{21}$$

其中 $\rho>0$.

满足这个条件的方程组(11)叫做完全正则的.

在空间 $\mathbf{l}^{\infty}$ 中引进算子 U:

$$z=U(x),$$

$$\zeta_j=\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\xi_k \ \ (j=1,2,\cdots;\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots);\ z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)).$$

由于(21),

$$|\zeta_j|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}||\xi_k|\leqslant\|x\|\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|\leqslant(1-\rho)\|x\| \qquad (j=1,2,\cdots), \tag{22}$$

所以对于任何 $x\in\mathbf{l}^{\infty}$, $z=U(x)$有意义且是空间 $\mathbf{l}^{\infty}$的元素. 同时,

$$\|z\|=\|U(x)\|\leqslant(1-\rho)\|x\|.$$

因为U显然是线性算子,故U是 $\mathbf{l}^{\infty}$ 中的线性连续算子,并且

$$\|U\|\leqslant 1-\rho. \tag{23}$$

如同在5.3中那样,现在可以把方程组(11)写为形如(1)的一个方程:

$$x-U(x)=y \quad (x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)). \tag{24}$$

不等式(23)保证了可以把定理1用于方程(24),根据这个定理,对于任何 $y\in\mathbf{l}^{\infty}$,此方程(在空间 $\mathbf{l}^{\infty}$ 中)有唯一的解,这个解可以用逐次逼近法求得.

由此可见,对于任意的有界的右端序列$\{\eta_j\}$,完全正则方程组

有唯一的有界解.

注. 上述命题保证完全正则方程组有唯一的有界解. 同时并不排除方程组还存在无界解, 例如, 方程组

$$\xi_j-\frac{1}{j+1}\xi_{j+1}=0 \qquad (j=1,2,\cdots)$$

有无限多个解

$$\xi_1=a,\quad \xi_2=2a,\ \cdots\ ,\xi_k=k!\,a,\ \cdots,$$

其中 a 是任意常数, 然而, 如果 $a\neq 0$, 所有这些解是无界的.

对于在 5.3 中讨论的方程组也有类似的注解.

如果对于所研究的方程组. 存在这样的 n_0 和 M, 使得

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|a_{jk}|\leqslant 1-\rho,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|\leqslant M\end{array}\right. \qquad (j=1,2,\cdots,\ \ \rho>0),$$

则在 5.3 中对于满足条件(13)的方程组所得的一切结果, 不用作任何本质的改变也可以搬到这种方程组上.

5.5. 研究积分方程

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)dt=y(s),$$

假设核 $K(s,t)$ 连续.

引进空间 $\mathbf{C}[a,b]$ 或空间 $\mathbf{L}^2(a,\ b)$ 中的积分算子 U(参见 2.4 或 2.6), 我们可以把积分方程改写为

$$x-\lambda U(x)=y. \tag{25}$$

如果

$$|\lambda|<\frac{1}{\|U\|}, \tag{26}$$

则根据定理 4.3 算子 $I-\lambda U$ 具有连续的逆算子

$$(I-\lambda U)^{-1}=I+\lambda U+\lambda^2U^2+\cdots+\lambda^nU^n+\cdots,$$

因此，方程(25)的唯一解 x^* 的形式为

$$x^* = (I-\lambda U)^{-1}(y)$$
$$= y + \lambda U(y) + \lambda^2 U^2(y) + \cdots + \lambda^n U^n(y) + \cdots \qquad (27)$$

这个级数叫做 Neumann 级数.

我们来证明算子 U^n 与 U 一样也是积分算子. 事实上，$v = U^2(x)$ 表示 $v = U(z)$，其中 $z = U(x)$，即

$$v(s) = \int_a^b K(s,t)z(t)dt,$$
$$z(t) = \int_a^b K(t,u)x(u)du.$$

由此

$$v(s) = \int_a^b K(s,t)\left[\int_a^b K(t,u)x(u)du\right]dt$$
$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(s,t)K(t,u)dt\right]x(u)du$$
$$= \int_a^b K_2(s,u)x(u)du$$
$$\left(K_2(s,u) = \int_a^b K(s,t)K(t,u)dt\right).$$

按归纳法可以证明，$v = U^n(x)$ 表示

$$v(s) = \int_a^b K_n(s,u)x(u)du \qquad (n=2,3,\cdots),$$

其中 $K_n(s,u)$ 由递推公式:

$$K_n(s,u) = \int_a^b K_{n-1}(s,t)K(t,u)dt \qquad (n=2,3,\cdots),$$

确定，展开后得

$$K_n(s,u)$$
$$= \int_a^b \cdots \int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-1},u)dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1}.$$

函数 $K_n(s,u)$ 叫做重核或叠核.

现在 Neumann 级数可以写成展开了的形式:

$$x^*(s)=y(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt$$
$$+\lambda^2\int_a^b K_2(s,t)\,y(t)dt+\cdots+\lambda^n\int_a^b K_n(s,t)y(t)dt+\cdots.$$

这个级数的收敛性态与我们在什么空间内研究算子 U 有关.

如果把$\|U\|$的表示式代入(26)式,即得 Neumann 级数的收敛条件. 例如,研究空间 $\mathbf{C}[a,b]$,则(参见 2.4)

$$\|U\|=\max_s\int_a^b |K(s,t)|\,dt\leqslant M(b-a)$$
$$(M=\max_{s,t}|K(s,t)|),$$

条件(26)写为

$$|\lambda|<\frac{1}{\max_s\int_a^b |K(s,t)|\,dt},$$

或更简单些

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}.$$

在 $\mathbf{L}^2(a,b)$ 中有估计式(参见 2.6)

$$\|U\|\leqslant\left[\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

因此,在 $\mathbf{L}^2$ 中 Neumann 级数收敛的充分条件为

$$|\lambda|<\frac{1}{\left[\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

如果核 $K(s,t)$是对称的,则在 2.6 中已指出有精确等式

$$\|U\|=\frac{1}{|\lambda_1|},$$

其中 λ_1 是核 $K(s,t)$按绝对值最小的特征值. 所以,在对称核情形当

$$|\lambda|<|\lambda_1|$$

时 Neumann 级数(仍在 $\mathbf{L}^2$ 中)收敛.

正如在 5.2 中对有限组的情形一样,可以验证,当$|\lambda|\geqslant|\lambda_1|$时 Neumann 级数对于任何 $y\in\mathbf{L}^2$都不收敛. 因而,在此情形条件(26)对于 Neumann 级数的收敛性不仅是充分的而且是必要的.

利用不等式$|\lambda_1|\geqslant\frac{1}{\|U\|}$,用类似的方法得到核的按模最小特征值的估计(自下):

$$|\lambda_1|\geqslant\frac{1}{\max\int_a^b|K(s,\ t)|\,dt}\geqslant\frac{1}{M(b-a)},$$

$$|\lambda_1|\geqslant\frac{1}{\left[\int_a^b\int_a^b|K(s,\ t)|^2 ds\,dt\right]^{\frac{1}{2}}}$$

最后指出,由 Banach 定理的注(4.5)得知,当对于某个 $n=1$, 2,…有

$$|\lambda|<\frac{1}{\sqrt[n]{\|U^n\|}}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

时,即(在空间 $\mathbf{C}[a,b]$中)

$$|\lambda|<\frac{1}{\left[\max_s\int_a^b|K_n(s,\ t)|\,dt\right]^{1/n}},$$

或(在空间 $\mathbf{L}^2(a,b)$中)

$$|\lambda|<\frac{1}{\left[\int_a^b\int_a^b|K_n(s,t)|^2 ds\,dt\right]^{1/2n}},$$

则 Neumann 级数收敛.

§6. Hilbert 空间中的算子环

6.1. 我们较详细地研究 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的线性算子环

$B(\mathbf{H},\mathbf{H})$. 首先讨论算子取共轭与环中代数运算之间的关系. 这时,下列命题成立:

a) $[U_1+U_2]^*=U_1^*+U_2^*$. (1)

事实上,对于任意的 $x,y\in\mathbf{H}$,下列关系式成立:

$$([U_1+U_2]x,y)=(x,[U_1+U_2]^*y),$$

$$(U_1x,y)=(x,U_1^*y),$$

$$(U_2x,y)=(x,U_2^*y),$$

第二、第三式相加后得

$$([U_1+U_2]x,y)=(x,U_1^*y+U_2^*y)$$
$$=(x,[U_1^*+U_2^*]y).$$

故由于 x 的任意性,

$$[U_1+U_2]^*y=[U_1^*+U_2^*]y,$$

从而(1)式成立.

b) $[\lambda U]^*=\bar{\lambda}U^*$. (2)

我们有

$$([\lambda U]x,y)=(x,[\lambda U]^*y)\qquad(x,y\in\mathbf{H}),\tag{3}$$

但是 $[\lambda U]x=\lambda Ux$,所以

$$([\lambda U]x,y)=\lambda(Ux,y)=\lambda(x,U^*y)=(x,[\bar{\lambda}U^*]y).$$

把它与(3)式比较即得(2)式.

c) $[U_1U_2]^*=U_2^*U_1^*$. (4)

事实上,

$$([U_1U_2]x,y)=(x,[U_1U_2]^*y)\qquad(x,y\in\mathbf{H}).$$

另一方面,

$$([U_1U_2]x,y)=(U_1(U_2x),y)=(U_2x,U_1^*y)$$
$$=(x,U_2^*(U_1^*y))=(x,[U_2^*U_1^*]y).$$

与上面一样讨论,得到(4).

d) 如果算子 U 具有线性逆 U^{-1}, 则共轭算子 U^* 也有线性

逆*)，并且

$$(U^*)^{-1}=(U^{-1})^*. \tag{5}$$

事实上 因为$U^{-1}U=UU^{-1}=I$，所以根据 c)

$$U^*(U^{-1})^*=(U^{-1})^*U^*=I^*=I,$$

由此推得命题成立.

当算子 U_1 和 U_2 是自共轭算子时，由命题 a)—c) 推出下列结果:

e) 如果 λ, μ 是实数，则算子 $\lambda U_1+\mu U_2$ 是自共轭的.

f) 乘积 U_1U_2 是自共轭算子的充要条件为 $U_1U_2=U_2U_1$，即 U_1 与 U_2 可交换.

事实上，因为 U_1 与 U_2 是自共轭算子，根据 c)，

$$[U_1U_2]^*=U_2U_1,$$

由此推得所要的结果.

设有算子序列$\{U_n\}$及算子 U. 如果对于任何 $x, y\in\mathbf{H}$,

$$\lim_{n\to\infty}(U_nx, y)=(Ux, y),$$

则称序列$\{U_n\}$弱收敛于 U. 显然，自共轭算子序列的弱收敛极限也是自共轭算子.

同样，如果对于任意的 $x\in\mathbf{H}$, $U_nx\to Ux$ (这时称算子序列$\{U_n\}$在 $\mathbf{H}$ 上收敛于算子 U) 且 U_n 是自共轭算子，则 U 也是自共轭的.

最后，如果在空间 $B(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ 中 $U_n\to U$，则算子 U_n 的自共轭性也蕴涵算子 U 的自共轭算性.

后两个结果显然成立，因为在两种情况下序列$\{U_n\}$都弱收敛于算子 U.

6.2. 设 U 是 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的算子，如果对于任何 $x\in\mathbf{H}$

---

*) 在 Hilbert 空间中"线性算子"一词表示线性连续算子(参见 3.1 中脚注).

$$(Ux, x) \geqslant 0,$$

则称 U 是正算子，记为 $U \geqslant \mathbf{0}$.

不难验证，正算子是自共轭的．事实上，设对于任何 $x \in \mathbf{H}$，(Ux, x) 是实的．因为

$$(Ux,y) = \frac{1}{4}\{[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] + i[(U(x+yi), x+yi) - (U(x-yi), x-yi)]\},$$

且括号中的表示式是实的，所以交换 x 与 y 的位置有

$$\begin{aligned}(Uy, x) &= \frac{1}{4}\{[(U(y+x), y+x) - (U(y-x), y-x)] \\ &\quad + i[(U(y+xi), y+xi) - (U(y-xi), y-xi)]\} \\ &= \frac{1}{4}\{[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] \\ &\quad - i[(U(x+yi), x+yi) - (U(x-yi), x-yi)]\} \\ &= \overline{(Ux, y)}.\end{aligned}$$

由此得到

$$(Ux, y) = \overline{(Uy, x)} = (x, Uy),$$

这就是所要证明的.

注．其实我们已证明，对于任何 $x \in \mathbf{H}$ 表示式 (Ux, x) 是实数的算子 U 是自共轭的．不难看出，这个条件对于 U 成为自共轭算子也是必要的.

如果差 $U_1 - U_2$ 是正算子，则称算子 U_1 大于算子 U_2 $(U_1 \geqslant U_2)$.

我们指出，对于任意的算子 U，算子 U^*U（或 UU^*）是正的．事实上，

$$(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) \geqslant 0.$$

特别，如果 $U^* = U$，即如果 U 是自共轭的，则 $U^2 \geqslant \mathbf{0}$.

同样显然，正算子的和也是正算子.

还要指出，正算子的非负实系数的线性组合仍然是正算子.

其次，正算子U的任意次幂U^n是正算子．事实上，如果$n=2m$是偶数*)，则

$$(U^n x, x)=(U^m x, U^m x)=\|U^m x\|^2\geqslant 0 \qquad (x\in\mathbf{H}).$$

如果$n=2m+1$是奇数，则

$$(U^n x, x)=(U(U^m x), U^m x)=(Uy, y)\geqslant 0$$

$$(x\in\mathbf{H}, y=U^m x).$$

由此推出，正算子任意次幂的非负系数的线性组合，即形式为

$$\varphi(U)=a_0U^n+a_1U^{n-1}+\cdots+a_nI \qquad (a_0, a_1, \cdots, a_n\geqslant 0)$$

的算子也是正算子．算子$\varphi(U)$叫做U的算子多项式．

设U是正算子，则下列不等式成立：

$$|(Ux, y)|^2\leqslant(Ux, x)(Uy, y) \qquad (x, y\in\mathbf{H}). \tag{6}$$

它是 Буняковский 不等式的推广（如果在(6)式中取$U=I$就得到 Буняковский 不等式）．不等式(6)的证明几乎逐字逐句重复在 IV.5.1 中对 Буняковский 不等式的证明，因而我们把它留给读者．

6.3. 根据不等式(6)，我们来证明“单调序列极限定理”．

定理 1. 设有一个递增的自共轭算子序列$\{U_n\}$，那么，如果$\sup\limits_n\|U_n\|=A<\infty$，则存在线性算子$U$，使得对于任何$x\in\mathbf{H}$

$$Ux=\lim_{n\to\infty}U_n x,$$

并且

$$\|U\|\leqslant A. \tag{7}$$

---

*) 如果$n=0$，因而$U^n=I$，则命题显然也成立。

证. 取 $m \geqslant n$. 算子 $U_m - U_n$ 是正的，因此对于任何 $x \in \mathbf{H}$

$$(U_m x, x) - (U_n x, x) = ([U_m - U_n]x, x) \geqslant 0,$$

即数列$\{(U_n x, x)\}$递增. 因为

$$|(U_n x, x)| \leqslant \|U_n x\| \|x\| \leqslant A\|x\|^2, \tag{8}$$

所以存在有限的极限 $\lim\limits_{n \to \infty}(U_n x, x)$.

其次，把不等式(6)用于算子 $U_m - U_n$ $(m \geqslant n)$，由(8)可得

$$\begin{aligned} &|(U_m x - U_n x, y)|^2 \\ &\quad \leqslant [(U_m x, x) - (U_n x, x)][(U_m y, y) - (U_n y, y)] \\ &\quad \leqslant 2A\|y\|^2[(U_m x, x) - (U_n x, x)]. \end{aligned}$$

在上式中令

$$y = U_m x - U_n x$$

即得关系式

$$\|U_m x - U_n x\|^2 \leqslant 2A[(U_m x, x) - (U_n x, x)] \qquad (x \in \mathbf{H}).$$

按前面所证可知上式右端当 $m, n \to \infty$时趋于 0, 因而存在

$$Ux = \lim_{n \to \infty} U_n x.$$

这样定义的算子U是可加的和齐次的. 而由于

$$\|U_n x\| \leqslant \|U_n\| \|x\| \leqslant A\|x\|,$$

则在极限情形

$$\|Ux\| \leqslant A\|x\|,$$

即U是有界算子且$\|U\| \leqslant A$.

定理证毕.

注. 这个定理对于递减算子序列也成立.

6.4. 设U是正算子，如果有个正算子V使 $V^2 = U$，则称V是算子U的平方根. 并且记 $V = \sqrt{U}$ 或 $V = U^{\frac{1}{2}}$.

定理 2. 设U是正算子. 则存在算子U的唯一的平方根 $V = \sqrt{U}$. 同时，V与任何和U可交换的算子可交换.

证. 不失一般性，可以认为$\|U\|\leqslant 1$. 令$U_0=I-U$. 因为

$$(U_0x,x)=(x,x)-(Ux,x)$$
$$\geqslant\|x\|^2-\|U\|\|x\|^2\geqslant 0\qquad(x\in\mathbf{H}),$$

所以算子U_0是正的. 由(6)式有

$$|(U_0x,y)|^2\leqslant(U_0x,x)(U_0y,y)\leqslant\|x\|^2\|y\|^2.$$

取$y=U_0x$, 即得不等式

$$\|U_0x\|\leqslant\|x\|.$$

因此

$$\|U_0\|\leqslant 1. \tag{9}$$

我们来定义算子序列$\{V_n\}$, 令

$$V_1=\mathbf{0},\quad V_{n+1}=\frac{1}{2}(U_0+V_n^2)\qquad(n=1,2,\cdots). \tag{10}$$

由(9)式不难用归纳法验证

$$\|V_n\|\leqslant 1\qquad(n=1,2,\cdots). \tag{11}$$

现在来证明，算子V_n和$V_{n+1}-V_n$是U_0的具有非负系数的算子多项式. 对于$n=1$这是显然的. 其次，因为算子多项式的运算法则与一般多项式运算法则一样，由公式(10)推出，如果V_n是U_0的具有非负系数的算子多项式，则V_{n+1}也是这样的多项式. 再利用公式(10)写下

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{2}(U_0+V_n^2)-\frac{1}{2}(U_0+V_{n-1}^2)$$
$$=\frac{1}{2}(V_n^2-V_{n-1}^2)=\frac{1}{2}(V_n+V_{n-1})(V_n-V_{n-1}),$$

则假设已证V_n-V_{n-1}是具有非负系数的算子多项式，又考虑已经证明V_n+V_{n-1}也是这样的多项式，我们推得算子$V_{n+1}-V_n$作为U_0的具有非负系数的算子多项式的乘积，本身也是U_0的具有非负系数的算子多项式.

由于具有非负系数的算子多项式是正算子（见 6.2），可以推

知 $V_n \geqslant 0$ 与 $V_{n+1}-V_n \geqslant 0$. 换句话说，序列$\{V_n\}$递增，并且 V_n 因为是正的，它也是自共轭的. 因为由(11)式序列$\{V_n\}$有界，所以根据定理 1 存在算子 V_0 使得

$$V_0 x = \lim_{n\to\infty} V_n x.$$

同时，由于 V_n 是正算子，V_0 也是正的. 而由(11)式得

$$\|V_0\| \leqslant 1. \tag{12}$$

设算子 $\bar{U}$ 与算子 U 可交换，从而与 U_0 可交换. 显然算子 V_n 也与 $\bar{U}$ 可交换，于是

$$\begin{aligned}\bar{U}V_0 x &= \bar{U}(\lim_{n\to\infty} V_n x) = \lim_{n\to\infty} \bar{U}V_n x \\ &= \lim_{n\to\infty} V_n \bar{U} x = V_0 \bar{U} x \qquad (x\in \mathbf{H}).\end{aligned}$$

即 V_0 与 $\bar{U}$ 可交换. 特别，V_0 与 V_n 中任一个可交换. 由此 $V_0^2 - V_n^2 = (V_0+V_n)(V_0-V_n)$，所以

$$\begin{aligned}\|V_0^2 x - V_n^2 x\| &\leqslant \|V_0+V_n\| \|V_0 x - V_n x\| \\ &\leqslant 2\|V_0 x - V_n x\| \to 0 \qquad (x\in \mathbf{H}),\end{aligned}$$

从而

$$V_0^2 x = \lim_{n\to\infty} V_n^2 x \qquad (x\in \mathbf{H}).$$

对关系式

$$V_{n+1} x = \frac{1}{2}(U_0 x + V_n^2 x) \qquad (n=1, 2, \cdots;\ x\in \mathbf{H})$$

在 $n\to\infty$时取极限后得

$$V_0 x = \frac{1}{2}(U_0 x + V_0^2 x) \qquad (x\in \mathbf{H}).$$

因而，令 $V = I - V_0$，则有

$$\begin{aligned}V^2 &= I - 2V_0 + V_0^2 = [I-2V_0] + [2V_0 - U_0] \\ &= I - U_0 = U.\end{aligned}$$

利用(12)式，与证明算子 U_0 是正算子时一样可以证明算子 V 也是

正的．由此可见 $V=\sqrt{U}$．

还要指出，V 与 V_0 一样，它与任一个和 U 可交换的算子可交换．

现在来证明平方根的唯一性．设 V' 是 U 的平方根，因为

$$UV'=V'^3=V'U,$$

所以 V' 与 U 可交换，从而 V 也与 V' 可交换．任取 $x\in\mathbf{H}$ 并记 $y=V'x-Vx$．我们有

$$\begin{aligned}(V'y, y)+(Vy, y)&=([V'+V][V'-V]x, y)\\&=([V'^2-V^2]x, y)\\&=([U-U]x, y)=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

于是，由于 $(Vy, y)\geqslant 0$ 和 $(V'y, y)\geqslant 0$，得

$$(Vy, y)=(V'y, y)=0.$$

用 W 表示 V 的任何一个平方根．因为

$$\|Wy\|^2=(Wy, Wy)=(W^2y, y)=(Vy, y)=0,$$

所以 $Wy=\mathbf{0}$，从而更有 $Vy=W(Wy)=\mathbf{0}$．类似地 $V'y=\mathbf{0}$．但这时

$$\begin{aligned}\|V'x-Vx\|^2&=([V'-V]^2x, x)\\&=([V'-V]y, x)=0,\end{aligned}$$

于是，对于任何 $x\in\mathbf{H}$，$V'x=Vx$．因而 $V'=V$．

定理证毕*)．

推论．如果 U_1 与 U_2 是彼此可交换的正算子，则它们的乘积也是正算子．

事实上，算子 $\sqrt{U_2}=V$ 与 U_1 可交换，　因此

$$(U_1U_2x, x)=(U_1V^2x, x)=(VU_1Vx, x)=(U_1(Vx), Vx)\geqslant 0\quad(x\in\mathbf{H}).$$

6.5. 当 U 是自共轭算子时，关于级数

*) 这个证明属于 Visser（存在性）和 Sz.-Nagy（唯一性）．参见 F. Riesz 与 Sz.-Nagy．

$$I+U+\cdots+U^n+\cdots \tag{13}$$

收敛区域的定理 V. 4. 1 可以简化.

定理 3. 如果U是自共轭算子, 则级数 (13) 收敛的充要条件为$\|U\|<1$.

证. 先证

$$\|U^2\|=\|U\|^2. \tag{14}$$

事实上,

$$\|U\|^2=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ux\|^2}{\|x\|^2}=\sup_{x\neq 0}\frac{(U^2x,x)}{\|x\|^2}$$

$$\leqslant\sup_{x\neq 0}\frac{\|U^2x\|}{\|x\|}=\|U^2\|,$$

且相反的不等式 $\|U^2\|\leqslant\|U\|^2$ 对于任何算子U都成立.

从(14)推出

$$\|U^{2^m}\|=\|U\|^{2^m} \qquad (m=1,2,\cdots) \tag{15}$$

及

$$c_U=\lim_{n\to\infty}\|U^n\|^{1/n}=\lim_{m\to\infty}\|U^{2^m}\|^{1/2^m}=\|U\|. \tag{16}$$

考虑到定理 4. 1 的结果和关系式(16), 只要验证, 如果 $c_U=\|U\|=1$, 则级数(13)发散. 但在此情形根据(15)

$$\|U^{2^m}\|=1 \qquad (m=1,2,\cdots),$$

于是级数(13)的一般项不趋于零.

6.6. 在 Hilbert 空间中的算子赋范环 $B(\mathrm{H},\mathrm{H})$里, 投影算子(3. 4)族起着重要的作用. 在第九章 §5 中将证明, 任何自共轭算子可以利用特殊的结构归结为投影算子. 这个情况说明了下面导出的关于投影算子定理的重要性.

设 P_1 和 P_2 是两个算子, 如果 $P_1P_2=0$*) , 则称它们是正交

*) 因为0是自共轭算子, 所以由 6. 1 中的 f), 算子 P_1 与 P_2 是可交换的, 从而 $P_1P_2=P_2P_1=0$, 于是这个定义与所提到的投影算子的次序无关.

的. 用 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 分别表示投影算子 P_1 和 P_2 对应的投影子空间. 投影算子 P_1 和 P_2 相互正交的充要条件为子空间 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 相互正交. 事实上, 设 $P_1P_2=\mathbf{0}$, $x'\in\mathbf{H}_1$, $x''\in\mathbf{H}_2$, 利用 3.4 中的性质 b) 及定理 3.2 可知

$$(x', x'')=(P_1x', P_2x'')=(x', P_1P_2x'')=0.$$

反之, 如果 $\mathbf{H}_1\perp\mathbf{H}_2$ 及 $x\in\mathbf{H}$, 则 $P_2x\in\mathbf{H}_2$, 因而 $P_2x\perp\mathbf{H}_1$, 这时, 由 3.4 中性质 c) $P_1P_2x=\mathbf{0}$, 即 $P_1P_2=\mathbf{0}$.

定理 4. 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是投影算子, 则算子 $P=P_1+P_2+\cdots+P_n$ 是投影算子的充要条件为算子 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 两两正交.

证. 必要性. 设 P 是投影算子. 根据定理 3.2

$$\|Px\|^2=(Px, Px)=(P^2x, x)=(Px, x) \qquad (x\in\mathbf{H}). \tag{17}$$

类似地

$$\|P_kx\|^2=(P_kx, x) \qquad (x\in\mathbf{H};\ k=1, 2, \cdots, n).$$

因而

$$\begin{aligned}\|P_1x\|^2+\|P_2x\|^2 &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\|P_kx\|^2=\sum_{k=1}^{n}(P_kx, x)=(Px, x)\\ &=\|Px\|^2\leqslant\|x\|^2 \qquad (x\in\mathbf{H}).\end{aligned} \tag{18}$$

考察任意的元素 $y\in\mathbf{H}$. 且在(18)中令 $x=P_1y$. 因为 $P_1x=P_1^2y=P_1y$, 故

$$\|P_1y\|^2+\|P_2P_1y\|^2\leqslant\|P_1y\|^2.$$

由此推出 $P_2P_1y=\mathbf{0}$ 从而 $P_2P_1=\mathbf{0}$, 即投影算子 P_1 与 P_2 正交. 同样可证其他的投影算子两两正交.

充分性. 我们来验证算子 $P=P_1+P_2+\cdots+P_n$ 满足定理 3.2 的条件, 从而是投影算子. 因为 P 是自共轭算子的和, 它也是自共轭算子(6.1 中 d)). 余下要证明 $P^2=P$. 由于 $P_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 是两两正交的投影算子, 即

$$P_jP_k=\begin{cases}0 & (j\neq k)\\ P_k & (j=k)\end{cases}\qquad (j, k=1, 2\cdots, n),$$

我们有

$$P^2=\left(\sum_{k=1}^{n}P_k\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}P_jP_k=\sum_{k=1}^{n}P_k=P,$$

定理证毕.

假设定理的条件满足，我们来讨论投影算子 $P=P_1+P_2+\cdots+P_n$ 投影其上的子空间 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 的结构. 用 $\mathbf{H}_k$ 表示对应于投影算子 $P_k(k=1, 2, \cdots, n)$的子空间. 设 $x\in\widetilde{\mathbf{H}}$, 则

$$x=Px=P_1x+P_2x+\cdots+P_nx=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_k=P_kx\in\mathbf{H}_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$.

反之, 设 x 是可以表为下列形式的元素:

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n\qquad (x_k\in\mathbf{H}_k;\ k=1, 2, \cdots, n).\qquad (19)$$

因为 $PP_k=\sum_{j=1}^{n}P_jP_k=P_k$ 及 $x_k=P_kx_k=PP_kx_k$, 所以

$$Px=\sum_{k=1}^{n}Px_k=\sum_{k=1}^{n}PP_kx_k=\sum_{k=1}^{n}x_k=x,$$

即 $x\in\widetilde{\mathbf{H}}$. 由于 $P_kx_j=0$ $(j\neq k)$.

$$x_k=\sum_{j=1}^{n}P_kx_j=P_k\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)=P_kx\qquad (k=1, 2\cdots, n),$$

特别, 由此推出 x 的表示式(19)的唯一性.

归纳起来可以说, 子空间 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 由用公式(19)表示的元素 x 组成. 我们称 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 为子空间 $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \cdots, \mathbf{H}_n$ 的正交和, 并记为

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{H}_2\oplus\cdots\oplus\mathbf{H}_n=\oplus\sum_{k=1}^{n}\mathbf{H}_k.$$

6.7. 现在来研究投影算子的差与乘积.

先来证明下列引理.

引理1. 设 P_1 与 P_2 分别是投影到子空间 $\mathbf{H}_1$ 与 $\mathbf{H}_2$ 上的投影算子,则下列四个条件等价:

a) $P_1 \geqslant P_2$;　　b) $\mathbf{H}_1 \supset \mathbf{H}_2$;　　c) $P_1 P_2 = P_2$;

d) $P_2 P_1 = P_2$.

证. 由 a)推出 b). 事实上, 设 $x \in \mathbf{H}$. 因为 $P_1 x \perp x - P_1 x$, 所以

$$\|x\|^2 = \|P_1 x\|^2 + \|x - P_1 x\|^2. \tag{20}$$

如果 $x \in \mathbf{H}_2$, 则 $P_2 x = x$, 于是 $(P_2 x, x) = (x, x) = \|x\|^2$. 更有

$$\|x\|^2 \geqslant \|P_1 x\|^2 = (P_1 x, P_1 x) = (P_1 x, x) \geqslant (P_2 x, x) = \|x\|^2,$$

因此, 由(20)得到 $x = P_1 x$, 即 $x \in \mathbf{H}_1$.

由 b) 推出 c). 设$x \in \mathbf{H}$. 由于 $P_2 x \in \mathbf{H}_2$, 因而 $P_2 x \in \mathbf{H}_1$, 故

$$P_1 P_2 x = P_2 x.$$

由 c)推出 d). 因为自共轭算子 P_1 与 P_2 的乘积是投影算子, 从而就是自共轭算子, 所以 P_1 与 P_2 可交换:

$$P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_2.$$

由 d)推出 *a*). 事实上, 对于 $x \in \mathbf{H}$,

$$(P_2 x, x) = \|P_2 x\|^2 = \|P_2 P_1 x\|^2 \leqslant \|P_1 x\|^2 = (P_1 x, x).$$

定理5. 设 P_1 与 P_2 是投影算子, 则 $P = P_1 - P_2$ 是投影算子的充要条件为 $P_1 \geqslant P_2$.

证. 必要性. 设 P 是投影算子. 因为 $P_1 = P + P_2$, 所以根据前面的定理 $PP_2 = 0$, 即 $(P_1 - P_2) P_2 = P_1 P_2 - P_2 = 0$. 从而满足引理中的性质 c).

充分性. 显然, P 是自共轭算子. 其次根据引理中的 c) 与 d),

$$P^2=P_1^2-P_1P_2-P_2P_1+P_2^2=P_1-P_2-P_2+P_2=P;$$

再利用定理 3.2 即得证明.

用$\widetilde{\mathbf{H}}$表示投影算子 P 投影其上的子空间. 请读者自行证明, $\widetilde{\mathbf{H}}$由所有与子空间 $\mathbf{H}_2$ 正交的元素 $x\in\mathbf{H}_1$ 构成. 子空间$\widetilde{\mathbf{H}}$叫做子空间 $\mathbf{H}_2$ 在子空间 $\mathbf{H}_1$ 中的正交补, 并记为$\widetilde{\mathbf{H}}=\mathbf{H}_1\ominus\mathbf{H}_2$.

注. 如果 $P_1=I$, 则定理的条件显然对任意的 P_2 成立. 因此, 对于任意的投影算子 P_2, $P=I-P_2$ 是投影算子. 同时 P 把 $\mathbf{H}$ 投影到子空间 $\mathbf{H}_2$ 的正交补 $\mathbf{H}\ominus\mathbf{H}_2$ 上.

下面来证明关于投影算子乘积的定理.

定理 6. 设 P_1 与 P_2 是投影算子. 则算子 $P=P_1P_2$ 是投影算子的充要条件为 P_1 与 P_2 可交换.

证. 必要条件由于 P 是自共轭算子已经证明.

验证条件的充分性仍利用定理 3.2, 由于 P 是自共轭算子, 且

$$P^2=P_1P_2P_1P_2=P_1^2P_2^2=P.$$

请读者自行验证, 在此情况投影算子 P 投影其上的子空间是子空间 $\mathbf{H}_1$ 与 $\mathbf{H}_2$ 的交.

6.8. 把定理 1 应用于递增(或递减)投影算子序列, 引出下列重要事实.

定理 7. 设 $\{P_n\}$ 是单调投影算子序列, 则对于任意的 $x\in\mathbf{H}$ 存在

$$Px=\lim_{n\to\infty}P_nx, \tag{21}$$

并且 P 是在子空间$\widetilde{\mathbf{H}}$上的投影算子. 这时, 如果序列 $\{P_n\}$ 递增, 则

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{H}_n},$$

如果序列$\{P_n\}$递减，则

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathbf{H}_n,$$

其中 $\mathbf{H}_n$ 表示对应于投影算子 $P_n(n=1,2,\cdots)$的子空间.

证. 设$\{P_n\}$是递增序列. 因为$\|P_n\|\leqslant 1(n=1,2,\cdots)$, 由定理 1 推出极限(21)的存在性. 下面来证明P是$\widetilde{\mathbf{H}}$上的投影算子. 为此只要验证，如果 $x\in\widetilde{\mathbf{H}}$，则 $Px=x$，而如果 $x\perp\widetilde{\mathbf{H}}$，则 $Px=\mathbf{0}$. 记 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{H}_n$,并 取 $x\in\Omega$. 我 们 可以找到m使得当 $n\geqslant m$ 时 $x\in\mathbf{H}_n$. 这 表示 $P_nx=x$ $(n\geqslant m)$. 于 是, $Px=\lim\limits_{n\to\infty}P_nx=x$. 又 由 于 $\widetilde{\mathbf{H}}=\overline{\Omega}$, 故知，对于任意的 $x\in\widetilde{\mathbf{H}}$, $Px=x$. 现在 设 $x\perp\widetilde{\mathbf{H}}$, 则更有 $x\perp\mathbf{H}_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 所以 $P_nx=\mathbf{0}$, 再取极限即得 $Px=\mathbf{0}$.

当$\{P_n\}$是递减序列时可类似地证明.

注. 如果用依赖于连续变化的实参数的投影算子族$\{P_\lambda\}$来代替序列$\{P_n\}$, 定理仍然成立.

推论. 设$\{P_k\}$ 是一族相互正交的投影算子，则对于任意的 $x\in\mathbf{H}$ 级数

$$Px=\sum_{k=1}^{\infty}P_kx \tag{22}$$

收敛，并且算子P是投影算子.

事实上，只要把定理运用于递增的投影算子序列 $\{P^{(n)}\}$ $\left(P^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}P_k,\ n=1,2,\cdots\right)$上.

请读者自行证明, 投影算子P把$\mathbf{H}$投影到子空间$\widetilde{\mathbf{H}}$上, 其中元素 $x\in\widetilde{\mathbf{H}}$可表示为

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\ (x_k\in\mathbf{H}_k,\ k=1,2,\cdots;\ \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2<\infty).$$

子空间$\widetilde{\mathbf{H}}$叫做子空间$\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,\cdots,$的正交和(参见6.6),并表示为

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{H}_2\oplus\cdots=\oplus\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{H}_k.$$

§ 7. 弱拓扑与自反空间

7.1. 在 III. 2. 2 中我们对局部凸空间建立了 Hahn-Banach 定理,并给出了这个定理的一系列最重要的推论,其中包括存在足够多线性连续泛函定理. 现在, 我们在赋范空间中用更方便的形式对这个题目进行讨论.

定理 1(Hahn-Banach). 设 $\mathbf{X}$ 是赋范空间,f_0 是给定在子空间$\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 上的线性连续泛函. 则存在给定在整个 $\mathbf{X}$ 上的线性连续泛函 f. 它是f_0 的扩张, 并且$\|f\|=\|f_0\|$.

证. 因为 f_0 在 $\mathbf{X}_0$ 上连续,所以$|f_0(x)|\leqslant\|f_0\|\ \|x\|\ (x\in\mathbf{X}_0)$. 由定理 II. 4.2 存在泛函 f_0 在$\mathbf{X}$上的扩张 f, 使得$|f(x)|\leqslant\|f_0\|\|x\|$ $(x\in\mathbf{X})$, 由此$\|f\|\leqslant\|f_0\|$. 另一方面, 由 $\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$ 推出$\|f_0\|\leqslant\|f\|$, 定理证毕.

由定理 III. 2. 4 的推论 2 得:

定理 2. 对于赋范空间$\mathbf{X}$中任何异于零的元素 x_0, 存在泛函 $f\in\mathbf{X}^*$, 使得

$$\|f\|=1,\quad f(x_0)=\|x_0\|.$$

即在 x_0 处使得不等式$|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$中的等号实现.

推论. 对于任何 $x\in\mathbf{X}$, 有

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|:\ f\in\mathbf{X}^*,\ \|f\|\leqslant 1\}.$$

定理 2 可推广得

定理 3. 设Ω是包含在赋范空间$\mathbf{X}$中的线性集，$x_0 \in \mathbf{X}$是与Ω的距离等于$d>0$的元素（$\rho(x_0, \Omega)=d$）.

则存在这样的泛函$f \in \mathbf{X}^*$使得

$$f(x)=0 \quad (x \in \Omega), \ \|f\|=1, \ f(x_0)=d.$$

证. 在Ω中添上元素x_0，用$\mathbf{X}_0$表示其初等线性扩张，即$\mathbf{X}_0=\mathscr{L}(\Omega, x_0)$. 因为$x_0 \notin \Omega$，所以可把$x \in \mathbf{X}_0$唯一表示为

$$x=\lambda x_0+x' \quad (x' \in \Omega)$$

的形式. 对于$x \in \mathbf{X}_0$，令

$$f_0(x)=\lambda d.$$

显然，f_0是线性泛函. 同时$f_0(x_0)=d$且对于$x \in \Omega$，$f_0(x)=0$. 其次

$$\begin{aligned}\|x\|=\|\lambda x_0+x'\|&=|\lambda|\left\|x_0+\frac{x'}{\lambda}\right\|\\ &\geqslant|\lambda| \rho(x_0, \Omega)=|\lambda| d=|f_0(x)|.\end{aligned}$$

所以泛函f_0有界且$\|f_0\| \leqslant 1$. 为了得到相反的不等式，取$x' \in \Omega$，使得$\|x_0-x'\|<d+\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}d=f_0(x_0)&=f_0(x_0-x')\\ &\leqslant\|f_0\|\|x_0-x'\|<\|f_0\|(d+\varepsilon),\end{aligned}$$

由此

$$\|f_0\|>\frac{d}{d+\varepsilon},$$

由于ε的任意性，故$\|f_0\|=1$.

把关于泛函扩张的定理 1 应用于f_0，我们得到具有所要性质的泛函f.

注 1. 关于有足够多泛函的定理 2 是定理 3 的特殊情形. 就是，如果$\Omega=\{\mathbf{0}\}$，则$\rho(x_0, \Omega)=\|x_0\|$.

注 2. 定理 2 与 3 有时用另外形式表述比较方便，我们用泛函$\tilde{f}$代替f:

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{d}f(x).$$

则泛函 $\tilde{f}$ 具有下列性质:

$$\tilde{f}(x)=0\ (x\in\Omega),\ \|\tilde{f}\|=\frac{1}{d},\ \ \tilde{f}(x_0)=1.$$

我们给出定理 3 的一个应用. 设$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$是赋范空间$\mathbf{X}$中的一组元素, 如果存在一组泛函$\{f_\alpha\}$$(\alpha\in A)$, $f_\alpha\in\mathbf{X}^*$. 使得

$$f_{\alpha'}(x_\alpha)=\begin{cases}0, & \alpha'\neq\alpha,\\ 1, & \alpha'=\alpha,\end{cases}$$

则称元素组$\{x_\alpha\}$是可以双正交化的.

定理 4. 元素组$\{x_\alpha\}$$(\alpha\in A)$可以双正交化的充要条件为它是极小元素组, 即其中没有元素 x_α 属于其余元素的闭线性包.

证. 必要性. 设$\{x_\alpha\}$是可双正交化组. 如果有某个α_0使得

$$x_{\alpha_0}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}x_{\alpha_k}\qquad(\alpha_k\neq\alpha_0),$$

则

$$f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}f_{\alpha_0}(x_{\alpha_k})=0.$$

而实际上应该是 $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0})=1$.

充分性. 现在设$\{x_\alpha\}$是极小组. 用$\mathbf{X}_{\alpha'}$表示元素$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\neq\alpha')$全体的闭线性包. 因为$x_{\alpha'}\notin\mathbf{X}_{\alpha'}$, 而$\mathbf{X}_{\alpha'}$是闭线性集, 则根据定理 3(确切地说, 根据它的注)可以找到泛函$f_{\alpha'}$, 在$\mathbf{X}_{\alpha'}$上为零(即当$\alpha\neq\alpha'$时$f_{\alpha'}(x_\alpha)=0$)而$f_{\alpha'}(x_{\alpha'})=1$. 泛函族$\{f_{\alpha'}\}$满足定义的要求. 即元素组$\{x_\alpha\}$可以双正交化.

注. 所有有限的线性独立元素组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是极小组. 事实上, 由于线性独立性, $x_j\notin\mathscr{L}(\{x_k\})$$(k\neq j)$, 而由于有限维线性集是闭的, x_j 也不属于它的闭包.

从这个注推出，所有有限线性独立元素组，存在与它双正交的泛函组.

把定理 4 应用于 Hilbert空间，再考虑到 Hilbert 空间中泛函的一般表示(参见 V. 3. 2)，我们得到下列结果.

设$\{x_n\}$是 Hilbert 空间$\mathbf{H}$中任意的元素序列. 要在$\mathbf{H}$中存在与它双正交的元素组$\{y_n\}$即

$$(x_m, y_n)=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n,\end{cases}$$

其充要条件为序列$\{x_n\}$是极小的.

线性泛函扩张定理在实数情形是 Hahn 证明的. 其实 Banach[2] 中已证. 线性泛函扩张定理的推论在 Banach 的书中已指出.

7. 2. 在III. 3. 1中. 我们对任何向量空间的对偶对定义了对应的弱拓扑. 其次，我们对下列问题有兴趣. 设 $\mathbf{X}$ 是赋范空间. $\mathbf{X}^*$ 是它的共轭空间. 我们研究 $\mathbf{X}$ 上的拓扑 $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*)$，称之为赋范空间 $\mathbf{X}$ 的弱拓扑，而 $\mathbf{X}^*$ 上的拓扑 $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$，叫做空间 $\mathbf{X}^*$ 的(*)-弱拓扑. 这样，在 $\mathbf{X}^*$ 上研究两种弱拓扑：(*)-弱拓扑$\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$和弱拓扑 $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^{**})$，并且$\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})\leqslant\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^{**})$ (在非自反空间，这个不等式是严格成立的，参见后面). 按弱拓扑(或(*)-弱拓扑)收敛叫做弱收敛(或(*)-弱收敛)，而按范数收敛叫做强收敛. 下面的一些术语可作类似的理解：弱紧，弱有界，弱闭等等.

引理 1. 设$\langle\mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle$是向量空间的对偶对，并且 $\mathbf{Y}$ 包含在 $\mathbf{X}$ 上可数的全集合 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. 则拓扑$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$在弱紧集合上是可度量化的.

证. 设K是 $\mathbf{X}$ 中的$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$紧集. 用下列公式在 K 上定义度量

$$\rho(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)\,|f_n(x-y)| \qquad (x, y\in K).$$

因为 K 是弱紧的，所以 K 是弱有界的，由此 $\rho(x,y)<\infty$. 如果$\rho(x,y)=0$, 则对于所有的 n，$f_n(x-y)=0$. 因而，由$\{f_n\}$在 $\mathbf{X}$上的全性得$x=y$. 其余的度量性质对于 ρ 显然成立.

我们来研究恒等变换 $i:(K,\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))\to(K,\rho)$，其中$(K,\rho)$ 是具有度量 ρ 的度量空间. 显然 i 是连续映射，于是根据定理 I.2.5 的推论 3, i 是同胚，从而证明了空间$(K,\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$的可度量性.

在各种问题中可分 B-空间类起着重要的作用，这里我们给出这类空间的一些结果.

推论. 如果 $\mathbf{X}$ 是可分的赋范空间，则拓扑 $\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*)$ 在弱紧集上是可度量化的.

证. 我们来验证引理 1 的条件成立. 设$\{x_n\}$是$\mathbf{X}$中的可数的处处稠密的集. 由定理 2 对于任何 $n\in N$ 可以找到 $f_n\in\mathbf{X}^*$, $\|f_n\|=1$, 使得 $f_n(x_n)=\|x_n\|$. 假设对于所有的 $n\in N$, $f_n(x)=0$. 我们来证 $x=\mathbf{0}$. 取序列 $x_{n_m}\to x$, 则

$$\|x_{n_m}\|=|f_{n_m}(x_{n_m})|=|f_{n_m}(x_{n_m})-f_{n_m}(x)|\leqslant\|f_{n_m}\|\|x_{n_m}-x\|\to 0,$$

由此 $x_{n_m}\to\mathbf{0}$, 因而 $x=\mathbf{0}$.

定理 5. 如果赋范空间$\mathbf{X}$的共轭空间 $\mathbf{X}^*$ 是可分的，则$\mathbf{X}$也是可分的.

证. 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbf{X}^*$ 中处处稠密的子集. 由泛函范数的定义，对于每一个 $n\in N$，可以找到 $x_n\in\mathbf{X}$ 使得$\|x_n\|\leqslant 1$ 且 $|f_n(x_n)|\geqslant(1/2)\|f_n\|$. 元素 x_n 具有有理系数的线性组合所成的集合E是可数的. 我们来证明E在$\mathbf{X}$中稠密. 显然,$\bar{E}$ 是闭线性集. 如果 $\bar{E}\neq\mathbf{X}$, 则根据定理 2 可以找到 $f\in\mathbf{X}^*$, $\|f\|=1$, 使得对于 $x\in\bar{E}$, $f(x)=0$. 设按范数 $f_{n_k}\to f$, 则

$$(1/2)\|f_{n_k}\|\leqslant|f_{n_k}(x_{n_k})|=|(f_{n_k}-f)(x_{n_k})|\leqslant\|f_{n_k}-f\|\to 0,$$

由此 $f_{n_k}\to\mathbf{0}$, $f=\mathbf{0}$, 从而与等式$\|f\|=1$ 矛盾.

设X是赋范空间. 空间X中闭单位球*) B_X 的极是共轭空间的闭单位球 B_{X^*}. 于是根据 Alaoglu-Bourbaki 定理(定理 III. 3. 7), 球 B_{X^*} 是 $\sigma(X^*,X)$紧的. 我们指出, B_{X^*} 不一定是(*)-弱列紧的(例如, 如果 $X=1^\infty$. 参见 X. 3. 4), 然而如果X是可分的, 则 B_{X^*} 是列紧的.

定理 6. 如果X是可分的赋范空间, 则单位球 B_{X^*} 对(*)-弱拓扑是可度量化的, 从而它是列紧的.

证. 把X作为 X^* 上线性泛函的集合, 并考察对应的对偶对 (X^*, X). 在X中处处稠密的可数集显然在 X^* 上是全的. 再用引理 1 即得证.

注. 如果球 B_{X^*} 按(*)-弱拓扑可度量化, 则空间X是可分的.

7.3. 设X是赋范空间. 因为 X^* 也是赋范空间, 所以讨论 X^* 的共轭空间 $X^{**}=(X^*)^*$是有意义的, 它是 X^* 上线性连续泛函全体构成的集. 类似地可以讨论空间 X^{***}等等.

我们研究典型嵌入 π_{X^*}: $X\to X^{**}$ (参见 III. 3. 2), 下面简记为 π. 我们知道每个 $x\in X$ 由 π 按下式映射到 X^* 上的泛函 F_x:

$$F_x(f)=\overline{f(x)} \qquad (f\in X^*).$$

显然

$$|F_x(f)|=|f(x)|\leqslant\|x\|\|f\|,$$

由此 $F_x\in X^{**}$. 这样, π 把X映射到 X^{**}内. 由定理 2 的推论可知

$$\|\pi(x)\|=\|F_x\|=\sup\{|F_x(f)|:\quad f\in X^*, \|f\|\leqslant 1\}$$
$$=\sup\{|f(x)|:\quad f\in X^*, \|f\|\leqslant 1\}=\|x\|,$$

由此得出, π 是空间X在 X^{**} 的子空间 $\pi(X)$上的线性等距.

设X是 B-空间, 如果 $\pi(X)=X^{**}$, 即X在典型嵌入 π 下与 X^{**} 等距, 则称X是自反的. 因为实现等距的对应在此情形具有

*) 这里及往下 $B_X=\{x\in X:\ \|x\|\leqslant 1\}$。

特殊形式，所以，在空间$\mathbf{X}$与$\mathbf{X}^{**}$之间存在线性等距还不足以推出空间$\mathbf{X}$的自反性(相应的反例可参见 James[1]的文章).

容易看出，任何有限维B-空间是自反的. 读者可利用关于 Hilbert 空间中线性泛函的一般形式的定理 3.1 证明 Hilbert 空间是自反的. 下面我们可以看到，空间$\mathbf{L}^p(1<p<\infty)$是自反的，而$\mathbf{L}^1$, $\mathbf{L}^\infty$, $\mathbf{C}[0,1]$, $\mathbf{c}_0$等不是自反的.

定理 7. B-空间$\mathbf{X}$为自反空间的充要条件是其中的闭单位球$B_{\mathbf{X}}$为弱紧的.

证. 必要性. 由于$\mathbf{X}$的自反性，球$B_{\mathbf{X}}$与空间$\mathbf{X}^{**}$中的闭单位球$B_{\mathbf{X}^{**}}$重合，根据 Alaoglu-Bourbaki 定理它是$\sigma(\mathbf{X}^{**},\mathbf{X}^*)$-紧的.

充分性. 如果我们证明了集合$\pi(B_{\mathbf{X}})$与$B_{\mathbf{X}^{**}}$重合，则我们得$\pi(\mathbf{X})=\mathbf{X}^{**}$. 根据双极定理，$B_{\mathbf{X}}^{\circ\circ}$是集$\pi(B_{\mathbf{X}})$的$\sigma(\mathbf{X}^{**},\mathbf{X}^*)$-闭包. 因为球$B_{\mathbf{X}}$是弱紧的，所以集合$\pi(B_{\mathbf{X}})$是$\sigma(\mathbf{X}^{**}\mathbf{X}^*)$-闭的，由此$B_{\mathbf{X}}^{\circ\circ}=\pi(B_{\mathbf{X}})$. 另一方面，根据双极的定义，$B_{\mathbf{X}}^{\circ\circ}=B_{\mathbf{X}^{**}}$，由此得出所要求的关系式$\pi(B_{\mathbf{X}})=B_{\mathbf{X}^{**}}$.

推论 1. 自反B-空间$\mathbf{X}$的任何闭子空间是自反的.

证. 设$\mathbf{Y}$是$\mathbf{X}$中的闭子空间，$B_{\mathbf{Y}}$是其中的闭单位球. 因为球$B_{\mathbf{X}}$在$\mathbf{X}$中是弱紧的且$B_{\mathbf{Y}}=B_{\mathbf{X}}\cap\mathbf{Y}$，所以由定理 III. 3.2 的推论 3 球$B_{\mathbf{Y}}$在$\mathbf{Y}$中也是弱紧的. 再应用定理 7 推得空间$\mathbf{Y}$是自反的.

推论 2. B-空间$\mathbf{X}$自反的充要条件为它的共轭空间$\mathbf{X}^*$是自反的.

证. 如果$\mathbf{X}$是自反的，则拓扑$\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X})$与$\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X}^{**})$在$\mathbf{X}^*$上重合. 因为根据 Alaoglu-Bourbaki 定理，球$B_{\mathbf{X}^*}$是(*)-弱紧的，所以这球也是弱紧的，从而根据定理 7，$\mathbf{X}^*$是自反的.

如果$\mathbf{X}^*$是自反的，则已经证明$\mathbf{X}^{**}$是自反的. 因为$\pi(\mathbf{X})$是

$\mathbf{X}^{**}$中的闭子空间，所以根据推论 1，$\pi(\mathbf{X})$是自反的，从而$\mathbf{X}$也是自反的.

推论 3. 空间 $\mathbf{X}^*$ 中弱拓扑和(*)-弱拓扑在单位球$B_{\mathbf{X}^*}$上重合的充要条件为$\mathbf{X}$是自反的.

证. 如果在 $B_{\mathbf{X}^*}$ 上弱拓扑和(*)-弱拓扑重合，则球 $B_{\mathbf{X}^*}$ 是弱紧的，从而 $\mathbf{X}^*$是自反的. 根据推论 2, $\mathbf{X}$ 是自反的. 逆命题显然成立.

注. 如果 B-空间 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 是同构的，而且 $\mathbf{X}$ 是自反的，则 $\mathbf{Y}$ 也是自反的.

下面我们还将遇到自反 B-空间的例子.

7.4. 这里我们不加证明地叙述一些与弱拓扑有关的重要结果.

设 $\mathbf{X}$ 是B-空间. 怎样描述集 $\pi(\mathbf{X})$呢? 自然，它是由所有 $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$连续的泛函 $F\in\mathbf{X}^{**}$所组成. 然而验证泛函的无界有向列(*)-弱连续性却十分困难. 和这问题有关的定理有:

定理 8 (A. Grothendieck). 如果 $\mathbf{X}$ 是 B-空间，则泛函 $F\in\pi(\mathbf{X})$ 的充要条件为

由 $f_\alpha \underset{A}{\to} 0(\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$ 及 $\|f_\alpha\|\leqslant 1$ $(\alpha\in A)$ (*)

推出 $F(f_\alpha)\to 0$.

如果 $\mathbf{X}$ 是可分的 B-空间，则条件(*)中的有向列可以用序列来代替.

泛函的无界有向列的工作的不方便可以说明下面这个定理的重要性.

定理 9 (Крейн-Шмульян). 设 $\mathbf{X}$ 是 B-空间, E 是 $\mathbf{X}^*$中的凸子集，如果对于任意的$n\in\boldsymbol{N}$集合$\{x\in E: \|x\|\leqslant n\}$是(*)-弱闭的，则$E$ 也是(*)-弱闭的.

在定理 8 与 9 中，$\mathbf{X}$ 的完备性条件是必要的. 定理的证明参

见 Schäffer-I(第 四 章 § 6).

§ 8. 线性算子的扩张

8.1. Hahn-Banach 定理指出,在赋范空间 $\mathbf{X}$ 的子空间上给定的任何线性泛函可以保持线性和连续性延拓到整个空间 $\mathbf{X}$ 上. 对于线性算子类似的结论已不成立. 本节中我们研究在这方面可以得到怎样的结果.

设 U_0 与 U 是两个算子, 它们分别把空间 $\mathbf{X}$ 中的集 Ω_0 与 Ω 映射到空间 $\mathbf{Y}$ 内. 如果 $\Omega_0 \subset \Omega$, 并且对于 $x \in \Omega_0$ 有 $U(x) = U_0(x)$, 则称 U 是算子 U_0 的扩张(或延拓). 同时记为 $U_0 \subset U$.

定理 1*). 设 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 是赋范空间, U_0 是由 $\Omega \subset \mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的算子. 则 U_0 在集 $\mathscr{L}(\Omega)$ 上具有线性连续扩张 U 的充要条件为存在这样的常数 C, 使得对于 Ω 中任何的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k)\right\| \leqslant C \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|. \tag{1}$$

证. 必要性. 如果存在扩张 U, 则因为元素 $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ 属于 $\mathscr{L}(\Omega)$, 有

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k).$$

但由于算子 U 是线性有界的, 有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k)\right\| = \|U(x)\| \leqslant \|U\| \|x\|$$
$$= \|U\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|,$$

*) 参见 Riesz[2].

即当 $C=\|U\|$时(1)式成立.

充分性. 由(1)立即推出, 如果元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合等于零元素, 即$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k=\mathbf{0}$, 则$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k U_0(x_k)=\mathbf{0}$.

现在取任意的元素$x\in\mathscr{L}(\Omega)$:

$$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \qquad (x_k\in\Omega;\ k=1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

令

$$U(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k U_0(x_k). \tag{3}$$

我们来证明, 尽管表示式(2)的形式有各种可能, 用(3)式来定义算子在 x 处的值, 它是单值的. 事实上, 如果

$$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k x_k{}^{*)},$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda'_k)x_k=\mathbf{0}.$$

但由上面讨论可知

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda'_k)U_0(x_k)=\mathbf{0},$$

即得

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k U_0(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k U_0(x_k).$$

不难验证算子 U 是线性的. 事实上, 如果$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$, 而

---

*) 在这两个和式中都用相同的元素 x_k, 这样并不失一般性, 因为可以认为其中缺少 x_k 的哪些加项的系数为 0.

$y=\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k$，则 $x+y=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k+\mu_k)x_k$ 且

$$U(x+y)=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k+\mu_k)U_0(x_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k U_0(x_k)+\sum_{k=1}^{n}\mu_k U_0(x_k)$$

$$=U(x)+U(y).$$

由(1)推出算子 U 的有界性，因为

$$\|U(x)\|\leqslant C\|x\| \qquad (x\in\mathscr{L}(\Omega)).$$

显然，U 是算子 U_0 的扩张.

定理证毕.

8.2. 下面的定理给出线性连续算子从给定的集上扩张到其闭包上的可能性.

定理 2 (连续扩张). 设 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 是赋范空间，并且 $\mathbf{Y}$ 是完备的. 每一个从 $\Omega\subset\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的线性连续算子 U_0，在集 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 上有唯一的线性连续扩张 U，并且 $\|U\|=\|U_0\|$.

证. 设 $x\in\overline{\Omega}$，则在 Ω 中存在收敛于 x 的元素序列 $\{x_n\}$. 在空间 $\mathbf{Y}$ 中讨论序列 $\{U_0(x_n)\}$. 因为 $\|U_0(x_n)-U_0(x_m)\|\leqslant\|U_0\|\|x_n-x_m\|$，所以它是自收敛的. 从而由于空间 $\mathbf{Y}$ 的完备性. $\lim\limits_{n\to\infty}U_0(x_n)$ 存在. 下面来证明这个极限不依赖于序列 $\{x_n\}$ 的选法. 事实上，如果 $x'_n\in\Omega$ 且 $x'_n\to x$，则

$$\|U_0(x'_n)-U_0(x_n)\|\leqslant\|U_0\|\|x'_n-x_n\|\to 0.$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}U_0(x'_n)=\lim\limits_{n\to\infty}U_0(x_n)$.

现在令

$$U(x)=\lim_{n\to\infty}U_0(x_n).$$

算子 U 显然是线性的，而由不等式 $\|U_0(x_n)\|\leqslant\|U_0\|\|x_n\|$ 取极

限后得$\|U(x)\|\leqslant\|U_0\|\|x\|$，即算子$U$是有界的，并得不等式$\|U\|\leqslant\|U_0\|$. 另一方面，因为

$$\|U\|=\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in\overline{\Omega}}}\|U(x)\|\geqslant\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in\Omega}}\|U_0(x)\|=\|U_0\|,$$

所以$\|U\|=\|U_0\|$.

最后，如果$V\supset U_0$是由$\overline{\Omega}$到$\mathbf{Y}$内的线性连续算子，则由于算子V的连续性，从关系式$U_0(x_n)=V(x_n)$ $(x_n\in\Omega;\ x_n\to x)$取极限后得出$U(x)=V(x)$，即算子$U$与$V$重合。

定理证毕.

推论. 如果把赋范空间$\mathbf{X}$映射到B-空间$\mathbf{Y}$内的线性连续算子U在$\mathbf{X}$的稠密子集上取值为$\mathbf{0}$，则对于任何$x\in\mathbf{X}$，$U(x)=\mathbf{0}$.

8.3. 如果线性算子U_0定义在空间$\mathbf{X}$中的稠密子集Ω上，则根据定理2它可以扩张到整个空间$\mathbf{X}$上并保持其线性和范数. 然而，如果去掉Ω在$\mathbf{X}$中稠密这个条件，一般来说，这种扩张是不可能的.

算子U_0存在保持范数的扩张的问题，其是否能解还要依赖于象空间$\mathbf{Y}$的性质.

为了下面的叙述方便起见，引进定义：设$\mathfrak{U}=\{A\}$是一集族，如果族中每一对集都有非空的交，则称它是连锁的.

设$\mathbf{Y}$是赋范空间，如果其中每一个连锁的闭球族都有非空的交，则称$\mathbf{Y}$是$\mathfrak{M}$型空间.

(实)数直线是最简单的$\mathfrak{M}$型空间的例子. 事实上，这个空间中的闭球是闭区间. 所以我们研究连锁的闭区间集$\{[a_\xi,b_\xi]\}$ $(\xi\in\Xi)$，并验证它具有非空交. 为此指定某个$\xi_0\in\Xi$. 因为对于任何$\xi\in\Xi$，区间$[a_\xi,b_\xi]$与$[a_{\xi_0},b_{\xi_0}]$有公共的点，所以

$$a_{\xi_0}\leqslant b_\xi\qquad(\xi\in\Xi).$$

于是

$$a_{\xi_0}\leqslant\inf_{\xi\in\Xi}b_\xi.$$

而因为$\xi_0\in\Xi$是任意的，故

$$\bar{a}=\sup_{\xi\in\Xi}a_\xi\leqslant\inf_{\xi\in\Xi}b_\xi=\bar{b}.$$

由此可见，区间$[\bar{a},\bar{b}]$的任何点都包含在每一个区间$[a_\xi,b_\xi]$之中，从而

证明了实直线是$\mathfrak{M}$型的.

读者用类似方法可自行证明实空间 $\mathbf{l}^\infty(T)$ 与 $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ (测度 μ 是 σ 有限的)也是$\mathfrak{M}$型的.

应该指出, 复平面看成(复)赋范空间, 不是$\mathfrak{M}$型空间. 事实上, 容易给出平面上三个圆, 它们之间两两相交, 但它们没有公共的交.

这一节后面所有的空间都假定是实的.

$\mathfrak{M}$型空间类是相当狭的. 读者可以证实, 上面讨论过的许多具体空间, 除了 $\mathbf{l}^\infty(T)$ 与 $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ 外, 都不是$\mathfrak{M}$型空间.

最后指出, 所有$\mathfrak{M}$型空间 $\mathbf{Y}$ 都是完备的.

事实上, 设$\{y_n\}$是空间 $\mathbf{Y}$ 中自收敛的元素序列, 记

$$r_n = \sup_{m \geqslant n} \|y_m - y_n\|$$

并研究闭球族$\{B_{r_n}(y_n)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$. 这是一个连锁的族, 因为当 $m>n$ 时

$$\|y_m - y_n\| \leqslant r_n,$$

所以 $y_m \in B_{r_n}(y_n) \cap B_{r_m}(y_m)$. 如果 $\mathbf{Y}$ 是$\mathfrak{M}$型空间, 则存在元素 $y \in \mathbf{Y}$, 它包含在每一个球 $B_{r_n}(y_n)$ 中, 即有

$$\|y - y_n\| \leqslant r_n \qquad (n=1, 2, \cdots),$$

从而由于 $r_n \to 0$, 所以 $y_n \to y$. 故 $\mathbf{Y}$ 是完备的.

下面的基本定理 3 和 4 是 Nachbin [1] 证明的. 在这些工作中还用序空间理论的观点给出了$\mathfrak{M}$型空间的特征. 这种特征不久由 Kelley[1] 更精确地阐明. 关于线性算子的扩张问题还可参见 Акилов [1], [2], Kakutani [1]及 Канторович, Вулих 及 Пинскер 的书.

定理 3. 设 $\mathbf{X}$ 是赋范空间, $\mathbf{X}_0$ 是包含在 $\mathbf{X}$ 中的线性集*). 再设 U_0 是线性连续算子, 它把 $\mathbf{X}_0$ 映射到$\mathfrak{M}$型空间 $\mathbf{Y}$ 内. 则存在算子 U_0 的线性连续扩张 U, 它把 $\mathbf{X}$ 映射到 $\mathbf{Y}$ 内, 并且$\|U\| = \|U_0\|$.

证. 设 $\mathbf{X}_0$ 是空间 $\mathbf{X}$ 的线性子集, 由形式为

$$x' = \lambda x_1 + x \qquad (x \in \mathbf{X}_0) \tag{4}$$

的元素全体构成的线性集 $\mathbf{X}_1$ 叫做线性集 $\mathbf{X}_0$ 的初等扩张. 其中 x_1 是 $\mathbf{X}$ 中给定的元素.

我们来证明, 在定理条件成立时所有把 $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ 变换到 $\mathbf{Y}$ 内的线性算子

*) 由定理 2 及空间 $\mathbf{Y}$ 的完备性, 可以认为 $\mathbf{X}_0$ 是闭集.

U_0，在集 $\mathbf{X}_0$ 的任意初等扩张 $\mathbf{X}_1$*) 上存在线性扩张 U_1 并保持范数.

显然，如果算子 U_1 存在，它完全由元素 $y_0=U_1(x_1)$ 确定. 因为扩张后的算子应该保持范数不变，所以对于这个元素下列关系式成立:

$$\begin{aligned}\|y_0-U_0(x)\|&=\|U_1(x_1)-U_1(x)\|\leqslant\|U_1\|\,\|x_1-x\|\\&=\|U_0\|\,\|x_1-x\|.\end{aligned}$$

于是，算子 U_1 存在的必要条件是所有以点 $y=U_0(x)$ 为中心 $r=r_x=\|U_0\|\|x_1-x\|$ 为半径的闭球 $B(x)=B_r(y)$ 具有公共点.

我们来证明，这个条件也是充分的. 事实上，用 $\mathfrak{K}$ 表示所有这种球的全体. 假设有点 y_0 属于族 $\mathfrak{K}$ 中所有的球，令

$$U_1(x_1)=y_0.$$

同时，根据(4)对于 $x'\in\mathbf{X}_1$ 令

$$U_1(x')=\lambda U_1(x_1)+U_1(x)=\lambda y_0+U_0(x).$$

故由于表示式(4)的唯一性推出算子 U_1 是线性的. 而因为条件(当 $\lambda\neq0$时)

$$\begin{aligned}\|U_1(x')\|&=|\lambda|\ \left\|y_0+U_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\|\leqslant r_{-x/\lambda}|\lambda|\\&=|\lambda|\,\|U_0\|\,\left\|x_1+\frac{x}{\lambda}\right\|=\|U_0\|\,\|x'\|,\end{aligned}$$

所以 U_1 是线性连续算子，并且 $\|U_1\|\leqslant\|U_0\|$. 相反的不等式显然成立. 从而推出 $\|U_1\|=\|U_0\|$.

于是，只需证明族 $\mathfrak{K}$ 中的球 $B(x)$ 具有非空交. 再由定理的条件可知只需验证 $\mathfrak{K}$ 是连锁的族.

为此，在 $\mathfrak{K}$ 中任取两个球 $B(x_1')$ 和 $B(x_2')$. 我们有

$$\begin{aligned}r_1+r_2=r_{x_1'}+r_{x_2'}&=\|U_0\|[\|x_1-x_1'\|+\|x_1-x_2'\|]\\&\geqslant\|U_0\|\,\|(x_1-x_1')-(x_1-x_2')\|\geqslant\|U_0(x_1'-x_2')\|\\&=\|y_1'-y_2'\|,\end{aligned}$$

即半径的和不小于球心之间的距离，因而球 $B(x_1')$ 与 $B(x_2')$ 相交**). 而由于它们是任取的，即证得 $\mathfrak{K}$ 是连锁的族.

于是，我们证明了初等扩张的可能性，为了完成定理的证明，我们利用

---

*) 这里指的是真的扩张，即 $x_1\notin\mathbf{X}_0$，在此情形，不难看出表示式(4)是唯一的.

**) 如果 $B_{r_1}(y_1)$ 与 $B_{r_2}(y_2)$ 是空间 $\mathbf{Y}$ 的二个闭球，并且 $r_1+r_2\geqslant\|y_1-y_2\|$，则它们的交非空，例如元素 $\frac{r_2}{r_1+r_2}y_1+\frac{r_1}{r_1+r_2}y_2\in B_{r_1}(y_1)\cap B_{r_2}(y_2)$.

Zorn 引理(I.1.2). 用A表示算子U_0的所有可能的线性扩张(保持范数不变)的全体,在A中按下列方式引进序: 对于V', $V''\in A$, 如果$V'\subset V''$, 则认为$V'\leqslant V''$. 下面来验证满足 Zorn 引理的条件. 设A_0是集A的全序部分, 令

$$\widetilde{\mathbf{X}}=\bigcup_{V\in A_0}\Omega_V,$$

因为组成上述并集的任意二个集一定是其中一个包含在另一个内,所以$\widetilde{\mathbf{X}}$是线性集. 考察任意的元素$x\in\widetilde{\mathbf{X}}$. 存在$V'\in A_0$,使得$x\in\Omega_{V'}$,定义

$$\widetilde{V}(x)=V'(x).$$

这个定义不依赖于算子V'的选法,因为如果$x\in\Omega_{V''}$,则由于或者$V'\leqslant V''$,或者$V''\leqslant V'$, 有$V'(x)=V''(x)$. 同样容易证明,$\widetilde{V}$是线性算子, 并且$\|\widetilde{V}\|=\|U_0\|$. 其次, 显然$\widetilde{V}$是任何算子$V\in A_0$ 的扩张, 因而它也是算子U_0 的扩张. 由此可见,$\widetilde{V}\in A$且$V\leqslant\widetilde{V}$ $(V\in A_0)$. 应用 Zorn 引理,我们可以找到算子U,它是A中的极大元. 这个算子U就是定理所要求的,实际上,如果$\Omega_U\neq\mathbf{X}$,则可以求出集Ω_U的初等扩张,它比Ω_U更大,根据以前的证明, 算子U还可以保持范数不变进行扩张,用U_1表示所得的扩张,从而得出$U_1\in A$且$U\leqslant U_1$,因为$U\neq U_1$,这是不可能的.

定理证毕.

8.4. 定理 3 中所述的线性算子扩张可能性的条件还是必要的. 在证明此结论之前,给出下面的定义.

设$\mathbf{Y}$是B-空间, 如果对于任意的B-空间$\mathbf{X}$, 所有的把任意的子空间$\mathbf{X}_0\subset\mathbf{X}$映射到$\mathbf{Y}$内的连续线性算子$U_0$都具有在整个$\mathbf{X}$上的保持范数的线性扩张$U$,则称$\mathbf{Y}$是$P_1$-空间.

定理 4. 对于B-空间$\mathbf{Y}$,下列命题等价:

1) $\mathbf{Y}$是P_1-空间;

2) 如果B-空间$\mathbf{X}$包含$\mathbf{Y}$作为子空间,则存在由$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$上的线性连续投影算子,其范数为 1;

3) $\mathbf{Y}$是$\mathfrak{M}$型空间.

证. 1)⇒2). 设$\mathbf{Y}$是B-空间$\mathbf{X}$的子空间. 则恒等算子U_0: $\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$具有扩张$U:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$, $\|U\|=\|U_0\|=1$, 显然U是所需的投影算子.

2)⇒3). 设T是共轭空间中的球$B_{\mathbf{Y}^*}$. 在 7.3 中我们已证明, 存在空间$\mathbf{Y}$到B-空间$\mathbf{l}^\infty(T)$的子空间上的线性等距映射. 根据条件, 存在从$\mathbf{l}^\infty(T)$到$\mathbf{Y}$上的范数为 1 的投影算子. 前面已指出,$\mathbf{l}^\infty(T)$是$\mathfrak{M}$型空间. 显然, 在

范数为 1 的投影变换下$\mathfrak{M}$型不变，所以 $\mathbf{Y}$ 是$\mathfrak{M}$型空间.

3)$\Rightarrow$1). 在定理 3 中已证明.

可以证明(参见 Kelley[1], Nachbin[1]), B-空间 $\mathbf{Y}$ 是 P_1-空间的充要条件为，它与 B-空间 $\mathbf{C}(Q)$ 线性等距，其中 Q 是极不连通紧集(这种紧集的定义参见 X.1.5).

关于线性算子扩张问题，可以用其他的一些观点来讨论. 设 $\mathbf{X}$ 是给定的赋范空间，$\mathbf{X}_0$ 是它的任意的子空间，$\mathbf{Y}$ 是任意的 B-空间. 设 U_0 是把 $\mathbf{X}_0$ 映射到 $\mathbf{Y}$ 内的线性连续算子，存在把 $\mathbf{X}$ 映射到 $\mathbf{Y}$ 内的线性算子 $U\supset U_0$, $\|U\|=\|U_0\|$, 的充要条件为 $\mathbf{X}$ 是酉空间. 这个结果是 Kakutani[1] 建立的.

第六章　泛函的解析表示

在具体空间中线性泛函一般形式的知识对于一般理论的应用具有很大价值. 所谓一类给定的线性泛函（多半研究在给定空间中所有连续泛函的类）的一般形式，可理解为包含各种类型参数(数、函数等等)的解析表示式，这种表示式在指定参数值后给出已知类中的一个泛函，并且，当取遍所有参数后就得到一切要考察的泛函.

本章给出了前面讨论过的一系列具体空间上线性泛函的一般形式.

§1. 可测函数空间中泛函的积分表示

1.1. 在第四章§ 3 中，我们在研究具体空间之前叙述了一般的可测函数空间的理论. 本章在研究这些空间泛函的一般形式时，也作这样的处理.

设 $\mathbf{X}$ 是(T, Σ, μ)上的理想空间，其中测度 μ 是 σ- 有限的. 又设 f 是 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函，如果从$x_n, x\in\mathbf{X}, x_n(t)\to 0$ a. e. 及$|x_n(t)|\leqslant x(t)$ a. e. 推出$f(x_n)\to 0$，则称 f 是序连续的*)，或称它为(o)-连续的. $\mathbf{X}$ 上所有的(o)-连续泛函组成的集合是个向量空间，我们把它记作 $\mathbf{X}_n^{\sim}$.

用 $\mathbf{X}'$ 表示所有满足下列条件的 $x'\in\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$组成的集合：

$$\operatorname{supp}x'\subset\operatorname{supp}\mathbf{X}\,(\operatorname{mod}\mu),\ 对于任何\ x\in\mathbf{X}\ 有\int|xx'|\,d\mu<\infty.$$

*）容易看出，如果把几乎处处收敛都改为依测度收敛，这个定义没有改变.

容易看出，$\mathbf{X}'$ 是理想空间(可能出现 $\mathbf{X}'=\{0\}$)．理想空间 $\mathbf{X}'$ 叫做 $\mathbf{X}$ 的对偶．对于每一个$x'\in\mathbf{X}'$可以用下面的式子构成 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函 $f_{x'}$：

$$f_{x'}(x)=\int_T x(t)\overline{x'(t)}d\mu \qquad (x\in\mathbf{X}). \tag{1}$$

由 Lebesgue 定理显然可知，$f_{x'}\in\mathbf{X}_n^{\sim}$．我们来证明形式(1)的积分泛函取遍了空间 $\mathbf{X}_n^{\sim}$．

定理 1. 公式(1)给出了在理想空间 $\mathbf{X}$ 上 (o)-连续泛函的一般形式．映射$x'\in\mathbf{X}'\to f_{x'}\in\mathbf{X}_n^{\sim}$是线性同构；同时，$x'\geqslant 0$ 的充要条件为对于任何 $x\in\mathbf{X}_+$，$f_{x'}(x)\geqslant 0$．

证. 先设 $\mathbf{X}$ 是实的，且 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)\subset\mathbf{X}$．我们来证明，任何泛函 $f\in\mathbf{X}_n^{\sim}$ 都可用(1)式表示．对于任何 $A\in\Sigma$，令

$$\varphi(A)=f(\chi_A).$$

于是，如果 $\mu(A_n)\to 0$，则 $\varphi(A_n)=f(\chi_{A_n})\to 0$，由此，$\varphi$ 是在 Σ 上的可数可加集函数，且关于 μ 是绝对连续的．根据 Radon-Nikodým 定理(参看定理 I. 6. 10)，存在函数 $x'\in\mathbf{L}^1(T,\Sigma,\mu)$使得

$$f(\chi_A)=\varphi(A)=\int_A x'd\mu. \tag{2}$$

我们来证明，对于任意的 $x\in\mathbf{X}$，有

$$f(x)=\int_T xx'd\mu \tag{3}$$

设 $B_+=\{t\in T:\ x'(t)\geqslant 0\}$，$B_-=\{t\in T: x'(t)<0\}$．令

$$f_+(x)=f(x\chi_{B_+}),\ f_-(x)=f(x\chi_{B_-}),\ (x\in\mathbf{X}),$$

因为

$$f_+(\chi_A)=\int_A x'_+d\mu, \quad f_-(\chi_A)=\int_A x'_-d\mu$$

及

$$f_+, f_-\in\mathbf{X}_n^{\sim}, \quad f=f_+-f_-,$$

所以，在证明(3)式时可以认为 $x'\geqslant 0$ 及(2)成立.

设 $x\in \mathbf{X}_+$. 这时存在有限个值的函数序列$\{x_n\}$，使得

$$0\leqslant x_n\uparrow x.$$

于是，由于 $f\in \mathbf{X}_n^{\sim}$ 及 Levi 定理即得 (3). 对于任意的函数$x\in \mathbf{X}$，由关系式 $x=x_+-x_-$ 可导出(3). 从(3)式推出 $x'\in \mathbf{X}'$.

现在我们放弃假设 $\mathbf{L}^\infty\subset \mathbf{X}$. 首先指出，由于引理 IV. 3. 1 的推论 2，满足(3)式的函数 x' 是唯一的(精确到等价类).

根据引理 IV. 3. 1 的推论 1，可以找到这样的不减序列$\{A_n\}\subset \Sigma$，使得$\chi_{A_n}\in \mathbf{X}(n\in N)$及$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\operatorname{supp}\mathbf{X}$. 考察理想空间 $\mathbf{X}_n=\{x\in \mathbf{X}:\operatorname{supp}x\subset A_n\}$ 及在其上的泛函 $f_n(x)=f(x)(x\in \mathbf{X}_n)$. 这时，根据上面的证明可以找到 $x'_n\in \mathbf{X}'_n(n\in N)$，使下式成立:

$$f_n(x)=\int_T xx'_n d\mu \qquad (x\in \mathbf{X}_n). \tag{4}$$

研究泛函 f_n 和在 $\mathbf{X}_{n+1}$ 上的 f_{n+1}，由于(3)中表示函数的唯一性，对于几乎所有的 $t\in A_n$ 我们得到 $x'_n(t)=x'_{n+1}(t)$. 因而我们可以令

$$x'(t)=\begin{cases}x'_n(t), & t\in A_n,\\ 0, & t\notin \operatorname{supp}\mathbf{X}.\end{cases}$$

我们来证明在此情况下关系(3)成立. 象前面那样，可以认为 $x'\geqslant 0$ 及等式(4)成立. 如果 $x_n=x\chi_{A_n}(x\in \mathbf{X}_+)$，则 $f(x_n)\to f(x)$，另一方面，根据 Levi 定理

$$\int_T xx'_n d\mu=\int_T x_n x' d\mu\to\int_T xx' d\mu,$$

由此推得对于 $x\in \mathbf{X}_+$，(3)式成立，从而得知对于所有的 $x\in \mathbf{X}$(3)式成立.

如果 $\mathbf{X}$ 是复空间，$f\in \mathbf{X}_n^{\sim}$，则令 $f(x)=\operatorname{Re}f(x)+i\operatorname{Im}f(x)$. 这时 $\operatorname{Re}f$ 和 $\operatorname{Im}f$ 是实理想空间 $\mathbf{X}_R$ 上的线性泛函，并且 $\operatorname{Re}f,\operatorname{Im}f\in$

$(\mathbf{X}_R)_n^\sim$. 由上面的证明，可以找到 $x_1', x_2' \in (\mathbf{X}_R)'$，使得

$$\mathrm{Re}f(x)=\int xx_1'd\mu,\quad \mathrm{Im}f(x)=\int xx_2'd\mu \qquad (x\in\mathbf{X}_R).$$

令 $x'=x_1'-ix_2'$. 于是，对于任意的 $x\in\mathbf{X}$ 有

$$f(x)=f(\mathrm{Re}x)+if(\mathrm{Im}x)=\int(\mathrm{Re}x)x_1'd\mu+i\int(\mathrm{Re}x)x_2'd\mu$$

$$+i\int(\mathrm{Im}x)x_1'd\mu-\int(\mathrm{Im}x)x_2'd\mu=\int x\bar{x}'d\mu,$$

由此还推得 $x'\in\mathbf{X}'$.

由引理 IV. 3.1 的推论 2 显然可知，对于所有的 $x\in\mathbf{X}_+$ 关系式 $f_{x'}(x)\geqslant 0$ 等价于 $x'\geqslant\mathbf{0}$. 由此可知定理全部证毕.

定理 1 实质上已包含在 Канторович, Вулих 和 Пинскер 的书中，但是它仅于六十年代中才在一些作者的著作中，以明确的形式发表出来.

1.2. 最吸引人的是得到在 Banach 理想空间 $\mathbf{X}$ 上所有连续线性泛函的积分表示. 现在我们来讨论它.

设 $\mathbf{X}$ 是在(T,Σ,μ)上的赋范理想空间. 令

$$\mathbf{X}^\times=\{x'\in\mathbf{X}':\ f_{x'}\in\mathbf{X}^*\}.$$

对于任意的 $x'\in\mathbf{X}^\times$，令

$$\|x'\|=\|f_{x'}\|_{\mathbf{X}^*}=\sup\left\{\left|\int_T x\bar{x}'d\mu\right|:x\in\mathbf{X},\ \|x\|\leqslant 1\right\}.$$

定理 2. $\mathbf{X}^\times$ 是具有条件(B)与(C)的 Banach 理想空间.

证. 为了验证范数的单调性，只要证明

$$\|x'\|=\sup\left\{\int_T x|x'|d\mu:x\in\mathbf{X}_+,\|x\|\leqslant 1\right\}. \qquad (5)$$

如果

$$\|x'\|<\left|\int xx'd\mu\right|+\varepsilon,\ \|x\|\leqslant 1,$$

则 $x_1(t)=\mathrm{sign}\,x(t)\cdot x(t)$满足

$x_1\in\mathbf{X}$, $\|x_1\|\leqslant1$ 及 $\left|\int_T xx'd\mu\right|\leqslant\int_T|xx'|d\mu=\int_T x_1|x'|d\mu$,

从而推出等式(5).

为了验证(B)和(C), 由于引理 IV.3.5, 只要证明从 $x'_n\in\mathbf{X}^\times$, $x'\in\mathbf{S}$, $\|x'_n\|\leqslant1(n\in N)$, $x'_n\to x(\mu)$ 可推出 $x'\in\mathbf{X}^\times$及 $\|x'\|\leqslant1$. 事实上, 由 Fatou 引理, 对于任意的 $x\in\mathbf{X}_+$有

$$|f_{x'}(x)|\leqslant\int_T x|x'|d\mu\leqslant\sup_n\int_T x|x'_n|d\mu$$
$$\leqslant\|x\|\sup_n\|x'_n\|\leqslant\|x\|.$$

由此可见 $f_{x'}\in\mathbf{X}^*$, $x'\in\mathbf{X}^\times$ 及 $\|x'\|\leqslant1$, 定理证毕.

定理 3. 如果 $\mathbf{X}$ 是 Banach 理想空间, 则 $\mathbf{X}_n^\sim\subset\mathbf{X}^*$.

证. 设 $f\in\mathbf{X}_n^\sim$. 如果我们假设 $f\notin\mathbf{X}^*$, 则可以找到一个序列 $\{x_n\}$按范数趋于$\mathbf{0}$, 使得$|f(x_n)|\geqslant\in>0(n\in N)$. 由引理 IV.3.2及 $f\in\mathbf{X}_n^\sim$存在某个序列 $f(x_{n_k})\to0$, 从而得出矛盾.

于是, 如果 $\mathbf{X}$ 是 Banach 理想空间, 则 $\mathbf{X}^\times=\mathbf{X}'$(在此情形我们将利用记号 $\mathbf{X}'$).

定理 4. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范理想空间, 则 $\mathbf{X}_n^\sim\supset\mathbf{X}^*$ 的充要条件为 $\mathbf{X}$ 满足条件(A).

证. 设 $\mathbf{X}_n^\sim\supset\mathbf{X}^*$. 对于任意的 $x\in\mathbf{X}$有

$$\|x\|=\sup\{|f_{x'}(|x|)|:x'\in\mathbf{X}^\times,\ \|x'\|\leqslant1\}. \tag{6}$$

等式(6)的推导类似于等式(5)的推导.

假设条件(A) 在$\mathbf{X}$中不成立. 这时可在$\mathbf{X}$中找到序列$\mathbf{0}\leqslant x_n\downarrow\mathbf{0}$, 使得$\|x_n\|\geqslant\varepsilon>0(n\in N)$. 由于(6), 可以找到序列$\{x'_n\}\subset\mathbf{X}'_+$, $\|x'_n\|\leqslant1$, 使得$\int x_nx'_nd\mu\geqslant\varepsilon\ (n\in N)$. 因为空间 $\mathbf{X}^*$ 中的球是 (*)-弱紧的, 所以序列$\{f_{x'_n}\}$具有(*)-弱极限点 $f=f_{x'}\in\mathbf{X}^\times$, $\|x'\|\leqslant1$. 如果$x\geqslant\mathbf{0}$, 则 $f_{x'}(x)=\lim f_{x'_{n_k}}\geqslant0$*), 由此 $x'\geqslant\mathbf{0}$.

*) 一般来说, 对每个 x 选取自己的子序列.

因为 $x_n \downarrow \mathbf{0}$, 所以可以找到 $k \in N$, 使得

$$\int_T x_k x' d\mu < \varepsilon/4.$$

因为 $\tilde{f}$ 是极限点, 所以可以找到 $m \geqslant k$, 使得

$$\left| \int_T x_k x'_m d\mu - \int_T x_k x' d\mu \right| < \varepsilon/4.$$

利用 $x_m \leqslant x_k$, 推出

$$\int_T x_m x'_m d\mu \leqslant \int_T x_k x'_m d\mu < \varepsilon/2,$$

从而导致矛盾.

反之, 设在 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立. 取 $f \in \mathbf{X}^*$ 及 $x_n \to \mathbf{0}$ a. e.; $|x_n| \leqslant x \in \mathbf{X}$. 由条件(A), 按范数 $x_n \to \mathbf{0}$, 故 $f(x_n) \to 0$. 所以 $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}_n^{\sim}$. 从定理 3 和 4 我们可得下面的推论.

推论 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是 Banach 理想空间, 则 $\mathbf{X}_n^{\sim} = \mathbf{X}^*$ 的充要条件为 $\mathbf{X}$ 满足条件(A).

由推论 1 及定理 1 推出:

推论 2. 如果 $\mathbf{X}$ 是 Banach 想理空间, 则公式(1)给出在 $\mathbf{X}$ 上线性连续泛函的一般形式的充要条件为在 $\mathbf{X}$ 中条件(A) 成立.

推论 2 指出, 在 Banach 理想空间 $\mathbf{X}$ 上任何连续线性泛函具有积分表示的充要条件是在 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立. 在下一节中我们将把这个结果应用于具体的空间中去, 现在我们还讨论一下条件(A)不满足的情况.

1.3. 定理 5. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范理想空间, 则 $\operatorname{supp}\mathbf{X}' = \operatorname{supp}\mathbf{X}^{\times} = \operatorname{supp}\mathbf{X}$, 从而集合 $\mathbf{X}^* \cap \mathbf{X}_n^{\sim}$ 区分 $\mathbf{X}$ 上的点.

证. 设 $\operatorname{supp}\chi^{\times} \neq \operatorname{supp}\mathbf{X}$, 则可以找到 $A \in \Sigma(\mu)$, $\mu(A) > 0$, $\chi_A \in \mathbf{X}$, 使得对于任意的 $x' \in \mathbf{X}^{\times}$, $x' \chi_A = \mathbf{0}$, 或者同样的, 对于任意的 $f \in \mathbf{X}^* \cap \mathbf{X}_n^{\sim}$, $f(\chi_A) = 0$. 根据定理 IV. 3. 1 的推论在拓扑向量空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中单位球 $B_{\mathbf{X}}$ 有界, 而这时 $B_{\mathbf{X}} \cap \mathbf{L}^2(T, \Sigma, \mu)$ 在 $\mathbf{L}^2$ 中

的闭包集E也在$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$中有界. 由于$E$的有界性，可以找到数$\lambda>0$, 使得$\lambda\chi_A\notin E$. 根据定理 III. 2.6 推论, 存在$\mathbf{L}^2$上的连续线性泛函$f_0$, 使得

$$\sup\{|f_0(x)|: x\in E\}\leqslant 1<f_0(\lambda\chi_A). \tag{7}$$

由于定理 V. 3.1, 存在函数$z_0\in\mathbf{L}^2$使得

$$f_0(x)=\int_T xz_0 d\mu \qquad (x\in\mathbf{L}^2).$$

因为$\operatorname{supp}\mathbf{X}=\operatorname{supp}(\mathbf{X}\cap\mathbf{L}^2)$，所以对于任意的$x\in B_{\mathbf{X}}$可以找到序列$\{x_n\}\subset B_{\mathbf{X}}\cap\mathbf{L}^2$, $x_n\to x$ a. e. 根据 Fatou 定理及(7)式可得

$$\int|xz_0|d\mu\leqslant\sup_n\int|x_nz_0|d\mu\leqslant 1.$$

因此泛函

$$f(x)=\int xz_0 d\mu \qquad (x\in\mathbf{X})$$

在整个$\mathbf{X}$上有定义, 并且$f\in\mathbf{X}^*\cap\mathbf{X}_n^\sim$. 由(7)式, $f(\lambda\chi_A)>1$, 从而与$f(\chi_A)=0$矛盾, 于是$\operatorname{supp}\mathbf{X}^\times=\operatorname{supp}\mathbf{X}'=\operatorname{supp}\mathbf{X}$.

现在证明, $\mathbf{X}^*\cap\mathbf{X}_n^\sim$区分$\mathbf{X}$上的点, 即对于任意的$x\in\mathbf{X}$, $x\neq\mathbf{0}$, 存在$f\in\mathbf{X}^*\cap\mathbf{X}_n^\sim$, 使得$f(x)\neq 0$. 可以认为$x>\mathbf{0}$. 因为$\operatorname{supp}\mathbf{X}^\times=\operatorname{supp}\mathbf{X}$, 所以可以找到$A\in\Sigma(\mu)$, $\mu(A)>0$, $A\subset\operatorname{supp}x$, 使得$\chi_A\in\mathbf{X}^\times$. 这时$\int_T x\chi_A d\mu>0$. 定理证毕.

我们已证明了集合$\mathbf{X}^*\cap\mathbf{X}_n^\sim$在$\mathbf{X}$上是全的. 现在我们来考察什么时候由这个集能再生$\mathbf{X}$上的范数的问题.

定理 6 (Nakano-Amemiya-Mori). 如果$\mathbf{X}$是赋范理想空间, 则下列命题等价:

1) 对于任意的$x\in\mathbf{X}$, $\|x\|=\sup\{|f(x)|: f\in\mathbf{X}^*\cap\mathbf{X}_n^\sim, \|f\|\leqslant 1\}$;

2) 在$\mathbf{X}$中条件(C)成立.

证. 1)$\Longrightarrow$2). 如果$x_n, x\in\mathbf{X}$, $x_n\to x(\mu)$, $\|x_n\|\leqslant 1$, 则由 Fa-

tou 定理，$\|x\|\leqslant 1$. 这时，根据引理 IV. 3. 4 可知在 $\mathbf{X}$ 中(C)成立.

2) $\Longrightarrow$1). 先设 $\mathbf{X}\subset\mathbf{L}^1(T,\Sigma,\mu)$. 对于任意的 $n\in N$，令

$$\|x\|_n=\inf\{\max\{\|y\|,\ n\int_T z(t)d\mu\}:y,z\in\mathbf{X}_+,\ |x|=y+z\}$$
$$(x\in\mathbf{X}).$$

我们来验证 $\|\cdot\|_n$ 是 $\mathbf{X}$ 上的单调范数. 仅当从 $\|x\|_n=0$ 推出 $x=\mathbf{0}$ 时才是非平凡的. 取 $y_k,z_k\in\mathbf{X}_+$ 使得

$$|x|=y_k+z_k,\ \|y_k\|\to 0,\quad n\int|z_k|\,d\mu\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

这时，根据定理 IV. 3. 1, $y_k\to\mathbf{0}(\mu)$ 且 $z_k\to\mathbf{0}(\mu)$, 因而 $x=\mathbf{0}$.

我们指出

$$\|x\|\geqslant\|x\|_n,\quad n\int|x|\,d\mu\geqslant\|x\|_n.$$

此外，显然有

$$\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\cdots\leqslant\|x\|_n\leqslant\|x\|_{n+1}\leqslant\cdots.$$

我们来证明

$$\|x\|_n\to\|x\|.\tag{8}$$

取 $R>\|x\|_n$ $(n\in N)$. 这时存在 $y_n,z_n\in\mathbf{X}_+$ 使得

$$|x|=y_n+z_n,\quad\|y_n\|<R,\quad\int_T|z_n|\,d\mu<R/n.$$

由此 $z_n\to\mathbf{0}(\mu)$, 而这时 $y_n=|x|-z_n\to|x|(\mu)$. 因为 $\mathbf{0}\leqslant y_n\leqslant|x|$，所以由条件(C)

$$\|x\|\leqslant\sup\|y_n\|\leqslant R.$$

从而证明了(8)成立. 现在来证明 1). 可以认为 $x\geqslant\mathbf{0}$. 由于(8)，对于任意的 $\varepsilon>0$，可以找到 $n\in N$，使得 $\|x\|_n>\|x\|-\varepsilon$.

考察赋范理想空间$(\mathbf{X},\|\cdot\|_n)$. 因为$\|x\|_n\leqslant n\int|x|\,d\mu$，所以$\|\cdot\|_n$是$(o)$-连续的，故由定理 4 推出 $(\mathbf{X},\|\cdot\|_n)^*\subset\mathbf{X}_n^\sim$，这时可以找到 $f\in(\mathbf{X},\|\cdot\|_n)^*$使得

$$\|f\|_{(\mathbf{X},\|\cdot\|_n)^*}\leqslant 1,\quad \|x\|_n<|f(x)|+\varepsilon.$$

由此

$$\|f\|_{\mathbf{X}^*}\leqslant\|f\|_{(\mathbf{X},\|\cdot\|_n)^*}\leqslant 1,\quad \|x\|<\|x\|_n+\varepsilon<|f(x)|+2\varepsilon,$$

这就证明了当 $\mathbf{X}\subset\mathbf{L}^1$ 时 1)成立. 利用引理 IV. 3. 1 的推论 1, 可把一般情形化为前面讨论过的情形.

设 $\mathbf{X}$ 是理想空间, 这时令 $\mathbf{X}''=(\mathbf{X}')'$. 显然, $\mathbf{X}\subset\mathbf{X}''$. 我们考察在什么时候 $\mathbf{X}=\mathbf{X}''$ 的问题. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范理想空间, 则令 $\mathbf{X}^{\times\times}=(\mathbf{X}^{\times})^{\times}$. 显然, $\mathbf{X}\subset\mathbf{X}^{\times\times}$. 我们用 $\|\cdot\|^{\times\times}$表示在 $\mathbf{X}^{\times\times}$ 上的范数, 则不等式 $\|x\|\geqslant\|x\|^{\times\times}(x\in\mathbf{X})$成立.

定理 7. 对于赋范理想空间 $\mathbf{X}$, 下列命题等价:

1) 在 $\mathbf{X}$ 中条件(B)和(C)成立;

2) $\mathbf{X}=\mathbf{X}^{\times\times}$及$\|\cdot\|=\|\cdot\|^{\times\times}$.

证. 1) $\Longrightarrow$2) . 因为在 $\mathbf{X}$ 中条件(C) 成立, 则根据定理 6, 对于 $x\in\mathbf{X}$ 有 $\|x\|=\|x\|^{\times\times}$. 现在来证明 $\mathbf{X}=\mathbf{X}^{\times\times}$. 因为 $\operatorname{supp}\mathbf{X}=\operatorname{supp}\mathbf{X}^{\times}=\operatorname{supp}\mathbf{X}^{\times\times}$, 所以对于任意的 $x\in(\mathbf{X}^{\times\times})_+$, 存在序列 $\{x_n\}\subset\mathbf{X}_+$, $\mathbf{0}\leqslant x_n\uparrow x$(引理 IV. 3. 1). 利用(B)即得 $x\in\mathbf{X}$.

2)$\Longrightarrow$1) . 因为根据定理 2, 在 $\mathbf{X}^{\times\times}$中条件 (B) 和 (C) 成立.

在下一节中我们将把所得的结果应用到具体空间中去. 所指定的文献, 请参见第十章.

§ 2. 空间 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$

2.1. 现在把上节的定理应用到具体可测函数空间上去, 首先应用于空间 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$, 其中测度 μ 我们假设是 σ-有限的(虽然当 $1<p<\infty$ 时这个假设并非必要).

定理 1. 设 $1\leqslant p<\infty$, $1/p+1/q=1$. 空间 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)$中线性连续泛函 f 的一般形式由下式

$$f(x)=\int_T x(t)\overline{y(t)}d\mu, \quad x\in\mathbf{L}^p \tag{1}$$

给出，其中 y 是 $\mathbf{L}^q(T, \Sigma, \mu)$ 中任意元素，同时

$$\|f\|=\|y\|_{\mathbf{L}^q} \tag{2}$$

证. 因为在 $\mathbf{L}^p(1\leqslant p<\infty)$ 中满足条件(A)(定理 IV. 3.5)，所以根据定理 1.4 的推论 2，公式(1) 给出线性连续泛函的一般形式. 由 V. 2.3 即可推出等式(2).

现在考虑空间 $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$. 因为在这空间中非平凡的情形条件(A)并不成立(参见 IV. 3.3)，所以公式(1) (其中 $y\in\mathbf{L}^1(T, \Sigma, \mu)$)已经不给出线性连续泛函的一般形式.

用 $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$表示满足下列条件的在 Σ 上的(实或复) 可加函数(bounded additive)φ 的集合:

1) 由 $\mu(A)=0$ 推出 $\varphi(A)=0$;

2) 全变差$|\varphi|(T)<\infty$.

如果在集 $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$上按下列公式

$(\lambda\varphi)(A)=\lambda\varphi(A), (\varphi_1+\varphi_2)(A)=\varphi_1(A)+\varphi_2(A), A\in\Sigma$, 引进线性运算，则 $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$变成向量空间. 用公式$\|\varphi\|=|\varphi|(T)$ 定义 $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$上的范数，使 $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$成为 B-空间.

对于 $x\in\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$，我们来定义$\int_T x(t)d\varphi$. 研究形如

$$x(t)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\chi_{A_i}(t) \tag{3}$$

的可测的有限个值的函数的集合 Ω，其中 $\lambda_i\in\boldsymbol{R}$ 或 $\mathbf{C}$, $A_i\in\Sigma$ ($i=1, 2, \cdots, k$)，并且集 A_i 两两不相交. 令

$$\int_T x(t)d\varphi=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varphi(A_i).$$

留给读者验证，$\int_T xd\varphi$不依赖于 x 的形式(3)的表示式. 由定理

I. 6. 3 可知, Ω 在 $\mathbf{L}^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$中稠密. 显然, $\int_T x d\varphi$ 是 Ω 上的线性泛函, 并且

$$\left|\int_T x d\varphi\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i\|\varphi(A_i)| \leqslant \max_{i=1}^{k} |\lambda_i\|\varphi|(T)$$
$$\leqslant \|x\|_{\mathbf{L}^{\infty}}\|\varphi\|.$$

根据定理 V. 8. 2, $\int_T x d\varphi$ 可以连续地线性扩张到整个 $\mathbf{L}^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$上, 我们仍用同样的记号表示.

定理 2. 在空间 $\mathbf{L}^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$中线性连续泛函 f 的一般形式可用公式

$$f(x)=\int_T x(t) d\varphi \tag{4}$$

给出, 其中 φ 是 $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$中的任意元素*). 同时, $\|f\|=\|\varphi\|$, 且对于任意的 $A\in\Sigma$, $\varphi(A)\geqslant 0$ 的充要条件为对于任意的 $x\geqslant \mathbf{0}$, $x\in\mathbf{L}^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$有 $f(x)\geqslant 0$.

证. 根据$\int x d\varphi$ 的作法, 我们已经证明, 公式(4)定义 $f\in(\mathbf{L}^{\infty})^*$ 且$\|f\|\leqslant\|\varphi\|$. 我们来证明相反的不等式. 对于任何 $\varepsilon>0$, 可以找到$A_i\in\Sigma$ 使得

$$\|\varphi\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\varphi(A_i)| + \varepsilon, \ A_i \cap A_j=\varnothing \ (i\neq j), \ \bigcup_{i=1}^{k} A_i=T.$$

设 $\tilde{x}=\sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign}\varphi(A_i) \chi_{A_i}$. 这时$\|\tilde{x}\|\leqslant 1$ 且

$$\int_T \tilde{x} d\varphi=\sum_{i=1}^{k} |\varphi(A_i)|,$$

由此 $\|\varphi\| \leqslant \int_T \tilde{x} d\varphi+\varepsilon \leqslant \|f\|+\varepsilon$. 因而, $\|f\|=\|\varphi\|$.

---

*) 如果空间 $\mathbf{L}^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$是复的, 则必须取复的$\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$, 而如果$\mathbf{L}^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$是实的, 则取实的 $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$.

余下我们还须证明任意的 $f\in(\mathbf{L}^{\infty})^*$ 可以表示成(4)这种形式. 令 $\varphi(A)=f(\chi_A)$ $(A\in\Sigma)$.

这时 $|\varphi|(T)\leqslant\|f\|$（参看上面的讨论）且 $\varphi\in\mathbf{ba}(\Sigma,\mu)$. 由 $\int_T xd\varphi$ 的构造, 显然 $f(x)=\int_T xd\varphi(x\in\mathbf{L}^{\infty})$. 由所作的构造显然也断定 φ 是正的, 定理证毕.

我们指出, 用公式(1)（对应地, 公式(4)）定义的映射 $y\in\mathbf{L}^q\to f\in(\mathbf{L}^p)^*$（对应地, $\varphi\in\mathbf{ba}\to f\in(\mathbf{L}^{\infty})^*$）是 $\mathbf{L}^q$ 到 $(\mathbf{L}^p)^*$ 上（对应地, $\mathbf{ba}$ 到 $\mathbf{L}^{\infty}$ 上）的线性等距. 所以, 我们常常称 $\mathbf{L}^q$ 共轭于 $\mathbf{L}^p(1\leqslant p<\infty)$, 并记为 $(\mathbf{L}^p)^*=\mathbf{L}^q$. 对于下面得到的表示式, 我们采用类似的简略记号.

从所得到的等式 $(\mathbf{L}^p)^{**}=(\mathbf{L}^q)^*=\mathbf{L}^p(1<p<\infty)$ 还不能得出空间 $\mathbf{L}^p$ 是自反空间的结论, 因为等式 $(\mathbf{L}^p)^{**}=\mathbf{L}^p$ 是按照线性等距的意义来理解的, 它可能并不是自反性定义所要求的特殊形式（参见 V. 7. 3）. 但是, 从定理 1 的具体等距的讨论可以得知空间 $\mathbf{L}^p(1<p<\infty)$ 是自反的. 事实上, 取 $F\in(\mathbf{L}^p)^{**}$, 我们来证明, 可以找到 $x\in\mathbf{L}^p$, 使得

$$F(f)=\overline{f(x)},\quad f\in(\mathbf{L}^p)^*. \tag{5}$$

用 α 表示这样的线性等距映射, 对于每个 $y\in\mathbf{L}^q$, 按照公式(1)对应一个泛函 $f\in(\mathbf{L}^p)^*$. 如果设 $F_1(y)=F(\alpha y)$, $y\in\mathbf{L}^q$, 则 $F_1\in(\mathbf{L}^q)^*$. 于是, 根据定理 1 可以求出 $x\in\mathbf{L}^p$, 使得

$$F_1(y)=\int y(t)\overline{x(t)}\,d\mu,\quad y\in\mathbf{L}^q.$$

我们来验证, 对于这个 $x\in\mathbf{L}^p$, 等式(5)成立. 如果 $f\in(\mathbf{L}^p)^*$ 及 $y=\alpha^{-1}(f)\in\mathbf{L}^q$, 则

$$F(f)=F_1(y)=\int y(t)\overline{x(t)}\,d\mu=\overline{\int x(t)\overline{y(t)}d\mu}=\overline{f(x)}.$$

当 $p=1$时典型嵌入 $\pi:\mathbf{L}^1\to(\mathbf{L}^1)^{**}$ 把 $\mathbf{L}^1$ 变为$\mathbf{L}^\infty$ 上具有积分表示(1)的泛函集合中，如同上面所指出的，在 $\mathbf{L}^1$ 为无限维情形，这集合比$(\mathbf{L}^1)^{**}=(\mathbf{L}^\infty)^*$确实要狭. 故在无限维情形 $\mathbf{L}^1$ 和 $\mathbf{L}^\infty=(\mathbf{L}^1)^*$ 不是自反的.

在空间 $\mathbf{L}^p(a,b)$ $(1<p<\infty)$ 中线性泛函的一般形式是 F.Riesz 给出的，在 $\mathbf{L}^1$ (a,b) 中的线性泛函一般形式是 Steinhaus 给出的. (分别参见 F. Riesz[2]及 Steinhaus[1])；在抽象测度上推广工作是 Nikodým 得到的.

2.2. 简略地讨论一下序列空间这个特殊情形. 从定理 1 得到：

定理 3. 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1/p+1/q=1$. 空间 $\mathbf{l}^p$ 中线性连续泛函 f 的一般形式，由下式

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k,\quad x=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathbf{l}^p$$

给出，其中 $y=\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$是 $\mathbf{l}^q$ 中任意元素. 并且，$\|f\|=\|y\|_{\mathbf{l}^q}$.

现在研究空间 $\mathbf{c}_0$(参见 IV. 3. 4)，我们来证明，$(\mathbf{c}_0)^*=\mathbf{l}^1$.

定理 4. 空间 $\mathbf{c}_0$ 中线性连续泛函 f 的一般形式由下式

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k,\qquad x=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathbf{c}_0 \tag{6}$$

给出，其中 $y=\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbf{l}^1$ 中任意元素. 并且$\|f\|=\|y\|_{\mathbf{l}^1}$.

证. 因为 $\mathbf{c}_0$ 中条件(A)成立，所以泛函的一般形式由(6)式给出. 设 $f\in(\mathbf{c}_0)^*$. 令 $\tilde{x}=\{\tilde{\xi}_k\}$，其中

$$\tilde{\xi}_k=\begin{cases}\operatorname{sign}\eta_k, & k\leqslant n,\\ 0, & k>n.\end{cases}$$

因为 $\tilde{x}\in\mathbf{c}_0$ 及$\|\tilde{x}\|\leqslant 1$，所以

$$f(\tilde{x})=\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|\leqslant\|f\|.$$

当 $n\to\infty$ 时得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|\leqslant\|f\|, \tag{7}$$

即 $y\in\mathbf{l}^1$ 且 $\|y\|_{\mathbf{l}^1}\leqslant\|f\|$.

如果 $y\in\mathbf{l}^1$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\xi_k\right|\leqslant\max|\xi_k|\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|=\|y\|_{\mathbf{l}^1}\|x\|.$$

由通常所用的方法可推出, f 是线性泛函且 $\|f\|\leqslant\|y\|_{\mathbf{l}^1}$, 再由(7)式即得等式 $\|f\|=\|y\|_{\mathbf{l}^1}$.

虽然空间 $\mathbf{c}$ 不是 Banach 理想空间, 再附加作些讨论也可在其中建立线性泛函的一般形式.

在空间 $\mathbf{c}$ 中考虑元素 $e_0=(1,1,\cdots,1,\cdots)$, 如果 $x=\{\xi_k\}$ 是 $\mathbf{c}$ 中任意元素, 且 $\xi_0=\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k$, 则显然 $x-\xi_0e_0\in\mathbf{c}_0$.

设 f 是 $\mathbf{c}$ 中的线性连续泛函; 仅在 $\mathbf{c}_0$ 上研究它, 我们也得到在其上的线性连续泛函 f_0. 设(对于 $x\in\mathbf{c}_0$)

$$f_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\xi_k \qquad (y=\{\eta_k\}\in\mathbf{l}^1).$$

记 $\eta_0=f(e_0)$, 对于任意的 $x\in\mathbf{c}$ 可以求得

$$f(x)=f(\xi_0e_0)+f_0(x-\xi_0e_0)=\eta_0\xi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(\xi_k-\xi_0).$$

令 $\alpha=\eta_0-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k$, 最后得

$$f(x)=\alpha\xi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\xi_k=\alpha\lim_{k\to\infty}\xi_k+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\xi_k. \tag{8}$$

我们留给读者证明, (8)式给出 $\mathbf{c}$ 中线性连续泛函的一般形式且

$$\|f\|=|\alpha|+\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|.$$

再请读者证明，B-空间 $\mathbf{c}_0$ 与 $\mathbf{c}$ 不是自反的.

2.3. 最后再简略地讨论一下在第IV章§3中引进的另外一些可测函数空间中泛函的解析表示.

先讨论 Orlicz 空间. 我们有等式(按包含的元素)

$$(\mathbf{E}_M)' = (\mathbf{L}_M)' = \mathbf{L}_{M^*}.$$

定理 5. 在空间 $\mathbf{L}_M(T, \Sigma, \mu)$ 中 (o)-连续线性泛函 f 的一般形式由下式

$$f(x) = \int_T x(t)\overline{y(t)}d\mu, \quad x \in \mathbf{L}_M \tag{9}$$

给出，其中 y 是 $\mathbf{L}_{M^*}(T, \Sigma, \mu)$ 中任意元素. 同时

$$\|f\|_{(\ \ _{M},\|\cdot\|_1)^*} = \|y\|_2, \quad \|f\|_{(\mathbf{L}_M,\|\cdot\|_2)^*} = \|y\|_1. \tag{10}$$

$f \in (\mathbf{E}_M)^*$ 的一般形式也由(9)式给出，并且满足类似于(10)的式子(其中以 $\mathbf{E}_M$ 代替 $\mathbf{L}_M$). 因此，(9)式给出 $\mathbf{L}_M$ 中线性连续泛函一般形式的充要条件为 M 满足 Δ_2-条件. Orlicz 空间 $\mathbf{L}_M$ 自反的充要条件为 M 与 M^* 满足 Δ_2-条件. 上述结果的证明可参见 Красносельский 和 Рутицкий. T.Ando[1]得到了在任意 Orlicz 空间中所有线性连续泛函的表示.

下面的式子建立了 Lorentz 空间与 Марцинкевич 空间之间的联系，其中等式理解为组成元素的相等和范数相等:

$$\mathbf{M}(\psi)' = \Lambda(\psi), \quad \Lambda(\psi)' = \mathbf{M}(\psi).$$

因为 $\Lambda(\psi)$ 中满足条件(A)，所以 $\Lambda(\psi)^* = \mathbf{M}(\psi)$. 空间 $\mathbf{M}(\psi)^*$ 其实比 $\Lambda(\psi)$ 更宽.

§3. 空间 C(K) 中线性泛函的一般形式

3.1. 设 K 是紧集. 用 $\mathbf{rca}(K)$ 表示在 K 中所有 Borel 集的 σ-代数 $\mathscr{B}$ 上给定的(实或复的)正则可数可加的，并且具有有限全变差 $|\varphi|(K) < \infty$ 的函数全体构成的集合.

如果类似于 $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$ 中所做的，在 $\mathbf{rca}(K)$ 中引进线性运算，且令 $\|\varphi\| = |\varphi|(K)$，则 $\mathbf{rca}(K)$ 变成 B-空间.

定理 1. 空间 $\mathbf{C}(K)$ 中线性连续泛函 f 的一般形式由下式

$$f(x) = \int_K x(t)d\varphi, \quad x(t) \in \mathbf{C}(K)$$

给出，其中φ是 rca(K)中任意的元素*)．同时$\|f\|=\|\varphi\|$且对于任意的$A\in\mathscr{B}$, $\varphi(A)\geqslant 0$的充要条件为对于任意的$x\in\mathbf{C}(K)$，$f(x)\geqslant 0$.

由定理1建立的对应是$\mathbf{C}(K)^*$与 rca(K)的线性等距．定理1的证明相当冗长并且还要引进测度论和拓扑中的结果，所以这里就不证了（证明可参见 Dunford 和 Schwartz-I, Zaanen-II)．当$K=[0,\ 1]$时的定理1是由 F. Riesz 证明的（所以通常把它叫做 Riesz 定理)，一般形式是 A. A. Марков 和 C. Kakutani 给出的．

现在对于实空间$\mathbf{C}[a,b]$的情形重新讨论定理1．首先补充一些有界变差函数的知识(参见 IV. 4. 2)．

考虑在区间$[a,b]$上的递增函数$\varphi(t)$．设$a<t_1<t_2<\cdots<t_n<b$是任意的一组点．取t'_k与t''_k使得$a<t'_1<t_1<t''_1<t'_2<t_2<t''_2<\cdots<t''_n<b$．显然有

$$\sum_{k=1}^{n}[\varphi(t''_k)-\varphi(t'_k)]\leqslant\varphi(b)-\varphi(a).$$

令$t'_k\to t_k-0$, $t''_k\to t_k+0$, 取极限后得

$$\sum_{k=1}^{n}[\varphi(t_k+0)-\varphi(t_k-0)]\leqslant\varphi(b)-\varphi(a).$$

由此推出，单调函数跃度大于给定的正数e的个数只有有限个．因此，单调函数的全体间断点个数不能大于可数个．

因为任何有界变差函数可以表示为两个递增函数之差，所以上述结果对有界变差函数也成立．

由此推出，有界变差函数的连续点集在区间$[a,b]$中稠密．

---

*) 如果空间$\mathbf{C}(K)$是复的，则应取复的 rca(K)，如果$\mathbf{C}(K)$是实的，则取实的 rca(K).

设 $g(t)$ 是有界变差函数．考察函数 $\tilde{g}(t)$，它用下面等式定义：

$$\tilde{g}(t)=\frac{1}{2}[g(t+0)+g(t-0)] \qquad (a<t<b),$$

$$\tilde{g}(b)=g(b) \qquad \tilde{g}(a)=g(a).$$

因此函数 $\tilde{g}(t)$ 在 $g(t)$ 的连续点处和 $t=a, b$ 处与 $g(t)$ 一致．我们称 $\tilde{g}(t)$ 为校正函数．

如果函数 $g(t)$ 与其校正函数一致，则称它是正则的．以 $\mathbf{V}_0$ 表示在 $t=a$ 处为零的一切正则函数的集合．显然，$\mathbf{V}_0$ 是一切有界变差函数所成空间 $\mathbf{V}$ 的线性集合．容易验证，这是个闭集．因此，$\mathbf{V}_0$ 是 B-空间 $\mathbf{V}$ 的闭子空间，它本身也是 B-空间．

对于任何函数 $x\in\mathbf{C}[a, b]$，定义关于有界变差函数 $g(t)$ 的 Stieltjes 积分 $\int_a^b x(t)dg(t)$（参见 Вулих-III，第十一章，§5）．

定理 2. 在空间 $\mathbf{C}[a, b]$ 中线性连续泛函的一般形式由下列 Stieltjes 积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t)$$

给出，其中 $g(t)$ 是任意的有界变差函数．如果 $g(t)$ 同时是正则函数，则

$$\|f\|=\bigvee_a^b(g),$$

泛函 f 唯一地确定函数 $g\in\mathbf{V}_0$．

因为连续函数的 Stieltjes 积分可归结为关于可数可加集合函数的积分（参见 Вулих-III，第十一章，§5），所以不难从定理 1 推得定理 2．请读者自行详细验证（不依靠定理 1 的证明，参见 Колмогоров 和 Фомин）．空间 $\mathbf{C}(K)$ 在无限维情形（即当紧集 K 是无限集时）不是自反空间．读者自行验证，泛函 $F_t(g)=g(t)$，$g\in\mathbf{V}_0$，其中 $t\in[0, 1]$ 是指定的点，它不包含在空间 $\mathbf{C}(0, 1)$ 在典型嵌入时的

象之中.

3.2. 我们来研究空间 $\mathbf{C}[a,b]$ 中线性泛函一般形式这个定理在所谓矩量问题中的运用.

设在赋范空间 $\mathbf{X}$ 中给出线性独立元素序列 $\{x_n\}$. 取任意的线性泛函 $f\in\mathbf{X}$, 构成数序列

$$f(x_n)=\mu_n \qquad (n=0,1,\cdots). \tag{1}$$

我们把由序列 $\{\mu_n\}$ 来求 f 这种问题叫做广义矩量问题. 要解决这样一般地提出的问题, 我们不能推进多少. 然而, 在一般情形我们总能讲讲矩量问题解的某些可解性和唯一性条件.

如果集合 $\{x_n\}$ 是基本的, 则由 III.3.2 所述, 泛函 f(假设它存在)由序列 $\{\mu_n\}$ 唯一地确定. 不难看出, 系 $\{x_n\}$ 的基本性也是矩量问题唯一解的必要条件.

其次, 如果以 φ 表示定义在集 $\{x_n\}$ 上的泛函(可能不是可加的):

$$\varphi(x_n)=\mu_n \qquad (n=0,1,\cdots), \tag{2}$$

则因为泛函 f 的存在性表示 φ 在线性包 $\mathscr{L}(\{x_n\})$ 上线性扩张的可能性, 由定理 V.8.1 得出矩量问题可解的充要条件为存在这样的常数 $M>0$, 使得对于任意的 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 不等式

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\mu_k\right|\leqslant M\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k\right\| \tag{3}$$

成立. 或换言之

$$\sup\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k\mu_k\right|}{\left\|\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k x_k\right\|}<\infty, \tag{4}$$

其中上确界是对所有可能的 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n(n=0,1,\cdots)$ 来取的.

从所有的各种具体的矩量问题中, 我们只研究幂矩量问题, 其

中 $\mathbf{X}=\mathbf{C}[a, b]$，而

$$x_n(t)=t^n \qquad (n=0, 1, \cdots). \tag{5}$$

考虑到空间 $\mathbf{C}[a, b]$ 中线性泛函的一般形式，可以把所研究的问题表述如下：确定在什么条件下存在有界变差函数 $g(t)$ 使得

$$\int_a^b t^n dg(t)=\mu_n \qquad (n=0, 1, \cdots). \tag{6}$$

我们指出，因为在此情形系$\{x_n\}$在空间 $\mathbf{C}[a, b]$ 中是完全的，所以如果矩量问题的解存在，则解是唯一的.

矩量问题(6)可解性条件(4)可表述为下列形式：

$$\sup \frac{\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k \mu_k\right|}{\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k t^k\right|}<\infty. \tag{7}$$

最后，我们引进关于在区间$[0, 1]$中幂矩量问题的一个比较具体的结果.

定理 2(Hausdorff). 存在有界变差函数$g(t)$，使得

$$\int_0^1 t^n dg(t)=\mu_n \qquad (n=0, 1, \cdots) \tag{8}$$

的充要条件为

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|\Delta^{n-k}\mu_k\right| \leqslant M \qquad (n=0, 1, \cdots), \tag{9}$$

其中 C_n^k 是二项式系数，$\Delta^m \mu_k$ 表示序列$\{\mu_k\}$的m次差分，由下列等式归纳地定义

$$\Delta^{m+1}\mu_k=\Delta^m \mu_k-\Delta^m \mu_{k+1}, \qquad \Delta^0 \mu_k=\mu_k$$
$$(m=0, 1, \cdots; \qquad k=0, 1, \cdots). \tag{10}$$

证. 必要性. 设矩量问题(8)是可解的. 以 f 表示在空间 $\mathbf{C}[0, 1]$中由函数 $g(t)$产生的线性泛函，其次记

$$x_k^{(m)}(t)=t^k(1-t)^m \qquad (m,k=0,1,\cdots). \tag{11}$$

因为

$$x_k^{(m+1)}(t)=t^k(1-t)^{m+1}=t^k(1-t)^m-t^{k+1}(1-t)^m$$
$$=x_k^{(m)}(t)-x_{k+1}^{(m)}(t),$$

所以

$$f(x_k^{(m+1)})=f(x_k^{(m)})-f(x_{k+1}^{(m)}) \qquad (m,k=0,1,\cdots).$$

此外

$$f(x_k^{(0)})=\mu_k.$$

注意到(10)式,(利用归纳法)容易证实

$$f(x_k^{(m)})=\Delta^m\mu_k \qquad (m,k=0,1,\cdots).$$

现在设 $\theta_k^{(n)}=\operatorname{sign}\Delta^{n-k}\mu_k(k=0,1,\cdots,n)$. 研究函数

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=0}^{n}\theta_k^{(n)}C_n^k x_k^{(n-k)}(t).$$

由于在[0,1]中 $x_k^{(m)}(t)\geqslant 0$, 故

$$|\tilde{x}(t)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}C_n^k x_k^{(n-k)}(t)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^k(1-t)^{n-k}=[t+(1-t)]^n=1.$$

从而 $\|\tilde{x}\|\leqslant 1$. 于是

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\theta_k^{(n)}\Delta^{n-k}\mu_k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\theta_k^{(n)}f(x_k^{(n-k)})$$
$$=f(\tilde{x})\leqslant\|f\| \qquad (n=0,1,\cdots).$$

如果令 $M=\|f\|$, 即证得必要条件.

充分性. 设 φ 为由(2)式表示的在集合 $\{x_n\}$ 上给定的泛函,其中取 $x_n(t)=t^n$. 把 φ 扩张到集合 $\{x_n\}$ 的线性包上,即扩张到多项式全体的集合上. 就是,如果

$$x(t)=\lambda_0+\lambda_1 t+\cdots+\lambda_n t^n,$$

则令

$$f_0(x)=\lambda_0\mu_0+\lambda_1\mu_1+\cdots+\lambda_n\mu_n.$$

由于函数 $x_n(t)$的线性独立性，这样定义的 f_0 是唯一的.

这样定义的泛函 f_0 显然是可加的和齐次的. 我们来证条件(10)保证了它的连续性.

设 $\mathbf{H}_m$ 是次数不大于m的多项式的集合，我们指出，与此条件无关，泛函 f_0 在集 $\mathbf{H}_m$上连续，因为 $\mathbf{H}_m$ 是有限维空间(多项式的系数作为坐标)，所以在 $\mathbf{H}_m$ 中的收敛是按坐标收敛.

保持前面的记号，如同前面一样得知

$$f_0(x_k^{(s)})=\Delta^s\mu_k \qquad (s, k=0, 1, \cdots).$$

现在考虑任意的多项式 $x(t)$. 设它的次数为 m. 引进对应的 Bernstein 多项式

$$x_n(t)=B_n(x, t)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x\left(\frac{k}{n}\right)t^k(1-t)^{n-k}. \tag{12}$$

大家知道，对于任意的 $n=1, 2, \cdots$, 多项式 $x_n(t)$的次数不超过 m*)，又因为当 $n\to\infty$ 时 $x_n(t)$一致收敛于$x(t)$(参见 Натансон-

---

*) 现在来证明这个结论. 对(12)求导，把第一个求和号的指标由 k 改为 $k+1$, 即得

$$\frac{dx_n}{dt}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k[kt^{k-1}(1-t)^{n-k}-(n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}]x\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k t^k(1-t)^{n-1-k}\left[x\left(\frac{k+1}{n}\right)-x\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

用归纳法可得

$$\frac{d^s x_n}{dt^s}=n(n-1)\cdots(n-s+1)\sum_{k=0}^{n-s} C_{n-s}^k t^k(1-t)^{n-s-k}\Delta^s x\left(\frac{k}{n}\right).$$

因为 $x(t)$是m次多项式，所以 $\Delta^{m+1}x\left(\frac{k}{n}\right)=0$, 可见$\frac{d^{m+1}x_n}{dt^{m+1}}=0$, 由此推出，$x_n(t)$ 是次数不超过 m 的多项式.

I),所以由上面的讨论可知

$$f_0(x_n)\to f_0(x),$$

但

$$|f_0(x_n)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left|x\left(\frac{k}{n}\right)\right||f_0(x_n^{(n-k)})|$$

$$\leqslant\|x\|\sum_{k=0}^{n}C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|\leqslant M\|x\|.$$

令 $n\to\infty$,上式左端取极限后得

$$|f_0(x)|\leqslant M\|x\|.$$

因为 x 是任意多项式,故证得 f_0 的连续性. 现在只要把 f_0 连续扩张到整个 $\mathbf{C}[0,1]$ 上(参见 IV. 8. 2)并把空间 $\mathbf{C}[0,1]$ 中的线性泛函一般形式定理应用到扩张后得到的泛函 f 上,据此

$$f(x)=\int_0^1 x(t)dg(t)\qquad(x\in\mathbf{C}[0,1]),$$

其中 $g(t)$ 是有界变差函数.

定理完全证毕。

第七章　线性算子序列

有大量具体的数学问题可以用线性算子序列这种抽象形式来统一描述. 例如, 研究 Fourier 级数和插值多项式的收敛性, 研究机械求积公式, 奇异积分的理论等, 都属于这类问题.

同时, 所研究的问题在抽象的形式下通常归结为构造线性算子序列的收敛性, 或是证明这一序列的算子范数的有界性, 或是其它类似的问题.

§1. 基本定理

1.1. 下面的定理 1 在线性算子序列的有关定理中起主要的作用.

定理 1. 如果从 B- 空间 $\mathbf{X}$ 到赋范空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子序列 $\{U_n\}$ 在每一点有界, 即如果

$$\sup_n \|U_n(x)\| < \infty \qquad (x \in \mathbf{X}), \tag{1}$$

则这些算子的范数总体有界:

$$\|U_n\| \leqslant M \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

证. 首先指出, 如果已知线性算子在某个球内所取值的界限:

$$\|U(x)\| \leqslant B \qquad (x \in B_\delta(x_0)),$$

则可以给出其范数的估计:

$$\|U\| \leqslant 2B/\delta.$$

事实上, 取满足 $\|x'\| < 1$ 的任何 x', 有

$$x = x_0 + \delta x' \in B_\delta(x_0).$$

于是

$$\|U(x_0)+\delta U(x')\|\leqslant B,$$

所以

$$\|U(x')\|=\frac{1}{\delta}\|U(\delta x')\|\leqslant\frac{1}{\delta}[\|U(x_0)+\delta U(x')\|+\|U(x_0)\|]\leqslant\frac{2B}{\delta},$$

由此推得$\|U\|\leqslant 2B/\delta$.

现在证明定理. 假设序列$\{\|U_n\|\}$无界. 我们引入泛函

$$p(x)=\sup_n\|U_n(x)\|.$$

它在每个球内都是无界的,因为如果在 $B_\delta(x_0)$内 $p(x)\leqslant B$,则由上面已经指出的可知对于任何 $n=1,2,\cdots$都有$\|U_n\|\leqslant\frac{2B}{\delta}$.

由此推得集合 $E_k=\{x\in \mathbf{X}:p(x)>k\}$在 $\mathbf{X}$ 内稠密. 其次, 集合 E_k 是开的, 因为如果 $x_0\in E_k$, 即 $p(x_0)>k$, 则对某个 n_0 将有$\|U_{n_0}(x_0)\|>k$,从而根据$\|U_{n_0}(x)\|$的连续性,对于充分靠近 x_0 的 x 也有 $\|U_{n_0}(x)\|>k$.

在 $\mathbf{X}$ 内是开的和稠密的集合 E_k 是剩余集(参看 I. 4. 7). 但可数剩余集系的交也是剩余集,因而是非空的. 如果$x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$,则

$$\sup_n\|U_n(x_0)\|=\infty$$

与假设矛盾.

注. 定理的条件可以减弱为只要求在第二纲集上(1)式成立,而不必在整个 $\mathbf{X}$ 上成立(不假定 $\mathbf{X}$ 完备).

这个定理也可以陈述如下(**奇点固定原理**): 如果

$$\sup_n\|U_n\|=\infty,$$

则可以找到一个元素 $x_0\in\mathbf{X}$ 使得

$$\sup_n\|U_n(x_0)\|=\infty. \qquad (2)$$

并且满足(2)的元素所成的集合是一剩余集.

这种说法可以把上述命题作某些推广. 设$\{U_n^{(k)}\}(k, n=1, 2, \cdots)$是由 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子, 并且

$$\sup_n \|U_n^{(k)}\| = \infty \qquad (k=1, 2, \cdots),$$

则存在这样的元素 x_0, 使得

$$\sup_n \|U_n^{(k)}(x_0)\| = \infty \qquad (k=1, 2, \cdots). \tag{3}$$

事实上, 使得

$$\sup_n \|U_n^{(k)}(x)\| = \infty$$

成立的那些$x \in \mathbf{X}$所成的集合A_k是一个剩余集; 所以, 交 $A_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 非空. 显然, A_0 的任何元素都可以取作为 x_0.

这个命题有时称为奇点凝聚原理.

1.2. 对于算子序列 $\{U_n\}$ 在 $\mathbf{X}$ 上收敛的情形, 即对于每个 $x \in \mathbf{X}$ 存在

$$U(x) = \lim_{n \to \infty} U_n(x) \tag{4}$$

时, 应用定理 1, 便得到关于线性算子收敛序列的一个重要结果. 就是, 在上面关于空间 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 所作的假设下有

定理 2. 如果连续线性算子序列$\{U_n\}$在 $\mathbf{X}$ 上收敛到算子 U, 则 U 是线性算子, 并且

$$\|U\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|U_n\|. \tag{5}$$

证. 算子 U 显然是线性的. 其次, 因为 $\lim_{n \to \infty} \|U_n(x)\| = \|U(x)\| < \infty$, 所以 $\sup_n \|U_n(x)\| < \infty$, 从而根据定理 1 范数的序列$\{\|U_n\|\}$有界. 于是

$$\|U(x)\| = \lim_{n \to \infty} \|U_n(x)\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|U_n\| \|x\|,$$

由此推得算子 U 的连续性及不等式(5).

注. 必须着重指出, 在空间 $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 中 U_n 按范数可能不收敛

于U，例如：$\mathbf{X}=\mathbf{l}^1$，$\mathbf{Y}=\mathbf{R}^1$，$U_n=f_n$，其中

$$f_n(x)=\xi_n \qquad (x=\{\xi_k\}\in\mathbf{l}^1;\ n=1,2,\cdots).$$

虽然$f_n(x)\to 0$，但是$\|f_n\|=1 \quad (n=1,2,\cdots)$.

在某种意义上，范数序列的有界性也是线性算子序列收敛的充分条件．确切地说，我们有(参看 Banach 与 Steinhaus[1]).

定理 3(Banach-Steinhaus)．由B-空间$\mathbf{X}$到B-空间$\mathbf{Y}$内的连续线性算子序列$\{U_n\}$在$\mathbf{X}$上收敛于一连续线性算子的充要条件是：

1) 算子U_n的范数总体有界：

$$\|U_n\|\leqslant M \qquad (n=1,2,\cdots);$$

2) 序列$\{U_n(x')\}$对于在$\mathbf{X}$中稠密的某个集D的任何元素x'是自收敛的.

证．必要性．第一个条件的必要性由定理 1 推得．第二个条件的必要性是明显的.

充分性．取任意的$x\in\mathbf{X}$并选$x'\in D$使得

$$\|x-x'\|<\varepsilon.$$

当m,n充分大时

$$\|U_m(x')-U_n(x')\|<\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}&\|U_m(x)-U_n(x)\|\\&\leqslant\|U_m(x')-U_n(x')\|+\|U_m(x)-U_m(x')\|+\|U_n(x)-U_n(x')\|\\&<\varepsilon+(\|U_m\|+\|U_n\|)\|x-x'\|<(2M+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

这样，由于空间$\mathbf{Y}$的完备性，存在$U(x)=\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)$，从而根据定理 2，$U$是连续线性算子.

注 1. 如果把序列$\{U_n(x')\}(x'\in D)$自收敛换为收敛于$U(x')$，其中U是给定的连续线性算子，则此定理(充分性部分)仍然正确．这时空间$\mathbf{Y}$的完备性是不需要的.

注 2. 条件 2)可以用要求在 $\mathbf{X}$ 内一基本集 D 上收敛来代替. 事实上,在 D 上收敛蕴涵在 $\mathscr{L}(D)$ 上收敛,而 $\mathscr{L}(D)$ 已在 $\mathbf{X}$ 内稠密.

注 3. 根据定理 1,定理 3 的第一个条件可以用条件(1)来代替.

推论. 连续线性算子序列的收敛点的集合是第一纲的或者是整个空间.

事实上,如果收敛点的集合是第二纲的,则根据定理 1 的注可知范数序列有界. 另一方面,收敛点的集合作为第二纲集合,在某个球内稠密,而由于它显然是线性的,所以也在全空间 $\mathbf{X}$ 内稠密. 再应用定理 3.

注 4. 如果在定理 1—2 和定理 3(充分性部分)中,代替算子序列考虑的是算子有向列,这些定理仍然成立.

§2. 在函数论中的一些应用

上一节的定理有各式各样的应用. 我们来详细叙述其中的一些.

2.1. 首先讨论关于机械求积公式收敛性的问题.

在积分的近似计算中,我们通常利用形如

$$\int_a^b x(t)dt \cong \sum_{k=0}^{n} A_k x(t_k) \qquad (a \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant b)$$

的机械求积公式. 例如,矩形公式,梯形公式和 Simpson 公式就是这类公式. 比较复杂的还有 Newton-Cotes 公式和 Gauss 公式. С. Л. Соболев 深入研究了多重求积的一般理论. (参看 С. Л. Соболев-II).

因为只用一个公式不能保证任意高的精确度,自然要去考虑公式的系列

$$\int_a^b x(t)dt \cong \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \tag{1}$$

$$(a \leqslant t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqslant b;\ \ n=0, 1, \cdots)$$

并且提出这样的问题：用这些公式计算积分，在什么条件下，当 $n \to \infty$ 时其误差趋于零．如果对于给定的函数 x 这种情况成立，我们就说机械求积公式(1)对于函数 x 是收敛的．

下面这个定理回答了关于机械求积公式收敛性的问题．

定理 1 (Szegö)．机械求积公式(1)对于任何连续函数都收敛的充要条件是：

1) $\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant M \qquad (n=0, 1, \cdots)$;

2) 公式(1)对于每个多项式是收敛的．

证．在空间 $\mathbf{C}[a, b]$ 中研究泛函

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt.$$

在 V.2.1 中已经建立

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \qquad (n=0, 1, \cdots).$$

由此可见，条件 1)表示泛函 f_n 的范数总体有界，而条件 2)表明对于在 $\mathbf{C}[a, b]$ 内稠密的一切多项式集合中的 x，$f_n(x) \to f(x)$．所以本命题是 Banach-Steinhaus 定理的一个特殊情形(注意该定理的注 1)．

注 1．如果系数 $A_k^{(n)}$ 对于所有的 k 和 n 都是正的，则第一个条件是第二个条件的推论．

事实上，根据第二个条件，公式在 $x(t)\equiv 1$ 时是收敛的，即

$$b-a=\int_a^b dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)},$$

由此推得和 $\sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|=\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}$ 有界.

注 2. 在第二个条件中，一切多项式的集合可以用任何在 $\mathbf{C}[a,b]$ 内稠密的其他集合来代替，例如用一切分段线性函数的集合来代替，或者甚至用在 $\mathbf{C}[a,b]$ 内完全的集合来代替，例如用自变数的各次幂来代替(参看 Banach-Steinhaus 定理的注 2).

注 3. 以上关于公式(1)的讨论可以不加更改地转用来研究更一般的公式

$$\int_a^b p(t)x(t)dt\cong\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)}) \tag{2}$$

$$(a\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}\leqslant b;\ n=0,1,\cdots),$$

其中 $p(t)$ 是一个指定的可积函数，叫做权函数.

以下是得到机械求积公式的一个基本的方法.

对于每一个 $n=0,1,\cdots$，我们用任意的方式在区间 $[a,b]$ 内取值 $t_0^{(n)}, t_1^{(n)},\cdots,t_n^{(n)}$ 并且对于函数 $x(t)$ 构造它的Lagrange 插值多项式 $p_n(x;t)$，在点 $t_0^{(n)}, t_1^{(n)},\cdots,t_n^{(n)}$ 处与 $x(t)$ 重合. 大家知道

$$P_n(x;t)=\sum_{k=0}^{n}l_k^{(n)}(t)x(t_k^{(n)}),$$

其中

$$l_k^{(n)}(t)=\frac{\omega_n(t)}{(t-t_k^{(n)})\omega_n'(t_k^{(n)})}$$

$$(\omega_n(t)=(t-t_0^{(n)})(t-t_1^{(n)})\cdots(t-t_n^{(n)});$$

$$k=0,1,\cdots,n;\ n=0,1,\cdots).$$

在积分$\int_a^b p(t)x(t)dt$中用 $x(t)$的插值多项式来代替 $x(t)$，我们得到机械求积公式：

$$\int_a^b p(t)x(t)dt \cong \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)})$$

$$\left(A_k^{(n)} = \int_a^b p(t) l_k^{(n)}(t)dt\right). \tag{3}$$

用上述方法求得的公式叫做插值公式(参看Натансон-I, 590 页).

如果函数 $x(t)$是次数不超过 n 的多项式，则它的插值多项式和它本身完全一样，故公式(3)在此情形是精确的. 这样，如果 $x(t)$是任意的多项式，则对于充分大的 n 公式的误差等于零，即机械求积的插值公式在一切多项式的集合上总是收敛的. 由此可见，使这些公式对于任何连续函数收敛的充要条件只是定理 1 的第一个条件. 特别，根据注 1 可知，如果所有的系数 $A_k^{(n)} \geqslant 0$，收敛性即得到保证.

例如，当权函数是正的并且点 $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \cdots, t_n^{(n)}$选得使多项式 $\omega_n(t)$形成关于权 $p(t)$的一个正交系时，求积公式收敛. 这时得到的求积公式叫做 Gauss 型公式. 它们与其余的机械求积插值公式的差别在于它们对于次数为 $2n+1$ 的多项式是精确的(参看 Натансон-I, 601 页).

2.2. 考察空间$\widetilde{\mathrm{C}}$，其元素是定义在整个实轴上具有相同周期(为确定起见取 2π)的周期连续函数. 每一个这样的函数显然可以作为定义在长度为 2π 的某个区间$[a, a+2\pi]$上并且满足条件 $x(a+2\pi)=x(a)$的函数来处理. 这样就可以认为 $\widetilde{\mathrm{C}}$ 与$\mathrm{C}[a, a+2\pi]$的闭子空间一致.

由此推得，具有连续核 $K(s, t)$的算子 $y=U(x)$

$$y(s)=\int_a^{a+2\pi} K(s, t)x(t)dt \qquad (s\in[a, a+2\pi]), \tag{4}$$

是由 $\tilde{\mathbf{C}}$ 到 $\mathbf{C}$ 内的线性算子. 留给读者验证,算子 U 的范数的表示式是

$$\|U\| = \max_{s} \int_{a}^{a+2\pi} |K(s, t)|\, dt \tag{5}$$

(参看 V. 2. 4).

一般来说,算子(4)变周期函数为非周期函数. 使 U 成为由 $\tilde{\mathbf{C}}$ 到 $\tilde{\mathbf{C}}$ 内的算子的充要条件显然是核 $K(s, t)$ 关于它的第一个变数是 2π-周期的,即 $K(s+2\pi, t) = K(s, t)$. 最后,如果核 $K(s, t)$ 定义在整个平面上并且它的第二个变数也是 2π-周期的,则在(4)和(5)中的积分可以在长度为 2π 的任何区间上进行.

我们构造连续的 2π-周期函数 $x(t)$ 的 Fourier 级数:

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt\, dt$$

$$(k = 0, 1, \cdots).$$

使 $\tilde{\mathbf{C}}$ 中的每一个函数 $x(t)$ 都与它的 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 相对应,我们得到一个由 $\tilde{\mathbf{C}}$ 到 $\tilde{\mathbf{C}}$ 内的算子 S_n. 大家知道,这个和能用 Dirichlet 积分表示出来:

$$y = S_n(x), y(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \frac{\sin (2n+1) \frac{t-s}{2}}{\sin \frac{t-s}{2}}\, dt,$$

即算子 S_n 具有形式(4),并且由于它的核是连续的,所以 S_n 是连续线性算子. 我们证明,$\|S_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

事实上,根据(5)并由于核的周期性

$$\|S_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-s}{2}}{\sin\frac{t-s}{2}}\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin mt}{\sin t}\right|dt,$$

其中 $m=2n+1$. 利用分析中熟知的不等式

$$|\sin t|\leqslant|t|,\quad \sin s\geqslant\frac{2}{\pi}s\qquad\left(0\leqslant s\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

进一步得

$$\|S_n\|=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin mt}{\sin t}\right|dt>\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_{\frac{k\pi}{m}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2m}}\frac{|\sin mt|}{\sin t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\frac{|\sin mt|}{\sin\left(t+\frac{k\pi}{m}\right)}dt\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\frac{\frac{2}{\pi}mt}{t+\frac{k\pi}{m}}dt$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\frac{\pi}{2m}}\frac{\frac{2}{\pi}mt}{t+\frac{k\pi}{m}}dt\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\frac{2}{\pi}m\frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}+\frac{k\pi}{m}}\frac{\pi}{4m}$$

$$\geqslant\frac{1}{8\pi}\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{8\pi}\sum_{k=2}^{m-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}=\frac{1}{8\pi}\ln\frac{m}{2}\geqslant\frac{1}{8\pi}\ln n.$$

于是

$$\|S_n\|\geqslant\frac{1}{8\pi}\ln n,$$

由此推得欲求之结果.

根据定理 1.3 可以断定,存在连续周期函数,其 Fourier 级数并不一致收敛到任何函数.

所作的讨论同样能够确定存在连续周期函数，其 Fourier 级数在任何预先指定的点处发散.

为此考察在空间 $\tilde{\mathbf{C}}$ 上的泛函序列 f_n:

$$f_n(x)=S_n(x)(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{t-t_0}{2}}{\sin\frac{t-t_0}{2}}x(t)dt.$$

与 V.2.2 中一样，泛函 f_n 的范数由下列等式给出:

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t-t_0}{2}}{\sin\frac{t-t_0}{2}}\right|dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt=\|S_n\|,$$

所以 $\|f_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$. 因此根据定理 1.1 存在元素 $x_0\in\tilde{\mathbf{C}}$，使得 $\sup\limits_n|f_n(x_0)|=\infty$，这就是我们所要证明的.

现在于数直线上取任意的可数集合 $e=\{t_k\}$ 并且构造泛函 $f_n^{(k)}$:

$$f_n^{(k)}(x)=S_n(x)(t_k)\qquad(k, n=1, 2, \cdots).$$

应用奇点凝聚原理到这些泛函，可以找到元素 $x_0\in\tilde{\mathbf{C}}$，使得

$$\sup_n|f_n^{(k)}(x_0)|=\infty\qquad(k=1, 2, \cdots),$$

即得到这样的函数 $x_0(t)$，其 Fourier 级数在集合 e 的每点处都发散.

du-Bois-Reymond 第一个给出一个连续函数的 Fourier 级数不处处收敛的例子(参看 Zygmund).

如果我们把 S_n 看作由 $\mathbf{L}^1$ 到 $\mathbf{L}^1$ 内的线性算子，则由于核的对称性 $\|S_n\|$ 保持前面的值，从而根据定理 1.3 可以断定存在这样的可积函数，其 Fourier 级数在 $\mathbf{L}^1$ 中不是一致收敛的.

2.3. 如果引进多项式算子的概念，上述结果可以得到广泛的推广.

我们再取周期(以 2π 为周期)连续函数的空间 $\widetilde{\mathbf{C}}$，并且以 $\widetilde{\mathbf{H}}_n$ 表示其中所有次数不超过 n 的三角多项式组成的子空间.

如果空间 $\widetilde{\mathbf{C}}$ 中的线性连续算子 U 具有下列性质:

1) 对于任意的元素 $x\in\widetilde{\mathbf{C}}$，$U(x)\in\widetilde{\mathbf{H}}_n$，

2) 如果 $x\in\widetilde{\mathbf{H}}_n$，则 $U(x)=x$，

则称 U 是 n 次(三角)多项式算子.

换句话说，多项式算子把每个周期为 2π 的函数变为次数不超过 n 的三角多项式，并且使这些多项式本身不变.

多项式算子的一个最简单的例子就是在 2.2 中研究过的算子 S_n. 把一个函数变换为根据一组指定的结点构造的(三角)插值多项式是这类算子的另一个例子.

我们引入下列记号. 如果 $y=U(x)$，则用 $U(x;s)$ 表示在给定 s 时函数 y 的值. 例如，$S_n(x;s)=S_n(x)(s)$. 其次，如果 $x(t)$ 是 $\widetilde{\mathbf{C}}$ 中的某个函数，则以 $x^h(t)$ 表示由 $x(t)$ 经平移所得的函数:

$$x^h(t)=x(t+h).$$

显然，对任何 h 有 $x^h\in\widetilde{\mathbf{C}}$. 还要指出，由于函数 $x\in\widetilde{\mathbf{C}}$ 的一致连续性，当 $h\to 0$ 时

$$\|x^h-x\|=\max_t|x^h(t)-x(t)|\to 0. \tag{6}$$

关于多项式算子和它的序列，可以建立极重要的一般结果. 它们都依赖于下列引理，它把任何多项式算子和最简单的算子 S_n 连系起来.

引理 1. 如果 U 是 n 次多项式算子，则有恒等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x^\tau; s-\tau)d\tau = S_n(x; s) \qquad (x\in\tilde{\mathbf{C}}) \tag{7}$$

(Zygmund-Marcinkiewicz-Берман 恒等式).

证. 首先设 $x\in\tilde{\mathbf{H}}_n$, 则 $x^\tau\in\tilde{\mathbf{H}}_n$. 于是

$$U(x^\tau; s-\tau) = x^\tau(s-\tau) = x(s).$$

而由于 S_n 是 n 次多项式算子, 所以

$$S_n(x; s) = x(s),$$

从而在此情形证明了恒等式.

现在设 $x(t)=\cos mt$ 或 $x(t)=\sin mt$, 其中 $m>n$. 为确定起见只讨论第一种情形, 我们有

$$x^\tau(t) = \cos m(t+\tau) = \cos mt\cos m\tau - \sin mt\sin m\tau$$
$$= x_1(t)\cos m\tau + x_2(t)\sin m\tau.$$

因此, 如果令

$$y_1 = U(x_1), \quad y_2 = U(x_2)$$

(y_1, y_2 是 $\tilde{\mathbf{H}}_n$ 中的元素), 则

$$U(x^\tau; s-\tau) = y_1(s-\tau)\cos m\tau + y_2(s-\tau)\sin m\tau.$$

但是 $y_1(s-\tau)$ 与 $y_2(s-\tau)$ 是关于 τ 的三角多项式, 它们的次数不超过 n, 因而与函数 $\cos m\tau$ 及 $\sin m\tau$ 正交. 由此可见

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x^\tau; s-\tau)d\tau = 0.$$

显然, (7)式右端也等于零.

这样, 恒等式(7)在此情形已经证明, 从而因为两边关于 x 都是可加的, (7)式对于任何三角多项式也成立.

现在考虑恒等式(7)的左端并且证明, 对于指定的 s, 它是空间 $\tilde{\mathbf{C}}$ 中的线性连续泛函.

事实上, 以 $f_s(x)$ 表示(7)的左端, 我们来证明泛函 f_s 对于每

个元素 $x\in\tilde{\mathbf{C}}$ 都有意义. 为此证明在积分号后是 τ 的连续函数. 我们有

$$
\begin{aligned}
&|U(x^{\tau+h};s-\tau-h)-U(x^{\tau};s-\tau)| \\
&\quad\leqslant|U(x^{\tau+h};s-\tau-h)-U(x^{\tau};s-\tau-h)| \\
&\qquad+|U(x^{\tau};s-\tau-h)-U(x^{\tau};s-\tau)| \\
&\quad\leqslant\|U(x^{\tau+h}-x^{\tau})\|+|U(x^{\tau};s-\tau-h)-U(x^{\tau};s-\tau)| \\
&\quad\leqslant\|U\|\|x^{\tau+h}-x^{\tau}\|+|U(x^{\tau};s-\tau-h)-U(x^{\tau};s-\tau)|.
\end{aligned}
$$

由于(6), 这里的第一个加项对于充分小的 h 为任意小, 又由于函数 $U(x^{\tau},t)$的连续性, 第二个加项也对于充分小的 h 是任意小的.

泛函 f_s 显然是可加的, 而因为

$$
\begin{aligned}
\left|f_s(x)\right|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|U(x^{\tau};s-\tau)|d\tau \\
&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|U\|\|x^{\tau}\|d\tau=\|U\|\|x\|,
\end{aligned}
$$

所以 f_s 是有界泛函.

最后, 如果记 $g_s(x)=S_n(x;s)$, 则恒等式(7)就表示泛函 f_s 和 g_s 一致. 但是前面已经证明这两个泛函在一切三角多项式这个在 $\tilde{\mathbf{C}}$ 中稠密的集合上一致. 因为 f_s 与 g_s 都是连续泛函, 由此推得它们在整个空间 $\tilde{\mathbf{C}}$ 上的一致, 这就是所要证明的.

定理 2. 在所有 n 次三角多项式算子中, 算子 S_n 具有最小的范数, 即总有

$$\|U\|\geqslant\|S_n\|>A\ln n.$$

事实上, 由恒等式(7)

$$
\begin{aligned}
\|S_n(x)\|&=\max_s|S_n(x;s)| \\
&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max_s|U(x^{\tau};s-\tau)|d\tau\leqslant\|U\|\|x\|,
\end{aligned}
$$

因此 $\|S_n\|\leqslant\|U\|$.

定理 3 (Лозинский-Харшиладз). 如果$\{U_n\}$是三角多项式算子序列,并且U_n是n阶算子,则它们的范数趋于无穷. 特别,这样的序列不可能在整个空间$\widetilde{\mathbf{C}}$上收敛.

第一个命题可以直接从前一个定理推得. 利用定理 1.1 得到第二个命题.

作为所述定理的特殊情形,我们指出下列重要的事实. 对于任何插值的结点,存在这样的连续 2π-周期函数,使得对它构造的插值多项式序列并不一致收敛(Faber 定理).

我们不加证明地指出,定理 2 和 3 的结果可以转移到空间$\mathbf{L}^1$的情形.

在空间$\mathbf{C}[0,1]$中,可以类似地考虑(代数的)多项式算子,即这样的连续线性算子,它变换$\mathbf{C}[0,1]$到一切次数不超过n的代数多项式所构成的子空间$\mathbf{H}_n$中,而$\mathbf{H}_n$中的元素是不变的. 但是,把代数的情形化为三角的情形去研究是更方便的. (参看 Натансон-I, 672 页).

我们取(代数的)多项式算子U_n,它把连续函数变成此函数关于给定的正交多项式系的 Fourier 级数的n项和. 把对于代数情形类似定理 3 的定理应用到算子序列上,得到这样的结果(Николаев[1]): 对于任何正交的多项式系,存在这样的连续函数,它关于此多项式系的 Fourier 级数并不一致收敛.

定理 2 和 3 是 С. М. Лозинский 和 Ф. И. Харшиладз 建立的(参看 Лозинский[1], [2]). С. М. Лозинский 对这个思想有相当大的发展.

2.4. 我们研究用奇异积分表示函数的问题.

设在正方形$[a,b;a,b]$上给定可积函数序列$\{K_n(s,t)\}$. 如果序列

$$x_n(s)=\int_a^b K_n(s,t)x(t)dt \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{8}$$

在某种意义下收敛于 $x(s)$，就说函数 $x(s)$ 表示为奇异积分.

在分析的各种问题中都经常遇到奇异积分. 例如 Dirichlet 积分，Fejer 积分，Vallée-Poussin 积分，Hilbert 积分等.

限于连续核，我们来证明关于奇异积分在空间 $\mathbf{L}^1[a,b]$ 中平均收敛的定理.

定理 4. 对于任何可积函数 x，序列(8)在空间 $\mathbf{L}^1$ 中收敛于 x 的充要条件是:

1) 对于在空间 $\mathbf{L}^1$ 中稠密的一个集合 D 的每一个 x 都有

$$\int_a^b \left| \int_a^b K_n(s,t)x(t)dt - x(s) \right| ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0; \tag{9}$$

2) $\int_a^b |K_n(s,t)|ds \leqslant M \qquad (t\in[a,b];\ n=1,2,\cdots).$ (10)

事实上，如果以 U_n 表示在空间 $\mathbf{L}^1$ 中由核 $K_n(s,t)$ 生成的算子:

$$y=U_n(x),\quad y(s)=\int_a^b K_n(s,t)x(t)dt,$$

则第一个条件表示，对于 $x\in D$，$U_n(x)\to x$，而第二个条件根据 V.2.5 表示 $\|U_n\|\leqslant M$. 这样，上述结果是 Banach-Steinhaus 定理的一个特殊情形(更确切地说，是此定理的注 2)(参看 1.2).

注 1. 在充分性部分，条件 1)可以换为两个更简单的条件，即

$$\int_\alpha^\beta K_n(s,t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad (s\in(\alpha,\beta)\subset[a,b]), \tag{11}$$

$$\int_a^b |K_n(s,t)|dt \leqslant M \qquad (s\in[a,b];\ n=1,2,\cdots). \tag{12}$$

容易证明，在此情形可以取包含在 $[a,b]$ 内的所有可能的区间上的特征函数全体作为 D.

事实上，如果 $\tilde{x}$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 的特征函数，则当 $s\in(\alpha,\beta)$ 时

$$\tilde{x}_n(s)=\int_\alpha^\beta K_n(s,t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 1=\tilde{x}(s);$$

而如果 $s\overline{\in}[\alpha,\beta]$，例如，$a\leqslant s<\alpha$，则

$$\tilde{x}_n(s)=\int_a^\beta K_n(s,t)dt=\int_a^\beta K_n(s,t)dt-\int_a^\alpha K_n(s,t)dt\xrightarrow[n\to\infty]{}1-1$$

$$=0=\tilde{x}(s).$$

由此可见，对于所有的 $s\neq\alpha,\beta$，即几乎处处，$\tilde{x}_n(s)\to\tilde{x}(s)$. 条件(12)保证可以在积分$\int_a^b\left|\int_a^b K_n(s,t)\tilde{x}(t)dt-\tilde{x}(s)\right|ds$ 的积分号下取极限，因此这个积分的极限等于零.

注 2. 如果核 $K_n(s,t)$是对称的，则条件(12)和定理的条件2)相同，因而在此情形条件(11)和(12)本身就是必要的和充分的.

如果我们把由核 $K_n(s,t)$生成的算子 U_n 看作空间 $\mathbf{C}[a,b]$中的算子，则类似地可以得到关于序列(8)一致收敛到连续函数$x(s)$的条件.

读者可以从 Dunford 和 Schwartz 的专著 II 及 И. П. Натансон [1] 的文章中找到关于奇异积分的更详尽的材料.

2.5. 最后研究关于级数广义求和的问题(参看 Zygmund).

设有数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots, \tag{13}$$

且设$\{s_k\}$是其部分和的序列. 引入无限矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nk} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{14}$$

并且组成表示式

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^\infty \alpha_{nk}s_k \qquad (n=1,2,\cdots),$$

假定其右端的所有级数都收敛.

如果序列$\{\sigma_n\}$存在有限的极限，则称级数(13)关于矩阵(14)可以广义求和。我们把极限

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

叫做级数(13)的广义和.

例如，Cesaro 求和的方法，即

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k,$$

它对应于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

代替讨论级数的广义求和，我们可以考虑关于确定一个序列的广义极限的问题，使序列

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

对应于给定的数列$x=\{\xi_k\}$并研究它当$n\to\infty$时的情况. 显然，问题的一种提法容易导致另一种提法. 因为序列的观点更方便，我们要详细谈谈它，但是仍保留前面的述语"求和法".

自然只考虑这样的求和方法，它们能应用于每一个在通常意义下收敛的序列并且使其通常的极限就是广义极限. 具有这些性质的求和方法叫做永久的或正则的. 下列定理建立了由矩阵(14)确定的求和法永久性的条件.

定理 5 (Toeplitz). 由矩阵(14)确定的求和法是永久的，其

充要条件是

1） $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{nk}=0 \qquad (k=1,2,\cdots)$;

2） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}=1$;

3） $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leqslant M \qquad (n=1,2,\cdots)$.

证. 在收敛序列的空间 c 上考虑泛函

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k \qquad (x=\{\xi_k\};\quad n=1,2,\cdots)$$

与

$$\sigma(x)=\lim_{k\to\infty}\xi_k.$$

在 VI. 2.2 中已经指出

$$\|\sigma_n\|=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}| \qquad (n=1,2,\cdots),$$

所以条件 3）表示泛函 σ_n 的范数的有界性.

其次，引入序列

$$x_0=(1,1,\cdots,1,\cdots) \quad 和 \quad x_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$$

(1 在第 k 个位置上).

因为

$$\sigma_n(x_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk},\ \sigma_n(x_k)=\alpha_{nk} \qquad (n,k=1,2,\cdots),$$

所以条件 1）和 2）可以写成为

$$\sigma_n(x_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0=\sigma(x_k),\quad \sigma_n(x_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}1=\sigma(x_0).$$

由于元素 $x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots$的全体在 c 中是完全的，定理的条件与 Banach-Steinhaus 定理(考虑到注 1 和 2)的条件相同. 由此可见，条件 1）—3）对于

$$\sigma_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma(x)$$

是必要的和充分的，而这就表示求和法的永久性.

对应于 Cesaro 方法的矩阵显然满足定理的条件. 由此推出算术平均方法是永久的这一熟知的结论(Cesaro).

第八章　Banach 空间中的弱拓扑

在第三章和第五章中，我们已经研究了弱拓扑的最简单的性质，在这一章我们将考察这 种拓扑的更深刻的性质．在 § 4 中要研究一个数理经济学问题，解决这个问题时利用了连续函数空间中弱拓扑的性质及连续线性泛函的一般形式的定理．

§ 1．弱有界集合

1.1. 我们从给出 Banach-Steinhaus 定理对于弱拓扑和(*)-弱拓扑的重要推论开始．首先考察序列弱收敛和(*)-弱收敛的判别准则.

设有一个给定在 B-空间 $\mathbf{X}$ 上的线性连续泛函序列$\{f_n\}$. 如果对于每个 $x\in\mathbf{X}$ 都存在有限极限

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), \tag{1}$$

则根据定理 VII. 1. 2 泛函 f 也是线性的和连续的，并且 $f_n\to f$ $(\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X}))$.

从 Banach-Steinhaus 定理可导出下面的(*)-弱收敛判别准则.

定理 1. 设 $\mathbf{X}$ 是 B-空间．使关系式

$$f_n\to f(\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X})) \tag{2}$$

成立的充要条件为:

1）范数序列$\{\|f_n\|\}$有界;

2）对于在 $\mathbf{X}$ 中稠密的集合 D 中的任何x, 关系式(1)都成立.

注. 在条件 2）中可以只限于要求D在 $\mathbf{X}$内是基本的(参见

Banach-Steinhaus 定理的注 2).

范数关于弱收敛的连续性并不成立. 即, 从(2)不能推出$\|f_n\| \to \|f\|$, 只能断定

$$\|f\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|$$

(参见定理 VII. 1. 2).

现在考察 $\mathbf{X}$ 中的弱收敛. 首先指出, 赋范空间 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{X}^{**}$ 内的典型嵌入 π 是局部凸空间$(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*))$到局部凸空间 $\pi(\mathbf{X})$上的线性同构, 这里将 $\pi(\mathbf{X})$看作为局部凸空间$(\mathbf{X}^{**}, \sigma(\mathbf{X}^{**}, \mathbf{X}^*))$的子空间, 要知道, 在这些空间中元素的有向列的收敛都表示对所有 $f \in \mathbf{X}^*$ 的收敛.

这个简单的注表明, 在许多情形可把研究 $\mathbf{X}$ 中的弱拓扑归结为考察 $\mathbf{X}^{**}$ 中的(*)-弱拓扑. 例如, 考虑到映射 π 的等距性, 由定理 1 的注可得, 如果 $x_n \to x$ $(\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*))$, 则$\|x\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. 利用定理 1, 类似地可得:

定理 2. 在赋范空间 $\mathbf{X}$ 中序列 $x_n \to x(\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*))$的充要条件为:

1) $\sup_n \|x_n\| < \infty$;

2) 对于在空间 $\mathbf{X}^*$ 上稠密(基本)的集合中的每个泛函 f, $f(x_n) \to f(x)$.

1. 2. 现在考察弱有界集合. 设 E 是赋范空间 $\mathbf{X}$ 中的一个集合, 如果对于任意的 $f \in \mathbf{X}^*$, $\sup\{|f(x)| : x \in E\} < \infty$, 则称 E 是弱有界的. 若 E 是 $\mathbf{X}^*$ 中的集合, 如果对于任意的 $x \in \mathbf{X}$, $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty$, 则称集 E 在 $\mathbf{X}^*$ 中是(*)-弱有界的. 显然, 集 $E \subset \mathbf{X}$ 的弱有界性等价于它在局部凸空间 $(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*))$ 中的有界性, 而$E \subset \mathbf{X}^*$的(*)-弱有界性等价于它在局部凸空间$(\mathbf{X}^*, \sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$中的有界性.

定理 3. 如果 $\mathbf{X}$ 是 B-空间，则集合 $E\subset\mathbf{X}^*$ 是(*)-弱有界的充要条件为按 $\mathbf{X}^*$ 中的范数有界.

证. 只须证明(*)-弱有界集合 E 是按范数有界的. 假如不然，则从 E 中可找到序列 $\{f_n\}$，使 $\|f_n\|\geqslant n^2$ $(n\in N)$. 因为

$$\left|\frac{1}{n}f_n(x)\right|\leqslant\frac{1}{n}\sup\{|f(x)|: f\in E\}\to 0 \qquad (x\in\mathbf{X}),$$

所以 $(1/n)f_n\to\mathbf{0}(\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X}))$，但因为 $\|(1/n)f_n\|\geqslant n$ $(n\in N)$，故与定理 1 的条件 1)不相容.

同从定理 1 可推出定理 3 一样，从定理 2 可推出:

定理 4. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范空间，则集 $E\subset\mathbf{X}$ 弱有界的充要条件为它按 $\mathbf{X}$ 中的范数有界.

早在第三章中我们就讲到要证明这个定理(参见定理 III. 3. 3). 但只是现在讲了 Banach-Steinhaus 定理之后，才能完成其证明. 因为弱紧集是弱有界的，所以从定理 4 推知，任意弱紧集都是按范数有界的.

我们还记得，对于赋范空间 $\mathbf{X}$ 中的凸子集来说，弱闭与按范数闭是一致的(参见定理 III. 3. 2). 下面我们将指出，虽然有这个性质，但在无限维 B-空间中弱拓扑与范数拓扑是不同的.

在 1. 1 开始时所作的讨论表明，如果 $\mathbf{X}$ 是 B-空间，则空间 $\mathbf{X}^*$ 是(*)-弱序列完备的，即如果对于任意 $x\in\mathbf{X}$，数列 $\{f_n(x)\}$ $(f_n\in\mathbf{X}^*)$ 的极限存在，则存在 $f\in\mathbf{X}^*$，$f_n\to f(\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X}))$.

空间 $\mathbf{X}$ 本身不一定具有类似的性质. 如果局部凸空间 $(\mathbf{X},\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$ 是序列完备的(即下列性质成立: 若对于任意 $f\in\mathbf{X}^*$，数列 $\{f(x_n)\}$ $(x_n\in\mathbf{X})$ 的极限存在，则存在 $x\in\mathbf{X}$，$x_n\to x(\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$)，则称 B-空间 $\mathbf{X}$ 是弱序列完备的. 从 $\mathbf{X}^*$ 是(*)-弱序列完备的可推出自反 B-空间 $\mathbf{X}$ 是弱序列完备的. 在第十章我们将看到，空间 $\mathbf{c}_0$ 不是弱序列完备的，而非自反空间 $\mathbf{L}^1[0,1]$ 是弱序列完备的(参

见定理 X.4.9). 下述定理表明弱拓扑与强拓扑之间的本质的差别.

定理 5. 使赋范空间 $\mathbf{X}$ 中的弱拓扑与范数拓扑一致的充要条件为 $\mathbf{X}$ 是有限维的.

证. 由定理 IV.1.2 可推出充分性. 现证必要性: 从 III.3.3 推出, 在此情形共轭空间中的球 $B_{\mathbf{X}^*}$ 包含在有限多个泛函的绝对凸包之中, 由此推出 $\mathbf{X}^*$ 是有限维的, 这时 $\mathbf{X}$ 也是有限维的.

§2. Eberlein-Шмульян 定理

如果 E 是拓扑空间 $\mathbf{X}$ 的子集, 则它可能具有三种接近于紧性的性质(参见 I.2.7). 即:

1) E 是相对紧的, 即 E 的闭包是紧的;

2) E 是相对列紧的, 即 E 中任意的序列包含收敛于 $\mathbf{X}$ 中点的子序列;

3) E 是相对可数紧的, 即 E 中任意序列在 $\mathbf{X}$ 中具有极限点.

在一般情况下具有下列关系: 1)⇒3)和2)⇒3). 在 I.5.1 中我们证明过, 当 $\mathbf{X}$ 是距离空间时, 性质 1)—3)是等价的. 这里我们来证明, 如果 $\mathbf{X}$ 是赋予弱拓扑的 B-空间, 则有类似的准则. 我们先指出, 弱紧集不一定是可度量化的. 事实上, 考察任意的不可分的自反 B-空间 $\mathbf{X}$(例如具有不可数基的 Hilbert 空间). 它的球 $B_{\mathbf{X}}$ 是弱紧的, 但若它按弱拓扑是可度量化的, 则根据定理 I.5.2 的推论 1, $B_{\mathbf{X}}$ 是弱可分的, 而这时因 $B_{\mathbf{X}}$ 是凸的, 它也是强可分的. 由此推出 $\mathbf{X}$ 是可分的, 从而导致矛盾.

在弱拓扑下 1)—3)的等价性已证明了, 这是很多数学家多年来努力的成果, 基本的结果是 В. Л. Шмульян 和 Eberlein 给出的(在本世纪四十年代), 所以这个在 B-空间理论中的一个重要部分

自然叫做 Eberlein-Шмульян 定理*). 下面的叙述法是属于 Whitney 和 Cohen 的.

引理 1. 设 $\mathbf{X}$ 是 B-空间, $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}^{**}$ 中的有限维子空间, 这时可找到 $\mathbf{X}^*$ 中有限元素组 $\{f_m\}_{m=1}^n$, $\|f_m\|=1(m=1,2,\cdots,n)$ 使得对于任意 $F\in\mathbf{Y}$ 有

$$\max\{|F(f_m)|:1\leqslant m\leqslant n\}\geqslant\frac{1}{2}\|F\|. \tag{1}$$

证. 因为空间 $\mathbf{Y}$ 中的单位球是紧的, 所以对此球存在有限 1/4-网 $\{F_m\}_{m=1}^n$ ($\|F_m\|=1, m=1,2,\cdots,n$). 取 $f_m\in\mathbf{X}^*$, 在 $\mathbf{X}^*$ 中 $\|f_m\|=1$, 而 $|F_m(f_m)|>3/4(m=1,2,\cdots,n)$. 取 $F\in\mathbf{Y}$, 我们来证(1). 可以假设 $F\neq\mathbf{0}$. 这时对于泛函 $F/\|F\|$ 可求出 F_m 使得 $\|F/\|F\|-F_m\|<1/4$. 由此

$$\begin{aligned}|F(f_m)|&\geqslant\|F\||F_m(f_m)|-\|F\||F_m(f_m)-(F/\|F\|)(f_m)|\\&\geqslant\|F\||F_m(f_m)|-\|F\|\|F/\|F\|-F_m\|\\&>\frac{3}{4}\|F\|-\frac{1}{4}\|F\|=\frac{1}{2}\|F\|,\end{aligned}$$

从而得(1).

引理 2. 设 E 是 B-空间 $\mathbf{X}$ 中的相对弱可数紧子集. 用 E_1 表示集 $\pi(E)$ 的 $\sigma(\mathbf{X}^{**},\mathbf{X}^*)$-闭包, 其中 $\pi:\mathbf{X}\to\mathbf{X}^{**}$ 是典型嵌入. 这时 E_1 是 $\sigma(\mathbf{X}^{**},\mathbf{X}^*)$-紧的, 并且对于任意点 $F\in E_1$, 存在序列 $\{x_n\}\subset E$, 使得对于此序列的任意弱极限点 $x\in\mathbf{X}$ 有 $\pi(x)=F$.

注. 显然, 引理 2 所述的序列 $\{x_n\}$ 有唯一的极限点.

证. 因为 E 是相对可数紧的, 故对于每个 $f\in\mathbf{X}^*$ 集合 $f(E)$ 是标量的相对紧集. 由此 E 是弱有界的, 故也是强有界的(定理1. 4). 因此, 根据 Alaoglu-Bourbaki 定理, 集 E_1 是 $\sigma(\mathbf{X}^{**},\mathbf{X}^*)$-紧的.

设 $F\in E_1$, 我们根据归纳法找出未知序列 $\{x_n\}$. 取 $f_1\in\mathbf{X}^*$,

---

*) 历史的概述参见 Dunford 和 Schwartz-I.

$\|f_1\|=1$. 因为 $F\in E_1$, 故可找到 $x_1\in E$, 使得

$$|(F-\pi(x_1))(f_1)|<1.$$

由泛函 F 和 $F-\pi(x_1)$ 生成的空间 $\mathbf{Y}_2$ 是有限维的, 根据引理1可找到向量 $f_2, \cdots, f_{k(2)}$, 它们在 $\mathbf{X}^*$ 中的范数为 1, 使对于任意的 $G\in\mathbf{Y}_2$

$$\max\{|G(f_m)|: \quad 2\leqslant m\leqslant k(2)\}\geqslant\frac{1}{2}\|G\|.$$

再利用 $F\in E_1$ 这个事实, 可找到 $x_2\in E$, 使得

$$\max\{|(F-\pi(x_2))(f_m)|: \quad 1\leqslant m\leqslant k(2)\}<1/2.$$

对于 $\mathbf{Y}_3=\mathscr{L}(F-\pi(x_2), F-\pi(x_1), F)$ 利用引理 1, 可找到点 $f_{k(2)+1}, \cdots, f_{k(3)}$, 它们在 $\mathbf{X}^*$ 中的范数为 1, 使对于任意的 $G\in\mathbf{Y}_3$,

$$\max\{|G(f_m)|: \quad k(2)<m\leqslant k(3)\}\geqslant\frac{1}{2}\|G\|.$$

由于 $F\in E_1$, 我们可找到 $x_3\in E$, 使得

$$\max\{|(F-\pi(x_3))(f_m)|: 1\leqslant m\leqslant k(3)\}<1/3.$$

这个过程一直延续下去, 得到序列 $\{x_n\}\subset E$, 使得对于任意的 $G\in\mathbf{Y}_n=\mathscr{L}(F-\pi(x_n), F-\pi(x_{n-1}), \cdots, F)$ 有关系式

$$\max\{|G(f_m)|: k(n-1)<m\leqslant k(n)\}\geqslant\frac{1}{2}\|G\|, \tag{2}$$

其中 $f_m\in\mathbf{X}^*$, $\|f_m\|=1$, 且

$$\max\{|(F-\pi(x_n))(f_m)|: \quad 1\leqslant m\leqslant k(n)\}<1/n. \tag{3}$$

设 $x\in\mathbf{X}$ 是序列 $\{x_n\}$ 在弱拓扑意义下的极限点(由于 E 的相对弱可数紧性, 这种点是存在的). 因为(按范数)闭的线性包 $\overline{\mathscr{L}}(\{x_n\})$ 是弱闭的, 所以 $x\in\overline{\mathscr{L}}(\{x_n\})$. 由此 $F-\pi(x)\in F-\overline{\mathscr{L}}(\{\pi(x_n)\})\subset\overline{\mathscr{L}}(\{F, F-\pi(x_1), \cdots, F-\pi(x_n), \cdots\})$, 其中闭包是按照 $\mathbf{X}^{**}$ 中范数取的.

由(2), 对于任意 $G\in\mathscr{L}(\{F, F-\pi(x_1), \cdots, F-\pi(x_n), \cdots\})$ 有

$$\sup_m|G(f_m)|\geqslant\frac{1}{2}\|G\|.$$

因而它对于这个子空间的闭包中的任意 G 都成立, 特别对于

$F-\pi(x)$也成立．由(3)，对于指定的m有

$$|(F-\pi(x_n))(f_m)|<1/p \qquad 对于\ n\geqslant k(p)\geqslant m.$$

此时对于$n\geqslant k(p)\geqslant m$有

$$|(F-\pi(x))(f_m)|\leqslant|(F-\pi(x_n))(f_m)|+|f_m(x_n-x)|$$
$$\leqslant 1/p+|f_m(x_n-x)|.$$

因为x是$\{x_n\}$的弱极限点，所以对于任意的$N>m$，存在这样的足标n，使得

$$|f_m(x_n-x)|<1/N \quad 及 \quad n\geqslant k(N)\geqslant m.$$

对于这样的x_n有(因为$k(N)\geqslant m$，所以我们可取最大的$p=N$)

$$|(F-\pi(x_n))(f_m)|+|f_m(x_n-x)|<2/N.$$

由N的任意性可得，对于所有的$m\in\mathbf{N}$有$(F-\pi(x))(f_m)=0$．因为

$$1/2\|F-\pi(x)\|\leqslant\sup_m|(F-\pi(x))(f_m)|=0,$$

所以$F=\pi(x)$，证毕．

定理 1． 设E是B-空间$\mathbf{X}$的子集，则下列命题等价：

1) E是相对弱紧的；

2) E是相对弱列紧的；

3) E是相对弱可数紧的．

证． 1)⇒2)．如果$\{x_n\}$是E中元素序列，则用$\mathbf{Y}$表示集合$\{x_n\}$的闭线性包．由于定理 III.3.2 的推论 3 可得，集合$E\cap\mathbf{Y}$在可分空间$\mathbf{Y}$的弱拓扑下是相对紧的．由引理 V.7.1 的推论，集$E\cap\mathbf{Y}$的弱闭包是弱可度量化的．这时根据定理 I.5.2，存在子序列$x_{n_k}\to x(\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{Y}^*))$，因而$x_{n_k}\to x(\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$．

2)⇒3)． 显然．

3)⇒1)． 用E_1表示集$\pi(E)$的$\sigma(\mathbf{X}^{**},\mathbf{X}^*)$闭包，用$E_2$表示集$E$的$\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*)$闭包．由引理 2，$E_1$包含在$\pi(\mathbf{X})$中，并且是

$\sigma(\mathbf{X}^{**}, \mathbf{X}^{*})$紧的. 因为$\pi$是按弱和（$*$）-弱拓扑的同胚（参见1.1），所以$\pi(E_2)=E_1$，因此$E_2$是弱紧的.

注. 如果E是相对弱可数紧的，则对于E的弱闭包中任意x，存在序列$\{x_n\}\subset E$，使得$x_n\to x(\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$.

事实上，根据引理2，存在序列$\{x_n\}\subset E$，使x是其唯一的极限点. 根据定理1，集合E_2是弱紧的，而且在紧空间中有唯一极限点的序列收敛于这个点（引理I.2.2的推论）. 因此$x_n\to x(\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$.

推论. 设E是B-空间$\mathbf{X}$的子集，则下列命题等价：

1) E是弱紧的；

2) E是弱列紧的；

3) E是弱可数紧的.

证. 由定理1可知1)⇒2)，而2)⇒3)是显然的.

3)⇒1). 因为收敛序列有唯一的极限点（即自身的极限），所以根据定理1的注，E是弱闭的. 现在再由定理1可得E是弱紧的.

§3. 在具体空间中的弱收敛

本节我们阐明在B-空间$\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$和$\mathbf{C}(K)$中元素序列弱收敛的涵义.

3.1. 首先证明一个引理.

引理1. 设$1<p\leqslant 2$，则存在一个正的常数c，使得对于所有的实数u有

$$|1+u|^p\geqslant 1+pu+c\theta(u), \tag{1}$$

其中

$$\theta(u)=\begin{cases}|u|^2, & |u|<1,\\ |u|^p, & |u|\geqslant 1.\end{cases} \tag{2}$$

证. 引进函数

$$\chi(u)=|1+u|^p-1-pu$$

及

$$\psi(u)=\frac{\chi(u)}{\theta(u)}.$$

因为

$$\lim_{u\to 0}\psi(u)=\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^p-1-pu}{u^2}=\frac{p(p-1)}{1\cdot 2},$$

$$\lim_{u\to\infty}\psi(u)=\lim_{u\to\infty}\frac{(1+u)^p-1-pu}{|u|^p}=1,$$

所以存在 $\delta>0$, $\Delta>0$ 和 $c>0$, 使得

$$\psi(u)\geqslant c \qquad \text{当}\ |u|\leqslant\delta\ \text{或}\ |u|\geqslant\Delta\ \text{时}. \tag{3}$$

其次

$$\chi'(u)=p|1+u|^{p-1}\operatorname{sign}(1+u)-p,$$

$$\chi''(u)=p(p-1)|1+u|^{p-2} \qquad (u\neq-1).$$

因为 $\chi''(u)>0$, 而 $\chi'(0)=0$, 所以当 $u=0$ 时, 函数 $\chi(u)$ 有唯一的极小值. 但 $\chi(0)=0$, 于是当 $\delta\leqslant|u|\leqslant\Delta$ 时, $\chi(u)>0$. 因而对于上述的 u, $\psi(u)>0$. 如果需要的话就减少上面找到的 c, 便可认为

$$\psi(u)\geqslant c \qquad (\delta\leqslant|u|\leqslant\Delta).$$

与(3)式一起便得所要的结果.

3.2. 在某些空间中序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 加上其范数序列的收敛性: $\|x_n\|\to\|x\|$ 就保证了序列 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 x.

定理 1. 使实空间 $\mathbf{L}^p(T,\ \Sigma,\ \mu)$ $(1<p<\infty)$ 中的序列 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 x 的充要条件为:

1) $x_n\to x$(弱);

2) $\|x_n\|\to\|x\|$.

证. 这两个条件的必要性是显然的. 我们来证充分性. 大

家知道，因为$(\mathbf{L}^p)^*=\mathbf{L}^q(1/p+1/q=1)$，所以弱收敛$x_n\to x$意味着：对于任意 $y\in\mathbf{L}^q$

$$\int x_n(t)y(t)d\mu\longrightarrow\int x(t)y(t)d\mu.$$

令 $A_0=\{t\in T:x(t)=0\}$．设 $1<p\leqslant 2$，利用引理 1 的不等式(1)，在此不等式中当 $t\notin A_0$ 时用$\dfrac{x_n(t)-x(t)}{x(t)}$代替 u 便得

$$\left|\frac{x_n(t)}{x(t)}\right|^p\geqslant 1+p\frac{x_n(t)-x(t)}{x(t)}+c\theta\left(\frac{x_n(t)-x(t)}{x(t)}\right).$$

在所得不等式两端乘上$|x(t)|^p$ 并求积分：

$$\begin{aligned}\int_T|x_n(t)|^pd\mu\geqslant&\int_{A_0}|x_n(t)|^pd\mu+\int_T|x(t)|^pd\mu\\&+p\int_T|x(t)|^{p-1}\mathrm{sign}x(t)(x_n(t)-x(t))d\mu\\&+c\int_{T\setminus A_0}|x(t)|^p\theta\left(\frac{x_n(t)-x(t)}{x(t)}\right)d\mu.\qquad(4)\end{aligned}$$

用 $\tilde{y}$ 表示 $\mathbf{L}^q$ 的元素：

$$\tilde{y}=|x(t)|^{p-1}\mathrm{sign}x(t),$$

以 $\tilde{f}$ 表示在 $\mathbf{L}^p$ 上与它相应的线性泛函，则不等式(4)可改写为

$$\begin{aligned}c\int_{T\setminus A_0}|x(t)|^p\theta\left(\frac{x_n(t)-x(t)}{x(t)}\right)d\mu+\int_{A_0}|x_n(t)|^pd\mu\\\leqslant[\|x_n\|^p-\|x\|^p+p(\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x_n))],\end{aligned}$$

根据定理的条件可知，右端的式子趋于零，因而此不等式左端的两个积分也趋于零．

若记 $A_n'=\{t\in T\setminus A_0:|x_n(t)-x(t)|\geqslant|x(t)|\}$，而 $A_n''=\{t\in T\setminus A_0:\ |x_n(t)-x(t)|<|x(t)|\}$，则由函数 θ 的定义(参见(2))可得

$$\int_{T\setminus A_0}|x(t)|^p\theta\left(\frac{x_n(t)-x(t)}{x(t)}\right)d\mu=$$

$$=\int_{A_n'}|x_n(t)-x(t)|^p d\mu$$

$$+\int_{A_n''}|x(t)|^{p-2}|x_n(t)-x(t)|^2 d\mu. \qquad (5)$$

上面已指出，(5)式左端 当 $n\to\infty$时趋于零．因此(5)式右端的两个积分也趋于零．

另一方面，由于在集 A_n'' 上有不等式$|x_n(t)-x(t)|<|x(t)|$，所以利用 Hölder 不等式即得

$$\int_{A_n''}|x_n(t)-x(t)|^p d\mu\leqslant\int_{A_n''}|x(t)|^{p-1}|x_n(t)-x(t)|d\mu$$

$$=\int_{A_n''}[|x(t)|^{p/2-1}|x_n(t)-x(t)|]|x(t)|^{p/2}d\mu$$

$$\leqslant\left[\int_{A_n''}|x(t)|^{p-2}|x_n(t)-x(t)|^2 d\mu\right]^{1/2}\left[\int_{A_n''}|x(t)|^p d\mu\right]^{1/2},$$

由于第一个因子趋于零而第二个有界，故知

$$\int_{A_n''}|x_n(t)-x(t)|^p d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

从而

$$\int_{T\setminus A_0}|x_n(t)-x(t)|^p d\mu=\int_{A_n'}+\int_{A_n''}|x_n(t)-x(t)|^p d\mu$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

最后得

$$\int_T|x_n(t)-x(t)|^p d\mu=\int_{T\setminus A_0}|x_n(t)-x(t)|^p d\mu$$

$$+\int_{A_0}|x_n(t)|^p d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

从而证得序列$\{x_n\}$收敛于 x.

如果 $p>2$，则要用不等式

$$|1+u|^p\geqslant 1+pu+c|u|^p \qquad (1')$$

来代替不等式 (1)．此式的证明可仿照不等式 (1) 的证明．当

$t \in A_0$ 时用 $u=\frac{x_n(t)-x(t)}{x(t)}$代入不等式(1′)，乘以$|x(t)|^p$并求积分，得

$$\int_T |x_n(t)|^p d\mu \geqslant \int_{A_0} |x_n(t)|^p d\mu + \int_T |x(t)|^p d\mu$$
$$+ p\int_T |x(t)|^{p-1}\operatorname{sign}x(t)(x_n(t)-x(t))d\mu$$
$$+ c\int_{T\setminus A_0} |x_n(t)-x(t)|^p d\mu.$$

与前面相类似地引进 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{f}$，记 $c'=1/\min(1,c)$，便得

$$\int_T |x_n(t)-x(t)|^p d\mu \leqslant c'[\|x_n\|^p - \|x\|^p + p(\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x_n))],$$

由此推出，按 $\mathbf{L}^p$ 中的范数 $x_n \to x$.

3.3. 我们阐明 $\mathbf{L}^p(T,\Sigma,\mu)(1\leqslant p<\infty)$中弱收敛的涵义.

定理 2. 在空间 $\mathbf{L}^p(T,\ \Sigma,\ \mu)(1\leqslant p<\infty)$中序列$\{x_n\}$弱收敛于 x 的充要条件为

1) $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$;

2) 对于任意 $A\in\Sigma(\mu)$，$\int_A x_n(t)d\mu \to \int_A x(t)d\mu$.

证. 因为集合$\{\chi_A: A\in\Sigma(\mu)\}$在 $\mathbf{L}^p$ 中是基本的(参见 IV.3.3)，所以定理 2 是定理 1.2 的特例.

从证明中可以看出，不必对所有的 $A\in\Sigma(\mu)$验证条件 2)，只要对于某一集合族，其特征函数在 $\mathbf{L}^p$ 中构成基本子集即可. 特别，在 $\mathbf{L}^p(a,b)$的情形，只要考察集 $A=[a,s]$全体，其中 $a\leqslant s\leqslant b$，而在 $\mathbf{l}^p$ 情形可取集 A 的所有单点集，即在此情形条件 2)变为按坐标收敛.

3.4. 现在考察空间 $\mathbf{C}(K)$中的弱收敛.

定理 3. 使空间 $\mathbf{C}(K)$中序列$\{x_n\}$弱收敛于 x_0 的充要条件为

1) 对于所有 $t\in K$，$|x_n(t)|\leqslant M(n\in\mathbf{N})$;

2) 对每个 $t \in K, x_n(t) \to x_0(t)$.

证. 必要性. 这两个条件的必要性几乎是显然的. 事实上, 根据定理 1.2, $\sup\|x_n\| = M < \infty$, 而这就是 $|x_n(t)| \leqslant M$.

第二个条件的必要性的根据是: 对于指定的 $t \in K$, 考虑空间 $\mathbf{C}(K)$ 中由下式

$$f_t(x) = x(t)$$

定义的泛函 f_t, 由于存在弱收敛性 $x_n \to x_0$, 故应有

$$f_t(x_n) \to f_t(x_0).$$

而这就是条件 2).

充分性. 利用关于空间 $\mathbf{C}(K)^*$ 构造的定理 VI. 3.1. 据此定理, 只要证明, 对于任意函数 $\varphi \in \mathbf{rca}(K)$ 有

$$\int_K x_n(t) d\varphi \to \int_K x_0(t) d\varphi. \tag{6}$$

我们来验证(6)式成立.

下列估计式是正确的:

$$\left|\int_K x_n(t) d\varphi - \int_K x_0(t) d\varphi\right| \leqslant \int_K |x_n(t) - x_0(t)| d|\varphi|, \tag{7}$$

其中 $|\varphi|$ 是 φ 的全变差, 它是 K 上的测度. 因为此测度有限, 所以恒等于 M 的函数关于它可积. 根据 Lebesgue 定理, (7)式的右端趋于零, 从而得(6)式.

从定理 III. 3.2 及 3 可得出一个有趣的推论.

推论. 设连续函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在紧集 K 上有界, 且在其上每一点收敛于连续函数 $x_0(t)$, 则存在凸组合 $y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} x_k(t)$, 使得序列 $\{y_n(t)\}$ 一致收敛于 $x_0(t)$.

3.5. 前面我们已指出(参见定理 1.5), 如果弱拓扑与范数拓扑一致, 则 B-空间是有限维的. 现在我们给出一个无限维空间的例子, 在此空间中从序列弱收敛可推出强收敛. 这就表明, 考察序

列对研究弱拓扑来讲还是不充分的.

定理 4(Schur). 在空间 $\mathbf{l}^1$ 中, 弱收敛序列与按范数收敛是一致的.

证. 设 $x_n \to x_0$ (弱). 用 $x_n - x_0$ 去代替 x_n, 便可假设 $x_n \to 0$ (弱). 现在要证明 $\|x_n\| \to 0$. 假如不然, 设存在子序列 $\{x_{n_m}\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_m}\| = l > 0. \tag{8}$$

当考虑子序列时, 仍保持有弱收敛性; 其次, 如果需要, 我们以 $\frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|}$ 代替 x_{n_m}, 则我们得一序列, 它弱收敛于零元素, 并且此序列所有元素的范数都等于 1.

于是, 可以认为所给的序列 $\{x_n\}$ 满足下列条件:

$$x_n \to \mathbf{0} \qquad (\text{在 } \mathbf{l}^1 \text{ 中弱收敛}) \tag{9}$$

并且

$$\|x_n\| = 1 \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{10}$$

设 $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots)$. 引进泛函 f_k:

$$f_k(x) = \xi_k \qquad (x = \{\xi_k\};\ k = 1, 2, \cdots).$$

由(9)应有 $f_k(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, 即

$$\xi_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots). \tag{11}$$

现在设 $n_1 = 1$, 这时

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n_1)}| = \|x_{n_1}\| = 1.$$

因而存在标号 $p_1 > 0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{p_1} |\xi_k^{(n_1)}| > 3/4.$$

设已经选择整数 $1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ 及 $0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_j$, 使得

$$\sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\xi_k^{(n_s)}| < 1/4 \qquad (s=1, 2, \cdots, j) \tag{12}$$

及

$$\sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| > 3/4 \qquad (s=1, 2, \cdots, j). \tag{13}$$

这时，根据(11)式可求出这样的足标 $n_{j+1} > n_j$，使得

$$\sum_{k=1}^{p_j} |\xi_k^{(n_{j+1})}| < \frac{1}{4}.$$

利用这个不等式及(10)式可得

$$\sum_{k=p_j+1}^{\infty} |\xi_k^{(n_{j+1})}| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n_{j+1})}| - \sum_{k=1}^{p_j} |\xi_k^{(n_{j+1})}| > \frac{3}{4},$$

因而可指出这样的标号 $p_{j+1} > p_j$，使得

$$\sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} |\xi_k^{(n_{j+1})}| > \frac{3}{4}.$$

上面的讨论表明，存在这样两个整数序列 $1=n_1<n_2<\cdots$ 及 $0=p_0<p_1<\cdots$，使得对于每个 $s=1,2,\cdots$ 不等式(12)与(13)都成立.

现在令

$$\eta_k = \operatorname{sign} \xi_k^{(n_s)} \qquad (p_{s-1} < k \leqslant p_s; \quad k, s = 1, 2, \cdots).$$

序列 $\{\eta_k\} \in l^\infty$，所以在空间 l^1 中可以考察线性泛函 f_0:

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \qquad (x = \{\xi_k\}).$$

我们来估计 $f_0(x_{n_s})$ 的下界. 由于 $|\eta_k| \leqslant 1$，我们有

$$|f_0(x_{n_s})| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k^{(n_s)} \right|$$

$$\geqslant \left| \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} \eta_k \xi_k^{(n_s)} \right| - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\eta_k \xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\eta_k \xi_k^{(n_s)}| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\xi_k^{(n_s)}|$$

$$= 2 \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| - \|x_{n_s}\|.$$

由(10)及(13)可知，$f_0(x_{n_s}) > 1/2$，从而与(9)式矛盾.

3.6. 现在考察 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的弱收敛.

因为在 $\mathbf{H}$ 中每个线性泛函 f 都具有形式

$$f(x) = (x, y) \qquad (x \in \mathbf{H})$$

(参见 V. 3.2)，所以弱收敛 $x_n \to x_0$ 表示对于任意的 $y \in \mathbf{H}$

$$(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y).$$

其次，上面对 $\mathbf{L}^p$ 空间中已证明了：从弱收敛及范数的收敛可推出按范数的收敛性. 这个结果在 Hilbert 空间中证明极为简单. 事实上，如果 $x_n \to x_0$(弱)，并且 $\|x_n\| \to \|x_0\|$，则

$$\|x_n - x_0\|^2 = (x_n - x_0, x_n - x_0)$$
$$= (x_n, x_n) + (x_0, x_0) - (x_n, x_0) - \overline{(x_n, x_0)}.$$

但是 $(x_n, x_0) \to (x_0, x_0)$，所以 $\|x_n - x_0\| \to 0$.

这节内容基本上参照 Banach. Hilbert 还考察了 $\mathbf{L}^2$ 空间中的弱收敛. 关于空间 $\mathbf{C}[a, b]$ 中弱收敛的定理 3 见 F. Riesz[2].

§4. 物资调配问题及由此产生的赋范空间

4.1. 由于分析生产的组织和计划的某些问题，在 Канторович[5] 的著作中，研究了一类重要的有限维极值问题. 经典的数学分析方法用于这类问题效果较差，这些研究最终产生了一个称之为线性规划的新的数学分枝.

我们研究的物资调配问题，直接与下面这个最简单的线性规划问题相联系，现在它已广泛地用在铁路运输、汽车运输、空运和海运计划的实际工作当中.

运输问题. 设有 m 个点供求某一种产品. 给定向量

$$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \tag{1}$$

的分量(确切地说，它们的绝对值)表示在 $K = \{1, 2, \cdots, m\}$ 中标号为 k 的供

求点上的生产量(当 $\varphi_k \leqslant 0$ 时)或需求量(当 $\varphi_k > 0$ 时). 此外,假设需求量的和与生产量的和相同,即

$$\sum_{k\in K}\varphi_k = 0. \tag{2}$$

制定一个运输计划就是确定一个矩阵

$$\psi = [\psi_{ij}]_{i,j\in K}, \qquad \psi_{ij} \geqslant 0, \qquad i\in K,\ j\in K, \tag{3}$$

其元素表示从每个供求点 i 到每个供求点 j 上拟定的运输量. 这个运输计划的实施,显然在每个供应点 $k\in K$ 上输入 $\sum\limits_{i\in K}\psi_{ik}$ 及输出 $\sum\limits_{j\in K}\psi_{kj}$ 单位的这种产品. 这就是说,如果满足下列的平衡关系式:

$$\sum_{i\in K}\psi_{ik} - \sum_{j\in K}\psi_{kj} = \varphi_k \qquad k\in K, \tag{4}$$

则矩阵(3)确定了容许的运输计划. 在所讨论的模型中,每个运输计划(3)的实现,其总耗费量由下式确定:

$$\tau(\psi) = \sum_{i\in K}\sum_{j\in K} r_{ij}\psi_{ij}, \tag{5}$$

其中 r_{ij} 是给定的非负量, 它表示从第 i 个供求点到第 j 个供求点运输单位产品的耗费.

因此, 线性方程组(4) 的非负解(3) 的集合 Ψ_φ 确定了所有容许运输计划. 而要求的最经济即所谓最优运输计划 $\psi\in\Psi_\varphi$ 就是使总耗费(5)达到最小的计划.

根据线性规划理论的一般结果(或直接讨论)容易验证,所提出的极值问题都是可解的. 此外, 容许运输计划(3)在下列情况而且只在下列情况时是最优的,即向量 $u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 使得

$$u_j - u_i \leqslant r_{ij}, \qquad i\in K,\ j\in K \tag{6}$$

并且 $\psi_{ij}(u_j - u_i - r_{ij}) = 0$, $i\in K$, $j\in K$. 后者表示, 若在考察的容许计划中从第 i 个供求点到第 j 个供求点拟定了非零运输量 ψ_{ij}, 则在(6)式中相应条件应作为等式成立. 指出下面这点是很重要的,即所给出的最优性判别准则使我们能够编制有效的程序*), 把它用于现代电子计算机上, 可以解决有几千个生产和需求点的运输问题.

---

*) 这类算法首先在 Канторович 和 Гаврин 的著作[1]中提出(该著作在 1940 年完稿并在 Канторович 的文章[6]中引用).

在结束这段导引之前，关于所讨论的运输问题，我们要作一些注解并证明一个命题，下面研究物资调配问题时要用到这个命题。

给定的向量(1)的分量显然可以表示为 $\varphi_k=\varphi_k^+-\varphi_k^-$, $k\in K$，其中

$$\varphi_k^+=\max\{0,\varphi_k\},\quad \varphi_k^-=-\min\{0,\varphi_k\},\quad \varphi_k^++\varphi_k^-=|\varphi_k|.$$

这时根据条件(2)，量 $\varphi^+(K)=\sum_{k\in K}\varphi_k^+$, $\varphi^-(K)=\sum_{k\in K}\varphi_k^-$ 相等并等于向量(1)各分量绝对值和的一半。

现在考察函数

$$v(\psi)=\sum_{i\in K}\sum_{j\in K}\psi_{ij} \tag{7}$$

并证明，对于任意矩阵 $\psi\in\Psi_\varphi$ 下面的不等式成立：

$$v(\psi)\geqslant\varphi^+(K), \tag{8}$$

它成为等式的充要条件为

$$\sum_{i\in K}\psi_{ik}=\varphi_k^+,\qquad \sum_{j\in K}\psi_{kj}=\varphi_k^-,\qquad k\in K. \tag{9}$$

事实上，由(4)式及元素的非负性可推出

$$\sum_{i\in K}\psi_{ik}\geqslant\varphi_k^+,\qquad \sum_{j\in K}\psi_{kj}\geqslant\varphi_k^-,\qquad k\in K. \tag{10}$$

对这两个不等式中的第一式或第二式关于所有的 $k\in K$ 求和，便得所要求的不等式(8)。此外，显然它成为等式的充要条件为(9)式成立。

还要指出，对函数(7)所作的估计(8)的下界在集 Ψ_φ 上达到，即满足条件(9)的矩阵(3)的集合非空。例如，矩阵

$$\psi^*=[\psi^*_{ij}]_{i,j\in K}\qquad \psi^*_{ij}=\frac{\varphi_i^-\varphi_j^+}{\varphi^+(K)},\qquad i\in K,\ j\in K \tag{11}$$

满足这些条件。

引理 1. 如果在讨论的运输问题中给定的非负量 r_{ij} 满足三角不等式条件

$$r_{ij}\leqslant r_{ik}+r_{kj},\quad i\in K, j\in K, k\in K, \tag{12}$$

则存在最优运输计划(3)，对此计划条件(8)作为等式成立。

证. 考察非空有界闭集

$$\Psi_\varphi^\nu=\{\psi\in\Psi_\varphi\,|\,v(\psi)\leqslant\nu\},\quad \nu\in[\varphi^+(K),+\infty).$$

由于函数(5)和(7)的连续性，对于每一个 $\nu\geqslant\varphi^+(K)$ 存在矩阵 $\psi_\nu\in\Psi_\varphi^\nu$，使得

$$\tau(\psi_\nu)=\min\{\tau(\psi):\ \psi\in\Psi_\varphi^\nu\},$$
$$v(\psi_\nu)=\min\{v(\psi):\psi\in\Psi_\varphi^\nu,\ \tau(\psi)=\tau(\psi_\nu)\}.$$

还要证明，当条件(12)成立时，对于所有这样的矩阵 $\psi_\nu\in\Psi_\varphi^\nu$ 成立等式

$$v(\psi_\nu)=\varphi^+(K). \tag{13}$$

假设对于某个矩阵 $\psi=\psi_\nu$，(8)式为严格不等式，则对某个 $k_0\in K$，(10)式应为严格不等式．但这时存在 $i_0\in K$ 及 $j_0\in K$ 使得

$$\varepsilon=\min\{\psi_{i_0k_0},\psi_{k_0j_0}\}>0.$$

考察矩阵 $\psi'\in\Psi_\varphi$，它由原来的矩阵 $\psi=\psi_\nu$ 经过改变下列三个元素后得到：

$$\psi'_{i_0j_0}=\psi_{i_0j_0}+\varepsilon,\quad \psi'_{i_0k_0}=\psi_{i_0k_0}-\varepsilon,\quad \psi'_{k_0j_0}=\psi_{k_0j_0}-\varepsilon.$$

对于这个矩阵有

$$\tau(\psi')=\tau(\psi)+\varepsilon(r_{i_0j_0}-r_{i_0k_0}-r_{k_0j_0})\leqslant\tau(\psi),$$
$$v(\psi')=v(\psi)-\varepsilon,$$

而这与矩阵 $\psi_\nu\in\Psi_\varphi^\nu$ 的取法矛盾．这个矛盾表明，对于所有的 $\nu\in[\varphi^+(K),+\infty)$，所要求的等式(13)成立．引理证毕．

注．从已证的引理可知，如果原来的量 r_{ij} 满足关系式(12)，则条件(4)可以代替较严的要求(9)．

4.2. 下面引进的运输问题的无限维的推广最先在 Канторович 的著作[6] 中考察过（也可参考 Канторович[8]．Канторович 和 Рубинштейн[1][2]）．

物资调配问题．这里我们用具有度量 $r(t,s)$ 的任意度量紧集 K 代替有限供求点的集合，其中的度量表述了从任意点 $t\in K$ 到任意点 $s\in K$ 运送单位物资的耗费．与满足条件(2)的向量(1)相类似的是给定在紧集 K 的 Borel 集合系 $\mathscr{B}$ 上的可数可加函数 φ，其正变差 $\varphi_+(K)$ 与负变差 $\varphi_-(K)$ 相同，即

$$\varphi(K)=\varphi_+(K)-\varphi_-(K)=0. \tag{14}$$

大家知道(参见 I.6.3)，对于 $e\in\mathscr{B}$

$$\varphi_+(e)=\sup\{\varphi(e'):e'\in\mathscr{B},\ e'\subset e\},$$
$$\varphi_-(e)=\sup\{-\varphi(e'):e'\in\mathscr{B},\ e'\subset e\}.$$

对于每个 $e\in\mathscr{B}$，量 $\varphi_+(e)$ 和 $\varphi_-(e)$ 分别解释为在 e 上物资的需求量和供给量．所以条件(14)具有在有限供求点情况条件(2)同样的意义．

在 K 上制定一个物资调配计划就是确定一个有限测度 ψ，此测度在紧集 $\widetilde{K}=K\times K$ 上的 Borel 集的 σ-代数 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 上给定，并且集合 $e\times e'$ 的测度表示

$$u(s_0)-u(t_0)=r(t_0, s_0)=r(t_0, z_0)+r(z_0, s_0), \qquad (18)$$

则集合

$$U_{z_0}=\{z\in K \mid u(z)=u(z_0)\} \qquad (19)$$

处于分别以 t_0, s_0 为中心且都通过 z_0 的两个球之外. 换句话说, 对于任意一点 $z\in U_{z_0}$ 不等式

$$r(t_0, z)\geqslant r(t_0, z_0), \qquad r(z, s_0)\geqslant r(z_0, s_0)$$

成立.

证. 根据(17)式, 有

$$u(z_0)-u(t_0)\leqslant r(t_0, z_0), \qquad u(s_0)-u(z_0)\leqslant r(z_0, s_0),$$

由此及(18)式可得

$$u(z_0)-u(t_0)=r(t_0, z_0), \qquad u(s_0)-u(z_0)=r(z_0, s_0).$$

但这时对于任意点 $z\in U_{z_0}$, 根据条件(17)有

$$r(t_0, z)\geqslant u(z)-u(t_0)=u(z_0)-u(t_0)=r(t_0, z_0),$$

$$r(z, s_0)\geqslant u(s_0)-u(z)=u(s_0)-u(z_0)=r(z_0, s_0).$$

证毕.

现在, 注意到所给的最优性判别准则便可断定, Monge-Appel 定理对于在任意欧氏空间或 Hilbert 空间中凸紧集上的物资调配问题都是正确的. 此外, 若由测度 $\psi\in\Psi_\varphi$ 确定的容许调配是最优的, 则可以取对应于最优性判别准则中的函数 u: $K\to\boldsymbol{R}$ 的一个单参数曲面族 $u(z)=\text{const}$, 即可得此定理. 事实上, 如果从点 t_0 完成到点 s_0 的移动, 即$(t_0, s_0)\in\operatorname{supp}\psi$, 则对于任意 $z_0\in(t_0, s_0)$, 由引理 2, 开区间(t_0, s_0)落在相应的曲面(19)的法线上.

Monge 讨论的物资调配问题的另一个特征是: 其中满足条件 (14) 的原来的可数可加函数 $\varphi:\mathscr{B}\to\boldsymbol{R}$ 可以取作:

$$\varphi(e)=\mu(e\cap N)-\mu(e\cap M), \qquad e\in\mathscr{B},$$

其中 μ 是某个指定的测度 (Lebesgue 测度), 而M和N是给定的可测集, 且 $\mu(N)=\mu(M)$. 然而, 我们已经看到, 在证明 Monge-Appel 定理时并没有利用这个特征.

4.3. 为了证明前述的关于所考虑的物资调配问题的论断, 按照 Канторович 和 Рубинштейн 的著作[1], [2], 我们先研究由这个问题而产生的线性赋范空间, 它本身也有独立的意义. 特别, 还附带得出在度量紧集上的连续函数空间中的线性泛函(*)-弱收敛的重要特征.

考虑任意具有度量 $r(t, s)$ 的度量紧集K以及它的Borel集合系$\mathscr{B}$. 在所

有可数可加函数 $\varphi:\mathscr{B}\to\boldsymbol{R}$ 构成的 B-空间 $\mathbf{rca}(K)$ 中*)，分出较窄的集合 $\Phi_0(\mathscr{B})$，其中的元素满足条件(14). 每一个在 $\widetilde{K}(=K\times K)$ 上的有限 Borel 测度 ψ 对应于函数

$$\varphi(e)=\psi(K,e)-\psi(e,K),\qquad e\in\mathscr{B}, \tag{20}$$

它显然满足条件(14)，因此也属于 $\Phi_0(\mathscr{B})$. 另一方面，任意的 $\varphi\in\Phi_0(\mathscr{B})$，对于函数**)

$$\psi^*(e,e')=\frac{\varphi_-(e)\cdot\varphi_+(e')}{\varphi_+(K)},\qquad e\in\mathscr{B},\ e'\in\mathscr{B} \tag{21}$$

有

$$\psi^*(K,e)-\psi^*(e,K)=\varphi_+(e)-\varphi_-(e)=\varphi(e),\quad e\in\mathscr{B},$$

即满足条件(20)的测度 $\psi\in\Psi(\mathscr{B})$ 的集合 Ψ_φ 非空.

不难验证，对于这个集合 Ψ_φ 下面的关系式成立:

$$\Psi_{\varphi_1}+\Psi_{\varphi_2}=\{\psi_1+\psi_2\mid\psi_1\in\Psi_{\varphi_1},\psi_2\in\Psi_{\varphi_2}\}\subset\Psi_{\varphi_1+\varphi_2}, \tag{22}$$

$$0\in\Psi_0,\ \lambda\Psi_\varphi=\{\lambda\psi\in\Psi_\varphi\}=\Psi_{\lambda\varphi},\quad \lambda>0. \tag{23}$$

此外，为了得到集合 $\Psi_{-\varphi}$，只要把集合 Ψ_φ 中每个函数 ψ 代之以"转置"测度 ψ^{T}，其中对于任意 Borel 集 $E\subset\widetilde{K}$，$E^{\mathrm{T}}=\{(t,s):(s,t)\in E\}$，$\psi^{\mathrm{T}}(E)=\psi(E^{\mathrm{T}})$. 特别

$$\psi^{\mathrm{T}}(e,e')=\psi(e',e),\quad e\in\mathscr{B},\quad e'\in\mathscr{B}.$$

因此

$$\Psi_{-\varphi}=\{\psi^{\mathrm{T}}\mid\psi\in\Psi_\varphi\}=(\Psi_\varphi)^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

现在容易指出，定义在 $\Phi_0(\mathscr{B})$ 上的非负函数

$$\|\varphi\|_r=\inf_{\psi\in\Psi_\varphi}\tau(\psi)=\inf_{\psi\in\Psi_\varphi}\int_{\widetilde{K}}r(t,s)\,d\psi(t,s) \tag{25}$$

满足半范数公理

$$\|\lambda\varphi\|_r=|\lambda|\cdot\|\varphi\|_r, \tag{26}$$

$$\|\varphi_1+\varphi_2\|_r\leqslant\|\varphi_1\|_r+\|\varphi_2\|_r. \tag{27}$$

事实上，不等式(27)是包含关系(22)及函数(16)可加性的推论. 而等式(26)，当 $\lambda\geqslant0$ 时，可由(23)式及函数(16)的齐性推出. 当 $\lambda<0$ 时注意到

---

*) 我们指出，任意一个在度量紧集 K 的 Borel 集的 σ-代数 $\mathscr{B}$ 上给定的有限可数可加集合函数都是正则的(参见 Halmos).

**) 这个函数是按与运输问题中容许矩阵(11)一样的原则构造的. 它对应于这样的调配，即使每个 Borel 集 e 上具有的物资 $\varphi_-(e)$ 与需求量 $\varphi_+(e')$ 相称地分配到所有 $e'\in\mathscr{B}$ 上.

$$\tau(\psi^T)=\int_{\widetilde{K}} r(t,s)d\psi(s,t)=\int_{\widetilde{K}} r(s,t)d\psi(s,t)=\tau(\psi),$$

(26)便可由(24)推出.

下面将证明(参见后面的定理 1 的注 1),函数(25)还满足条件

$$\|\varphi\|_r=0 \Rightarrow \varphi=0, \tag{28}$$

即它是 $\Phi_0(\mathscr{B})$ 上的范数. 然而这个结论在建立了所得空间 $\Phi_0^r(\mathscr{B})$ 的若干性质之后,验证起来较为方便,而我们暂时把空间看成为具有由半距*)

$$\rho_r(\varphi_1,\varphi_2)=\|\varphi_1-\varphi_2\|_r\text{**)}$$

生成的拓扑而构成的拓扑空间,虽然下面将要证明这时得到的是赋范空间的拓扑,但形式上暂时还不能认为是这样的. 所以我们应该约定这时采用的术语.

设给定一序列 $\{\varphi_n\}$, 若 $\|\varphi_n-\varphi\|_r\to 0$, 则称此序列强收敛于 φ (记为 $\varphi_n\xrightarrow{\tau}\varphi$). 我们用 $(\Phi_0^r(\mathscr{B}))^*$ 表示在 $\Phi_0(\mathscr{B})$ 上关于强收敛连续的所有线性泛函的集合,如果对于任意 $L\in(\Phi_0^r(\mathscr{B}))^*$, $L(\varphi_n)\to L(\varphi)$, 则称序列 $\{\varphi_n\}$ 弱收敛于 φ (记为 $\varphi_n\cdots\to\varphi$).

4.4. 这一节要证明几个辅助命题.

大家知道,测度 ψ 的支集 $\operatorname{supp}\psi$ 由这样的点 $(t,s)\in K\times K$ 组成,使对于这些点的任意邻域 e_t 和 e_s 有 $\psi(e_t,e_s)>0$. 而函数 $\varphi\in\mathbf{rca}(K)$ 的支集 $\operatorname{supp}\varphi$ 由这样的点 $t\in K$ 组成,使对于该点的任意的邻域 e_t 有

$$\max\{\varphi_+(e_t),\varphi_-(e_t)\}>0.$$

这就意味着

$$\operatorname{supp}\varphi=(\operatorname{supp}\varphi_+)\cup(\operatorname{supp}\varphi_-)$$

并且它与满足条件 $\varphi(e)=\varphi(e\cap F)$, $e\in\mathscr{B}$ 的最小闭集 $F\subset K$ 一致.

引理 3. 对于任何函数 $\varphi\in\Phi_0^r(\mathscr{B})$, 下面的估计式成立:

$$\|\varphi\|_r\leqslant\varphi_+(K)\cdot\max\{r(t,s):\ t\in\operatorname{supp}\varphi_-,\ s\in\operatorname{supp}\varphi_+\},$$

$$\|\varphi\|_r\leqslant\varphi_+(K)\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi),$$

其中 $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi)$ 表示在 K 中集 $\operatorname{supp}\varphi$ 的直径.

证. 只要指出,对于根据(21)式确定的测度 $\psi^*\in\Psi_\varphi$ 有

---

*) 半距满足除了从 $\rho(x,y)=0$ 推出 $x=y$ 外的度量的所有公理,由半距生成的拓扑的定义与度量生成的拓扑相同.

**) 这个度量通常叫做 Канторович-Рубинштейн 度量.

$$\psi^*(K,K)=\varphi_-(K)=\varphi_+(K),$$
$$\operatorname{supp}\psi^*=(\operatorname{supp}\varphi_-)\times(\operatorname{supp}\varphi_+).$$

所以

$$\|\varphi\|_r=\inf_{\psi\in\Psi_\varphi}\tau(\psi)\leqslant\tau(\psi^*)=\int_K\int_K r(t,s)d\psi^*(t,s)$$
$$\leqslant\varphi_+(K)\cdot\max\{r(t,s):t\in\operatorname{supp}\varphi_-,\ s\in\operatorname{supp}\varphi_+\}$$
$$\leqslant\varphi_+(K)\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi),$$

这就是所要证明的.

利用所作的估计，我们现在建立集合

$$S_0^\nu=\{\varphi\in\Phi_0(\mathscr{B}):\quad\varphi_+(K)+\varphi_-(K)\leqslant\nu\}\tag{29}$$

的一些重要性质，它们关于所有 $\nu\geqslant0$ 的并集显然与 $\Phi_0(\mathscr{B})$ 一致. 为了建立这些性质，在 $\mathbf{rca}(K)$ 中分出具有有限支集的所有函数的集合 $\tilde{\Phi}(\mathscr{B})$，即它是最简单函数

$$\varphi_t(e)=\begin{cases}1 & 当\ t\in e,\\ 0 & 当\ t\notin e\end{cases}$$

的线性包，这些最简单函数的支集是单点集.

然后考察集合

$$\tilde{\Phi}_0(\mathscr{B})=\Phi_0(\mathscr{B})\cap\tilde{\Phi}(\mathscr{B}),\quad \tilde{S}_0^\nu=S_0^\nu\cap\tilde{\Phi}(\mathscr{B}).$$

函数

$$\varphi_{ts}=\varphi_s-\varphi_t\tag{30}$$

在 $\tilde{\Phi}_0(\mathscr{B})$ 中已是最简单的了. 对于这些函数，当 $t\neq s$ 时有 $\operatorname{supp}\varphi_{ts}=\{t,s\}$，$(\varphi_{ts})_+=\varphi_s$，$(\varphi_{ts})_-=\varphi_t$，因而由引理 3

$$\|\varphi_{ts}\|_r\leqslant(\varphi_{ts})_+(K)\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi_{ts})=r(t,s).\tag{31}$$

并且这些最简单函数(30)的线性包显然与整个 $\tilde{\Phi}_0(\mathscr{B})$ 重合.

引理 4. 对于任意的 $\nu>0$ 及 $\varepsilon>0$，在 $\tilde{S}_0^\nu$ 中存在关于半范数(25)的 S_0^ν 中的有限 ε-网*).

证. 把原来的紧集表示为 $K=\bigcup_{i=1}^m e_i$，其中非空 Borel 集合 e_i 当 $i\neq j$ 时有 $e_i\cap e_j=\varnothing$ 且 $\max(\operatorname{diam}e_i)<\varepsilon/(2\nu)$. 在每个 e_i 中指定某个点 t_i，此外，还任意指定一个点 $t_0\in K$ 及自然数

*) 关于半距的 ε-网与关于度量的 ε-网同样定义.

$$q>\frac{2m}{\varepsilon}\operatorname{diam}K.$$

现在考察整数向量

$$p=(p_1,\cdots,p_m) \tag{32}$$

的集合 p, 这些向量满足条件 $\sum_{i=1}^{m}|p_i|+\left|\sum_{i=1}^{m}p_i\right|\leqslant q\nu$, 且使每个向量对应于一个函数

$$\tilde{\tilde{\varphi}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i}{q}\varphi_{t_0t_i}\qquad p\in P. \tag{33}$$

显然它们属于 $\tilde{S}_0^\nu$, 我们来证明它们构成了所要求的 ε-网.

首先每个函数 $\varphi\in S_0^\nu$ 对应空间 $\tilde{S}_0^\nu$ 中的函数

$$\tilde{\varphi}=\sum_{i=1}^{m}\varphi(e_i)\varphi_{t_i}=\sum_{i=1}^{m}\varphi(e_i)\varphi_{t_0t_i}, \tag{34}$$

我们来验证

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}^2\|_\tau\leqslant\varepsilon/2. \tag{35}$$

为此, 考察 $\Phi_0(\mathscr{B})$ 中的函数

$$\varphi_i(e)=\varphi(e\cap e_i)-\varphi(e_i)\varphi_{t_i}(e),\quad e\in\mathscr{B},\quad i=1,\cdots,m.$$

它们的支集包含在对应于 e_i 的闭包之中, 因而

$$\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi_i)\leqslant\operatorname{diam}e_i<\frac{\varepsilon}{2\nu}.$$

此外, $(\varphi_i)_+(K)=(\varphi_i)_+(e_i)\leqslant\varphi_+(e_i)+\varphi_-(e_i)$, 所以根据引理可知

$$\|\varphi_i\|_\tau\leqslant\frac{\varepsilon}{2\nu}[\varphi_+(e_i)+\varphi_-(e_i)].$$

但是, 这时

$$\begin{aligned}\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_\tau&=\|\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\|_\tau\leqslant\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|_\tau\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2\nu}\sum_{i=1}^{m}[\varphi_+(e_i)+\varphi_-(e_i)]\\&=\frac{\varepsilon}{2\nu}[\varphi_+(K)+\varphi_-(K)]\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

即估计式(35)成立.

现在还要指出，对于函数(34)存在向量 $p\in P$，使得它所对应的函数(33)满足条件

$$\|\widetilde{\varphi}-\widetilde{\widetilde{\varphi}}\|_\tau<\varepsilon/2. \tag{36}$$

设 $p_i=s_ic_i, i=1,2,\cdots,m$，其中 $s_i=\operatorname{sign}\varphi(e_i)$，而 c_i 是非负量 $q|\varphi(e_i)|$ 的整数部分，这时

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m|p_i|+\left|\sum_{i=1}^m p_i\right|&=\sum_{i=1}^m c_i+\left|\sum_{i=1}^m[q\varphi(e_i)-p_i]\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^m c_i+\sum_{i=1}^m|q\varphi(e_i)-p_i|\\&=\sum_{i=1}^m c_i+\sum_{i=1}^m[q|\varphi(e_i)|-c_i]\\&=q\sum_{i=1}^m|\varphi(e_i)|\leqslant q\sum_{i=1}^m[\varphi_+(e_i)+\varphi_-(e_i)]\leqslant q\nu,\end{aligned}$$

即对应的向量(32)属于集合 P. 我们指出，对应于该向量的函数(33)满足条件(36)的要求. 事实上

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\varphi}-\widetilde{\widetilde{\varphi}}\|_\tau&=\left\|\sum_{i=1}^m\left[\varphi(e_i)-\frac{p_i}{q}\right]\varphi_{t_0t_i}\right\|_\tau\leqslant\sum_{i=1}^m\left|\varphi(e_i)-\frac{p_i}{q}\right|\|\varphi_{t_0t_i}\|_\tau\\&\leqslant\frac{1}{q}\operatorname{diam}K\sum_{i=1}^m[q|\varphi(e_i)|-c_i]\leqslant\frac{m}{q}\operatorname{diam}K<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

这就完成了引理的证明.

推论 1. 线性集合 $\widetilde{\Phi}_0(\mathscr{B})$ 在空间 $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ 内处处稠密.

推论 2. 空间 $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ 中两个线性连续泛函，若在所有函数(30)上取值相同，则它们必重合.

引理 5. 对于 S_0^ν 中的函数来说，在 $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ 中强收敛与弱收敛是一致的. 更确切地说，如果 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\subset S_0^\nu$，则 $\varphi_n\xrightarrow{\tau}\varphi_0$ 的充要条件为 $\varphi_n\cdots\to\varphi_0$.

证. 不必补充任何假设，从强收敛显然可以推出弱收敛. 现在假设 $\varphi_n\cdots\to\varphi_0$，并且 $\varphi_n\in S_0^\nu$. 如果这时函数 φ_n 不强收敛于 φ_0，则对于某个 $\varepsilon>0$，存在子序列 φ_{n_k}，使得

$$\|\varphi_{n_k}-\varphi_0\|_\tau\geqslant2\varepsilon,\qquad k=1,2,\cdots,$$

注意到引理 4, 不失一般性, 可认为这个子序列是自收敛的. 因此存在k_0, 使对于所有 $k\geqslant k_0$ 有

$$\|\varphi_{n_k}-\varphi_{n_{k_0}}\|_r\leqslant\varepsilon^{*)}.$$

根据 Hahn-Banach 定理, 存在泛函 $L\in(\Phi_0^r(\mathscr{B}))^*$, 使得

$$\|L\|=1,\quad L(\varphi_{n_{k_0}}-\varphi_0)=\|\varphi_{n_{k_0}}-\varphi_0\|_r.$$

这时对于所有的 $k\geqslant k_0$ 有

$$L(\varphi_{n_k}-\varphi_0)=L(\varphi_{n_{k_0}}-\varphi_0)+L(\varphi_{n_k}-\varphi_{n_{k_0}})\geqslant 2\varepsilon-\varepsilon=\varepsilon,$$

这与 φ_n 弱收敛于 φ_0 矛盾. 引理证毕.

引理 6. 对于任何 $\varphi\in\Phi_0(\mathscr{B})$ 及 $\psi\in\Psi_\varphi$ 不等式

$$\psi(K,K)\geqslant\varphi_+(K)=\varphi_-(K)$$

成立, 且此式等号成立的充要条件为

$$\psi(K,e)=\varphi_+(e),\quad \psi(e,K)=\varphi_-(e),\quad e\in\mathscr{B}.$$

证. 对于运输问题, 类似的结论在 4.1 中已证明过了. 用集合 $e\in\mathscr{B}$ 代替个别的点, 而用积分代替有限和, 重复那里的讨论便得所要的结果.

4.5. 现在来建立在空间 $\Phi_0^r(\mathscr{B})$ 中线性泛函的一般形式. 为此目的, 我们考察空间 $\mathbf{Lip}^1(K)$, 它由满足 Lipschitz 条件的函数 $u:K\to\boldsymbol{R}$ 组成, 即对其中函数有

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}}=\sup_{t\neq s}\frac{u(s)-u(t)}{r(t,s)}<\infty.$$

显然, 这个空间是半赋范空间, 并且

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}}=0\Longleftrightarrow u(t)=\mathrm{const}\qquad x\in K. \tag{37}$$

为了得到赋范空间, 应把它对常数函数的子空间取商空间或限于考察某个线性子集, 例如

$$\mathbf{Lip}^1(K,t_0)=\{u\in\mathbf{Lip}^1(K)\mid u(t_0)=0\}.$$

下述定理表明, 赋范空间 $\mathbf{Lip}^1(K,t_0)$ 与 $\Phi_0^r(\mathscr{B})$ 中线性连续泛函的空间 $(\Phi_0^r(\mathscr{B}))^*$ 线性同构.

定理 1. 对应于每个函数 $u\in\mathbf{Lip}^1(K)$ 的可加齐次泛函

$$L_u(\varphi)=\int_K u(t)d\varphi(t),\ \varphi\in\Phi_0^r(\mathscr{B}) \tag{38}$$

是连续的, 并且

---

*) 这可以同度量空间中完全一样地证明.

$$\|L_u\| = \|u\|^{*)}_{\mathrm{Lip}}. \tag{39}$$

反之，对于 $\Phi_0^{\tau}(\mathscr{B})$ 中任意的线性连续泛函 L，存在函数 $u \in \mathbf{Lip}^1(K)$，使得 $L = L_u$，并且，这个函数在相差一个常数的范围内是确定的.

证. 对于任意 $u \in \mathbf{Lip}^1(K)$，$\varphi \in \Phi_0^{\tau}(\mathscr{B})$，$\psi \in \Psi_{\varphi}$ 有

$$\begin{aligned} L_u(\varphi) &= \int_K u(t)\,d\varphi = \int_K u(t)\,d\psi(K, t) - \int_K u(t)\,d\psi(t, K) \\ &= \int_{\tilde{K}} u(s)\,d\psi(t, s) - \int_{\tilde{K}} u(t)\,d\psi(t, s) \\ &= \int_{\tilde{K}} (u(s) - u(t))\,d\psi(t, s) \\ &\leqslant \|u\|_{\mathrm{Lip}} \int_{\tilde{K}} r(t, s)\,d\psi(t, s) = \|u\|_{\mathrm{Lip}} \tau(\psi). \end{aligned}$$

所以

$$L_u(\varphi) \leqslant \|u\|_{\mathrm{Lip}} \inf_{\psi \in \Psi_{\varphi}} \tau(\psi) = \|u\|_{\mathrm{Lip}} \|\varphi\|_{\tau}, \tag{40}$$

因而泛函(38)是连续的，并且

$$\|L_u\| \leqslant \|u\|_{\mathrm{Lip}}. \tag{41}$$

为了得到相反的不等式，只要考察最简单函数(30)，对于这种函数

$$L_u(\varphi_{ts}) = \int_K u(z)\,d\varphi_{ts}(z) = u(s) - u(t).$$

并且，由(31)式得

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{t \neq s} \frac{u(s) - u(t)}{r(t, s)} \leqslant \sup_{t \neq s} \frac{L_u(\varphi_{ts})}{\|\varphi_{ts}\|_{\tau}} \leqslant \|L_u\|. \tag{42}$$

由(41)和(42)推出所要求的等式(39).

为了证明定理的第二部分，指定某一点 $t_0 \in K$，令每个泛函 $L \in (\Phi_0^{\tau}(\mathscr{B}))^*$ 对应于函数

$$u(t) = L(\varphi_{t_0 t}), \qquad t \in K.$$

此外，对于 K 中任意的 t 和 s 有

$$L(\varphi_{ts}) = L(\varphi_{t_0 s} - \varphi_{t_0 t}) = u(s) - u(t),$$

$$u(s) - u(t) = L(\varphi_{ts}) \leqslant \|L\| \|\varphi_{ts}\|_{\tau} \leqslant \|L\| r(t, s).$$

因而 $u \in \mathbf{Lip}^1(K)$，并且

$$L(\varphi_{ts}) = L_u(\varphi_{ts}) = u(s) - u(t), \quad t \in K, \quad s \in K.$$

但是根据引理 3 的推论 2，泛函 L 和 L_u 是重合的.

---

*) $\|L_u\| = \sup\{|L_u(\varphi)| : \|\varphi\|_{\tau} \leqslant 1\}$.

从(37)和(39)推出定理中最后一个关于选择函数 u 可差任意常数的结论.

注 1. 利用不等式(40)我们现在可以指出半范数(25)是范数.

为此,考察任意非零函数 $\varphi\in\Phi_0(\mathscr{B})$ 及与之对应地把紧集 K 分解为两个不相交的 Borel 集 K_φ^+ 和 K_φ^-,使得

$$\varphi_+(e)=\varphi(e\cap K_\varphi^+),\quad \varphi_-(e)=-\varphi(e\cap K_\varphi^-),\ e\in\mathscr{B}^{*)}.$$

因为函数 φ 非零, $\varphi_+(K)=\varphi_+(K_\varphi^+)>0$. 由于 φ_+ 的正则性,这时存在闭集 $F\subset K_\varphi^+$, 使得 $\varphi_+(F)>0$. 取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\varphi_+(F)$ 及利用等式 $\varphi_-(F)=0$ 和函数 φ_+ 与 φ_- 的正则性,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使对于集 F 的 δ-邻域

$$F_\delta=\{t\in K:\ r(t,F)=\min_{s\in F}r(t,s)<\delta\}$$

有不等式

$$\varphi_-(F_\delta)<\varepsilon\qquad \varphi_+(F_\delta\backslash F)<\varepsilon.$$

容易看出,函数

$$u(t)=\begin{cases}\delta-r(t,F) & \text{当 } t\in F_\delta,\\ 0 & \text{当 } t\notin F_\delta\end{cases}$$

满足 Lipschitz 条件,且 $\|u\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant1$. 这时,根据(40)式有

$$\|\varphi\|_r\geqslant\|u\|_{\mathrm{Lip}}\|\varphi\|_r\geqslant L_u(\varphi)=\int_K u(t)d\varphi=\int_{F_\delta}u(t)d\varphi$$
$$=\int_{F_\delta}u(t)d\varphi_+-\int_{F_\delta}u(t)d\varphi_-.$$

其次,因为当 $t\in F$ 时 $r(t,F)=0$ 及当 $t\in F_\delta\backslash F$ 时 $r(t,F)<\delta$,我们得到

$$\int_{F_\delta}u(t)d\varphi^+=\delta\varphi_+(F_\delta)-\int_{F_\delta}r(t,F)d\varphi_+$$
$$\geqslant\delta\varphi_+(F_\delta)-\delta\varphi_+(F_\delta\backslash F)>\delta[\varphi_+(F_\delta)-\varepsilon],$$
$$\int_{F_\delta}u(t)d\varphi_-\leqslant\delta\varphi_-(F_\delta)<\delta\varepsilon.$$

从而

$$\|\varphi\|_r\geqslant\delta[\varphi_+(F_\delta)-2\varepsilon]>0,$$

证毕.

注 2. 对于任意的 $M\subset K$, 每个函数 $\tilde{u}\in\mathrm{Lip}^1(M)$ 都是某个函数 $u\in\mathrm{Lip}^1(K)$ 在 M 上的限制,并且有相同的范数.

---

*) 参见定理 I.6.2.

事实上，把函数 $\tilde{u}$ 连续延拓到集M的闭包 $\overline{M}$ 上，然后把在

$$E=\{\varphi\in\Phi_0^r(\mathscr{B}):\ \mathrm{supp}\subseteq\overline{M}\}$$

上由所得到的函数确定的线性泛函保范延拓到整个空间 $\Phi_0^r(\mathscr{B})$ 上. 结果得到 $\mathbf{Lip}^1(K)$ 中某函数，它和所要求的函数只可能相差一个常数项.

注 3. 除了具有度量 $r(t, s)$ 的度量紧集K外，我们还可以考察具有度量 $r'(t, s)=[r(t, s)]^\alpha$ 的度量紧集 $K'=K$, 其中 $\alpha\in(0, 1]$. 对应的赋范空间 $\mathbf{Lip}^1(K', t_0)$ 显然与空间 $\mathbf{Lip}^\alpha(K, t_0)$ 重合，其中

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}^\alpha}=\sup_{t\neq s}\frac{u(s)-u(t)}{[r(t, s)]^\alpha}.$$

因而，此空间与 $\Phi_0^r(\mathscr{B}_{K'})$ 中线性泛函空间 $(\Phi_0^r(\mathscr{B}_{K'}))^*$ 线性等距.

现在来证明在 4.2 中引出的最优调配的判别准则.

定理 2. 要测度 $\psi\in\Psi_\varphi$ 使等式

$$\tau(\psi)=\|\varphi\|_r \tag{43}$$

成立，当且仅当存在函数 u: $K\to\boldsymbol{R}$, 使得

$$u(s)-u(t)\leqslant r(t, s),\quad t\in K,\ s\in K \tag{44}$$

并且当 $(t, s)\in\mathrm{supp}\psi$ 时

$$u(s)-u(t)=r(t, s). \tag{45}$$

证. 对于任意的测度 $\psi\in\Psi_\varphi$ 及任意的具有范数 $\|u\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant1$ 的函数 $u\in\mathbf{Lip}^1(K)$ 有

$$\begin{aligned}\tau(\psi)&=\int_{\underset{\sim}{K}}r(t, s)d\psi(t, s)\geqslant\int_{\underset{\sim}{K}}(u(s)-u(t))d\psi(t, s)\\&=\int_K u(s)d\psi(K, s)-\int_K u(t)d\psi(t, K)\\&=\int_K u(t)d\varphi=L_u(\varphi),\end{aligned} \tag{46}$$

$$L_u(\varphi)\leqslant\|\varphi\|_r\leqslant\tau(\psi). \tag{47}$$

现在假设对于测度 $\psi\in\Psi_\varphi$ 可求出满足条件(44)和(45)的函数 $u:K\to\boldsymbol{R}$. 则对于这个函数 u, (46)中不等式作为等式成立，由此及(47)推出(43)式成立.

反之，设条件(43)对于测度 $\psi\in\Psi_\varphi$ 成立. 由定理 1 及 Hahn-Banach 定理推出，存在函数 $u\in\mathbf{Lip}^1(K)$, 具有范数 $\|u\|_{\mathrm{Lip}}=1$, 对于它 $L_u(\varphi)=\|\varphi\|_r$. 换言之，函数满足(44)且对此函数(47)中左端不等式作为等式成立. 这时(47)中两个不等式都作为等式成立；从而(46)中的不等式也作为等式成立. 但这

表示函数 u 满足条件(45). 定理证毕.

特别地,由此定理可推出最简单函数 $\varphi_{t,s}\in\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ 的τ-范数与对应的点之间的距离 $r(t,s)$ 重合. 事实上,当 t_0 和 s_0 是 K 中任意元素时,对于 $\Psi_{\varphi_{t_0s_0}}$ 中的函数

$$\psi_{t_0s_0}(e,e')=\varphi_{t_0}(e)\varphi_{s_0}(e'),\quad e\in\mathscr{B},\quad e'\in\mathscr{B},$$

有

$$\operatorname{supp}\psi_{t_0s_0}=\{(t_0,s_0)\},$$

$$\tau(\psi_{t_0s_0})=\int_K\int_K r(t,s)\,d\psi_{t_0s_0}(t,s)=r(t_0,s_0),$$

且函数

$$u(t)=r(t_0,t)\quad t\in K$$

满足所得定理的条件.

但是,下面导出的二个推论是更重要的,它可以用注 2 及 4.1 中的引理 1 来验证.

推论 1. 设 $\overline{K}\subset K$ 是某个闭集, 并且对于函数 $\widetilde{\varphi}\in\Phi_0^\tau(\mathscr{B}_{\overline{K}})$, 存在测度 $\widetilde{\psi}\in\Psi_\varphi$, 使得

$$\tau(\widetilde{\psi})=\int_{\overline{K}}\int_{\overline{K}} r(t,s)\,d\widetilde{\psi}(t,s)=\|\widetilde{\varphi}\|_\tau.$$

则对于 $\Phi_0^\tau(\mathscr{B}_K)$ 中的函数 $\varphi(e)=\widetilde{\varphi}(e\cap\overline{K})$, $e\in\mathscr{B}_K$ 及 Ψ_φ 中的测度

$$\psi(e,e')=\widetilde{\psi}(e\cap\overline{K},e'\cap\overline{K}),\ e\in\mathscr{B}_K,\ e'\in\mathscr{B}_K,$$

有类似的等式成立:

$$\tau(\psi)=\int_K\int_K r(t,s)\,d\psi(t,s)=\|\varphi\|_\tau,$$

并且 $\|\varphi\|_\tau=\|\widetilde{\varphi}\|_\tau$

推理 2. 如果函数 $\varphi\in\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ 具有有限支集, 则在集 Ψ_φ 中总存在这样的测度 ψ, 使得 $\tau(\psi)=\|\varphi\|_\tau$, 并且

$$\psi(K,K)=\varphi_+(K)=\varphi_-(K),$$

即 $\psi(K,e)=\varphi_+(e)$, $\psi(e,K)=\varphi_-(e)$, $e\in\mathscr{B}$.

最后的命题实际上对具有无限支集的函数 $\varphi\in\Phi_0^\tau$ ($\mathscr{B}$) 也成立. 然而要证明这个结果需要预先建立空间 $\mathbf{C}(K)$ 中线性泛函的 τ-范数与 (*)-弱收敛之间的联系.

4.6. 我们已经知道（参见定理 VI.3.1），$\mathbf{C}(K)$ 中线性连续泛函空间 $(\mathbf{C}(K))^*$ 与 B-空间 $\mathbf{rca}(K)$ 线性等距. 如果在 $\mathbf{rca}(K)$ 中序列 $\{\varphi_n\}$ (*)-弱收敛于 φ_0，则记为 $\varphi_n \overset{(*)}{\dashrightarrow} \varphi_0$. 我们指出，从 φ_n 对 φ_0 的 (*)-弱收敛性显然可以推出收敛性 $\varphi_n(K) \to \varphi_0(K)$. 下面用 $\|\varphi\|$ 表示 φ 在 $\mathbf{rca}(K)$ 中的范数，即

$$\|\varphi\| = \varphi_+(K) + \varphi_-(K).$$

从定理 1.1 推出，如果 $\varphi_n \overset{(*)}{\dashrightarrow} \varphi_0$，则

$$\|\varphi_0\| \leqslant \underline{\lim} \|\varphi_n\| \leqslant \overline{\lim} \|\varphi_n\| < \infty. \tag{48}$$

其次，每个 (*)-弱闭集 $M \subset \mathbf{rca}(K)$ 都是 (*)-弱序列完备的(参见 1.2)，即如果 $\varphi_n \in M$ 是这样的函数，使对于任意的 $x \in \mathbf{C}(K)$ 积分 $\int_K x d\varphi_n$ 都收敛，则这些函数 (*)-弱收敛于某个函数 $\varphi_0 \in M$. 特别，这与所有测度 $\varphi \in \mathbf{rca}(K)$ 的集合 $\mathbf{rca}_+(K)$ 有关，与子空间 $\Phi_0(\mathscr{B}) \subset \mathbf{rca}(K)$ 有关，也与半径为任意的 $\nu \in [0, +\infty)$ 的闭球

$$S^\nu = \{\varphi \in \mathbf{rca}(K): \|\varphi\| \leqslant \nu\}$$

及 $\Phi_0(\mathscr{B})$ 中的闭球

$$S_0^\nu = \{\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B}): \|\varphi\| \leqslant \nu\}$$

有关，这些我们在 4.4 中已遇到过. 同时，因为空间 $\mathbf{C}(K)$ 可分（参见定理 IV.4.3)，所以这些球 S^ν 和 S_0^ν 还是 (*)-弱列紧的(参见定理 V.7.6).

空间 $\mathbf{rca}(K)$ 在概率论、几何学及其他数学分枝中有广泛的应用. 并且，在这个空间中 (*)-弱收敛性比强收敛性往往起着更大的作用. 它可以这样解释：首先，球 S^ν 具有所示的 (*)-弱紧性，此外在研究许多问题时，$\mathbf{rca}(K)$ 中的范数太粗糙. 这个范数与原始度量 $r(t, s)$ 及其在 K 中生成的拓扑无直接联系. 由此，用这个范数确定的对 $\mathbf{rca}(K)$ 中函数邻近的测度不总与其自然表态相容. 例如，当 $t \neq t_0$ 时，差 $\varphi_t - \varphi_{t_0}$ 的 ν-范数等于 2，不依赖于对应点之间的距离 $r(t, t_0)$. 但是在应用时用 $\mathbf{rca}(K)$ 中 (*)-弱拓扑来研究也不总是方便的，因为它不可度量，在这种情况下，用 τ-范数是有益的.

对于函数 $\varphi \in \Phi_0$ $(\mathscr{B})$，除了强收敛 $\xrightarrow{\nu}$ 和空间 $\mathbf{rca}$ (K) 中的 (*)-弱收敛 $\overset{(*)}{\dashrightarrow}$ 外，还有空间 $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ 中的强收敛 $\xrightarrow{\tau}$ 及弱收敛 $\cdots\to$. 后者比 (*)-弱收敛更弱，因为不是所有的连续函数都满足 Lipschitz 条件. 所以对 $\Phi_0(\mathscr{B})$ 中函数，由 (48) 可知

$$\varphi_n \overset{(*)}{\dashrightarrow} \varphi_0 \Rightarrow \sup\|\varphi_n\| < +\infty, \quad \varphi_n \cdots\to \varphi_0. \tag{49}$$

此外，根据 4.4 中的引理 5 可知

$$\{\varphi_n\} \subset S_0^\nu, \varphi_n \cdots\to \varphi_0 \Longleftrightarrow \{\varphi_n\} \subset S_0^\nu, \quad \varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi_0. \tag{50}$$

引理 7. 如果函数序列 $\varphi_n \in S_0^\nu$ 按τ-范数自收敛，则这个序列 (*)-弱收敛于某个函数 $\varphi_0 \in S_0^\nu$.

证. 因为集合 S_0^ν 是(*)-弱列紧的，所以为了证明引理只须验证所考察的序列$\{\varphi_n\} \subset S_0^\nu$ 不可能有多于一个(*)-弱极限点. 从(49)和(50)推出，序列$\{\varphi_n\}$的每个(*)-弱极限点也都是它的τ-极限点. 而因为这个序列按τ-范数自收敛，所以它不可能有多于一个τ-极限点. 引理得证.

定理 3. 对于任意的$\nu \in [0, \infty)$，集合 S_0^ν 是τ-紧的. 并且，对于S_0^ν 中的函数，在(49)和(50)中出现的三种形式的收敛是一致的，即

$$\varphi_n \overset{(*)}{\dashrightarrow} \varphi_0 \Longleftrightarrow \varphi_n \cdots\to \varphi_0 \Longleftrightarrow \varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi_0.$$

证. 定理的结论可以由引理(7)及关系式(49)和(50)直接推出.

推论. 函数序列 $\varphi_n \in \mathbf{rca}(K)$ (*)-弱收敛于 φ_0 的充要条件为:

$$\sup\|\varphi_n\| < \infty, \qquad \varphi_n(K) \to \varphi_0(K),$$

且对于某一点 $t_0 \in K$（而这时也就对于任一点），$\Phi_0(\mathscr{B})$中的函数

$$\varphi_n' = \varphi_n - \varphi_n(K)\varphi_{t_0}$$

τ-收敛于函数 $\varphi_0' = \varphi_0 - \varphi_0(K)\varphi_{t_0}$.

注. 根据 4.4 中证明的引理 3，对于任意函数 $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$有

$$\|\varphi\|_\tau \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{diam} K\|\varphi\|.$$

同时，范数$\|\varphi\|$和$\|\varphi\|_\tau$ 显然仅对于有限紧集K是等价的. 由此推出，如果紧集K包含了无限多个点，则赋范空间 $\Phi_0^\tau(\mathscr{B}_K)$不完备. 然而由于集合 S_0^ν 的τ-完备性，在许多应用中没有此空间的完备化也行.

在下面解决物资调配问题的证明中，对于任意的原始函数 $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$实质上利用上述的(*)-弱收敛性质. 容易看出，在 $\mathbf{rca}(\widetilde{K})$, $\widetilde{K} = K \times K$, (*)-弱收敛 $\psi_n \overset{(*)}{\dashrightarrow} \psi_0$ 可推出在$\mathbf{rca}(K)$中的(*)-弱收敛 $\psi_n(K, \cdot) \overset{(*)}{\dashrightarrow} \psi_0(K, \cdot)$ 和 $\psi_n(\cdot, K) \overset{(*)}{\dashrightarrow} \psi_0(\cdot, K)$. 其次，用$\|\psi\|$表示在$\mathbf{rca}(\widetilde{K})$中的测度$\psi$ 的范数.

定理 4. 对于任意函数 $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$，在集合 Ψ_φ 中存在测度 ψ，使得 $\tau(\psi) = \|\varphi\|_\tau$. 并且

$$\psi(K,K)=\varphi_+(K)=\varphi_-(K)=\frac{1}{2}\|\varphi\|, \tag{51}$$

即

$$\psi(K,e)=\varphi_+(e),\quad \psi(e,K)=\varphi_-(e),\quad e\in\mathscr{B}. \tag{52}$$

证. 考察任意的函数 $\varphi\in\Phi_0(\mathscr{B})$, 由于引理 4 对此函数可作出这样的具有有限支集的函数序列 $\varphi_n\in\Phi(\mathscr{B})$, 使得

$$\|\varphi_n\|\leqslant\|\varphi\|,\quad \varphi_n\xrightarrow{\tau}\varphi. \tag{53}$$

根据定理 3, 这个序列也(*)-弱收敛于函数 φ.

因为函数 φ_n 具有有限支集, 所以根据定理 2 的推论 2, 对于其中的任意函数可找到这样的测度 $\psi_n\in\Psi_{\varphi_n}$, 使得 $\tau(\psi_n)=\|\varphi_n\|_\tau$, 并且

$$\|\psi_n\|=\psi_n(K,K)=(\varphi_n)_+(K)=(\varphi_n)_-(K)=\frac{1}{2}\|\varphi_n\|, \tag{54}$$

即

$$\psi_n(K,e)=(\varphi_n)_+(e)\qquad \psi_n(e,K)=(\varphi_n)_-(e),\quad e\in\mathscr{B}.$$

因为 $\widetilde{K}$ 是度量紧集, 空间 $\mathbf{C}(\widetilde{K})$是可分的(参见定理 IV. 4.3). 所以在 $\mathbf{rca}(\widetilde{K})=\mathbf{C}(\widetilde{K})^*$ 中的有界集是相对紧的且按(*)-弱拓扑是可度量化的 (参见定理 V. 7.6). 这时根据(54), 从序列$\{\psi_n\}$中可找到子序列$\{\psi_{n_k}\}$, 它(*)-弱收敛于某个测度 ψ, 并且

$$\|\psi\|\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\|\psi_{n_k}\|\leqslant 1/2\|\varphi\|. \tag{55}$$

我们将指出, 测度 ψ 满足定理的论断.

首先, 从测度 ψ_{n_k}(*)-弱收敛于 ψ 可推出, 在 $\mathbf{rca}(K)$中测度 $\psi_{n_k}(K,\cdot)$ 和 $\psi_{n_k}(\cdot,K)$分别收敛于 $\psi(K,\cdot)$和 $\psi(\cdot,K)$. 此外, $\varphi_{n_k}\xrightarrow{(*)}\varphi$. 但这时, 对由集合 $\Psi_{\varphi_{n_k}}$ 的定义推出的关系式

$$\psi_{n_k}(K,\cdot)-\psi_{n_k}(\cdot,K)=\varphi_{n_k},$$

取(*)-弱极限, 便得

$$\psi(K,\cdot)-\psi(\cdot,K)=\varphi,$$

即, 所考察的测度 ψ 属于 Ψ_φ. 从(55)式及引理 6 推出关系式(51)和(52)成立. 最后, 在等式 $\tau(\psi_{n_k})=\|\varphi_{n_k}\|_\tau$ 中取极限并注意(53)式, 便得等式

$$\tau(\psi)=\|\varphi\|_\tau.$$

定理证毕.

注. 特别, 从上面证明的定理推出, 如果在原始物资调配问题中条件

(15)用更强的要求(53)代替，即缩小了容许调配类，则对于这个问题结论实际上并没有变化.

最后指出，所述的关于物资调配问题及其产生的赋范空间的一些结果还是在五十年代中得到的.

以后，它多次被利用，特别用于信息论和遍历理论中. 此外，许多作者在各个方向对它作了补充和推广(例如，参见 С. Г. Крейн 和 Ю. И. Петунин [1]，Рубинштейн[1—3]，Вершик[1]，[2]，Friedlich[1]，Рвачев[1]). Судаков[1] 和 Ехлаков[1]在 Lebesgue 测度调配问题中得到了关于存在具有稠密性的最优运输的有用结果. 在 Левин[1]，[3]，[4](还可参见其中引用的较早的文章)的著作中考察了K是任意紧集，而$r(t, s)$是$K\times K$上的非负连续函数的情况，并且泛函(25)一般来讲已不是$\Phi_0(\mathscr{B})$中的范数. 但许多结果在这个更一般的情况仍然成立，我们指出其中一些结果，除了考察原始的物资调配问题外还可考虑对偶问题：在对$u\in\mathbf{C}(K)$的约束(17)下求泛函

$$\int_K u(t)\,d\varphi \tag{56}$$

的极大值. 用A表示物资调配问题的最优值，即泛函(16)在满足(15)的测度ψ的集合上的下界，用B表示对偶问题的最优值，即泛函(56)在约束(17)下的上界. 容易看出，包含在定理 2 中的(对于r是度量的情况)最优调配判别准则可改写为对偶关系式$A=B$. 在一般情况下最优调配可能不存在，然而这个对偶关系永远有意义，只要$r(t, t)=0(t\in K)$，它就成立. 其次，如果$r(t, t)=0(t\in K)$且r满足三角不等式，则存在最优物资调配ψ且定理 4 成立，即没有过境运输也行. Алсынбаев，Имомназаров 和 Рубинштейн[1] 也对后面这个课题做过研究，在此文章中建立了辅助的非对称范数空间. 并且，和在前面所考虑的经典情况所做的一样，利用这个辅助空间建立了全部要求的结果.

第九章　紧算子与共轭算子

§1. 赋范空间中的紧集

1.1. 在 I.5.2 中已给出空间 $\mathbf{C}(K)$ 中集合紧性的判别法. 我们来阐明空间 $\mathbf{L}^p(D)$（$1<p<\infty$, D 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中有界可测集）中集合紧性的条件.

考察一族实变量函数 $\{\omega_h\}$，它依赖于正的实参数，并具有下列性质:

1）$0\leqslant\omega_h(\xi)\leqslant M\qquad(\xi\geqslant 0, h>0)$;

2）当 $\xi\geqslant h$ 时，$\omega_h(\xi)=0$;

3）当 $\xi<h$ 时，ω_h 连续;

4）如果用 t 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，而用 $|t|$ 表示其长度，则对于所有的 $h>0$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\omega_h(|t|)\,dt=v_h,$$

其中 v_h 是半径为 h 的 n 维球的体积；由于条件 2)，这个积分只需在以坐标原点为中心的 n 维球 G_h 上进行.

我们把 $\mathbf{L}^p(D)$ 中的函数延拓到整个 $\mathbf{R}^n$ 上，在集合 D 外令其为零.

我们仍以 $G_h(s)$ 表示中心在 $s\in\mathbf{R}^n$ 半径为 h 的 n 维球. 对于 $x\in\mathbf{L}^p(D)$，令

$$x_h(s)=\frac{1}{v_h}\int_{\mathbf{R}^n}\omega_h(s-t)x(t)\,dt=\frac{1}{v_h}\int_{G_h(s)}\omega_h(s-t)x(t)\,dt\qquad(s\in\mathbf{R}^n),\qquad(1)$$

为简单计，记 $\omega_h(s-t)=\omega_h(|s-t|)$.

函数 x_h 叫做函数 x 的按 Стеклов 意义的平均，或平均函数(关于 x)；函数族 $\{\omega_h\}$ 叫做平均的核. 如果作为 ω_h 取函数

$$\omega_h(\xi)=\begin{cases}1, & \xi<h,\\ 0, & \xi\geqslant h,\end{cases}$$

则 $x_h(s)$ 就是函数 x 在球 $G_h(s)$ 上按照通常意义下的平均值.

引理 1. 设 $x\in\mathbf{L}^p(D)$，这时对于任意 $h>0$，平均函数 x_h 连续，并且

$$|x_h(s)|\leqslant\frac{M}{(v_h)^{1/p}}\left\{\int_{G_h(s)}|x(t)|^p dt\right\}^{1/p}\leqslant\frac{M}{(v_h)^{1/p}}\|x\| \quad (s\in\mathbf{R}^n). \tag{2}$$

证. 我们有

$$x_h(s)-x_h(s')=\frac{1}{v_h}\int_{G_h(s)}\omega_h(s-t)x(t)\,dt-\frac{1}{v_h}\int_{G_h(s')}\omega_h(s'-t)x(t)\,dt \qquad (s,s'\in\mathbf{R}^n).$$

设 $0<\lambda<1$，记

$$A'_\lambda=G_{\lambda h}(s)\cap G_{\lambda h}(s'),\ A''_\lambda=[G_h(s)\cup G_h(s')]\backslash A'_\lambda.$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}|x_h(s)-x_h(s')|&\leqslant\frac{1}{v_h}\left[\int_{A'_\lambda}|\omega_h(s-t)-\omega_h(s'-t)||x(t)|\,dt+2M\int_{A''_\lambda}|x(t)|\,dt\right]\\&\leqslant\frac{1}{v_h}\left[\left(\int_{A'_\lambda}|\omega_h(s-t)-\omega_h(s'-t)|^q dt\right)^{1/q}\left(\int_{A'_\lambda}|x(t)|^p dt\right)^{1/p}\right.\\&\qquad\left.+2M\left(\int_{A''_\lambda}|x(t)|^p dt\right)^{1/p}(\operatorname{mes}A''_\lambda)^{1/q}\right]\\&\leqslant\frac{\|x\|}{v_h}\left\{\left[\int_{A'_\lambda}|\omega_h(s-t)-\omega_h(s'-t)|^q dt\right]^{1/q}+2M[\operatorname{mes}A''_\lambda]^{1/q}\right\}.\end{aligned}$$

如果$|s'-s|\to 0$且$\lambda\to 1$，则显然$\mathrm{mes}A''_\lambda\to 0$. 所以，对于$\varepsilon>0$，可求出这样的$\delta>0$及$\lambda_0<1$，使当$|s'-s|<\delta$及$\lambda=\lambda_0$时，花括号中第二项小于$\varepsilon$.

函数$\omega_h(s-t)$作为t的函数在集合$G_{\lambda_0 h}(s)$上一致连续，因而可指出这样的$\delta_0\leqslant\delta$，使得

$$|\omega_h(s-t)-\omega_h(s'-t)|\leqslant\varepsilon,\quad (|s'-s|<\delta_0,\ t\in A'_{\lambda_0}).$$

综上所述，便得

$$|x_h(s)-x_h(s')|\leqslant\frac{\varepsilon\|x\|}{v_h}(v_h+1)\qquad(|s-s'|\leqslant\delta_0).\tag{3}$$

函数x_h的连续性证毕.

由公式(1)并用Hölder不等式可得估计式(2).

注. 在证明引理时求得的量δ_0与函数x无关.

引理2. 如果x是$\mathbf{R}^n$中的一致连续函数，则当$h\to 0$时，平均函数x_h在$\mathbf{R}^n$中一致趋于x.

证. 因为

$$x(s)=\frac{1}{v_h}\int_{G_h(s)}\omega_h(s-t)x(s)dt,$$

所以

$$|x_h(s)-x(s)|\leqslant\frac{1}{v_h}\int_{G_h(s)}\omega_h(s-t)|x(t)-x(s)|dt.$$

因为当h充分小时$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$，所以对于所有$s\in\mathbf{R}^n$同时有

$$|x_h(s)-x(s)|\leqslant\frac{\varepsilon}{v_h}\int_{G_h(s)}\omega_h(s-t)dt=\varepsilon.$$

使元素$x\in\mathbf{L}^p(D)$对应其平均函数x_h，我们得到了定义在$\mathbf{L}^p(D)$中的线性算子，把它记为U_h: $U_h(x)=x_h$. 不难看出，U_h是从$\mathbf{L}^p(D)$到$\mathbf{C}(Q)$内的连续算子，其中Q是包含D的任意有界闭集. 事实上，根据引理1，函数x_h在$\mathbf{R}^n$中连续，它当然也在Q中连续. 因而由(2)可得

$$\|x_h\|_{C(Q)}=\max_{s\in Q}|x_h(s)|\leqslant\frac{M}{(v_h)^{1/p}}\|x\|_{L^p},$$

由此

$$\|U_h\|\leqslant\frac{M}{v_h{}^{1/p}}.$$

如果把 U_h 看成是空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 中的线性算子，则其范数的估计还可以改进.

引理 3. 若把 U_h 看作空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 中的算子，则

$$\|U_h\|\leqslant M\qquad(h>0).\tag{4}$$

证. 从不等式(2)得到

$$\|x_h\|_{\mathbf{L}^p(D)}=\left[\int_D|x_h(s)|^p ds\right]^{1/p}$$
$$\leqslant\left\{\frac{M^p}{v_h}\int_D\left[\int_{G_h(s)}|x(t)|^p dt\right]ds\right\}^{1/p}.$$

交换积分次序，有

$$\|x_h\|_{\mathbf{L}^p(D)}\leqslant\left\{\frac{M^p}{v_h}\int_D\left[\int_{G_h(t)}|x(t)|^p ds\right]dt\right\}^{1/p}$$
$$=M\left[\int_D|x(t)|^p dt\right]^{1/p},$$

这就是(4)式.

引理 4. 当 $h\to0$ 时在空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 中有 $x_h\to x$.

证. 设 D_0 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含 D 的闭立方体，它大到能存在一个包含 D 的闭立方体 D_1，这个 D_1 也包含在立方体 D_0 之内. 我们来证明，在 D_0 上连续并在立方体 D_0 的边界上为零的函数构成的集 $\mathring{\mathbf{C}}(D_0)$ 在 $\mathbf{L}^p(D_0)$ 中稠密. 设 $x\in\mathbf{L}^p(D_0)$，因为几乎处处有界的函数的集合在 $\mathbf{L}^p(D_0)$ 中稠密，所以可认为函数 x 在 D_0 上有界. 例如，假设对于 $t\in D_0$，$|x(t)|\leqslant K$. 任取 $\varepsilon>0$，根据 Лузин 定理，存在 D_0 上连续的函数 φ，除了在集合 $A\subset D_0$ 外它与 x 处处重合，其中 $\mathrm{mes}A\leqslant\varepsilon$；此外，对于 $t\in D_0$，$|\varphi(t)|\leqslant K$. 取立方体 D_1 使得

$\text{mes}(D_0\setminus D_1)<\varepsilon$，利用连续函数延拓定理(Натансон-II)，构造一个在 D_0 上连续的函数 x_0，它在 D_1 上与 φ 重合并在 D_0 的边界上等于零．根据引用的定理，这函数还可以这样选择：使当 $t\in D_0$ 时 $|x_0(t)|\leqslant K$．我们来估计差 $x-x_0$ 的范数(在 $\mathbf{L}^p(D_0)$中)．我们有

$$\|x-x_0\|\leqslant\|x-\varphi\|+\|\varphi-x_0\|.$$

而

$$\begin{aligned}\|x-\varphi\|&=\left[\int_{D_0}|x(t)-\varphi(t)|^p dt\right]^{1/p}\\&=\left[\int_A|x(t)-\varphi(t)|^p dt\right]^{1/p}\leqslant 2K\varepsilon^{1/p},\\\|\varphi-x_0\|&=\left[\int_{D_0}|\varphi(t)-x_0(t)|^p dt\right]^{1/p}\\&=\left[\int_{D_0\setminus D_1}|\varphi(t)-x_0(t)|^p dt\right]^{1/p}\leqslant 2K\varepsilon^{1/p},\end{aligned}$$

由此 $\|x-x_0\|\leqslant 4K\varepsilon^{1/p}$，还须注意 $x_0\in\mathring{\mathbf{C}}(D_0)$．

如果 x 是 $\mathring{\mathbf{C}}(D_0)$中的函数，则可以认为它在 D_0 外等于零．根据引理 2，$x_h\to x$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是一致的，因而也在 D_0 中一致收敛．故在 $\mathbf{L}^p(D_0)$ 中 $x_h\to x$．根据引理 3，算子U_h 的范数总体有界，又因为由上面证明的 $\mathring{\mathbf{C}}(D_0)$ 在 $\mathbf{L}^p(D_0)$中稠密，则应用 Banach-Steinhaus 定理(VII. 1. 3)在整个 $\mathbf{L}^p(D_0)$上收敛性 $x_h\to x$ 成立．但延拓到 D 外为零的 $\mathbf{L}^p(D)$中的函数是 $\mathbf{L}^p(D_0)$中的元素，故在 $\mathbf{L}^p(D)$上也是收敛的，引理证毕．

1. 2. 现在来给出空间 $\mathbf{L}^p(D)$中集合紧性的判别准则．

定理 1(Колмогоров)． 集合 $E\subset\mathbf{L}^p(D)$是相对紧集的充要条件为：

1) E 有界；

2) 平均函数在E 上一致收敛于($\mathbf{L}^p(D)$ 中)生成函数，即

$$x_h\to x \text{ 在 } E \text{ 上一致地成立}.$$

证．第一个条件的必要性显然成立，现在来证明第二个条件的必要性．因为E 是相对紧的，对于它存在有限的 ε-网．设它为

$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$，根据引理 4，对于充分小的 h ($h \leqslant h_\varepsilon$)有

$$\|x_h^{(k)} - x^{(k)}\| \leqslant \varepsilon \quad (k=1, 2, \cdots, m).$$

对于任意 $x \in E$ 可求得 $x^{(k)}$，使得

$$\|x - x^{(k)}\| \leqslant \varepsilon.$$

而这时

$$\|x_h - x\| = \|U_h(x) - x\|$$
$$\leqslant \|U_h(x - x^{(k)})\| + \|x_h^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x - x^{(k)}\| < 2\varepsilon + M\varepsilon.$$

充分性． 用 E_h 表示元素为 $U_h(x)$ 的集合，其中 $x \in E$．根据引理 1，$E_h \subset \mathbf{C}(\bar{D})$．我们来证明 E_h 在 $\mathbf{C}(\bar{D})$ 中相对紧．由于不等式(2)，空间 $\mathbf{C}(\bar{D})$ 中紧集的第一个条件——有界性成立．由不等式(3)可推出 E_h 中函数的同等连续性．

于是，对于任何 h，E_h 在 $\mathbf{C}(\bar{D})$ 中是相对紧的，因此在 $\mathbf{L}^p(D)$ 中也是相对紧的．根据条件 2)可找到充分小的 h_0，使得对于任意的 $x \in E$，$\|x - x_{h_0}\| = \|x - U_{h_0}x\| < \varepsilon$．因此 E_h 是 E 的相对紧的 ε-网．根据 Hausdorff 定理(参见 I. 5. 1)，集合 E 是相对紧的．

定理证毕．

注． 定理中所给出的紧性判别准则在空间 $\mathbf{L}^1(D)$ 中也成立(参见 Тулайков[1])．

1. 3. 我们再给出一个空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 中紧性的判别准则．为简单起见，我们只限于叙述 D 是区间 $[a, b]$ 的情形．

定理 2(Riesz)． 集合 $E \subset \mathbf{L}^p(a, b)$ $(1 < p < \infty)$ 是相对紧集的充要条件为：

1) E 有界；

2) 平移函数关于 $x \in E$ 一致地收敛于给定的函数，即

$$\int_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p dt \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0$$

关于 $x \in E$ 一致地成立．

证. 必要性. 在 $\mathbf{L}^p(a,b)$ 中引进算子 V_τ——自变量平移算子

$$y=V_\tau(x), \qquad y(t)=x(t+\tau).$$

显然, V_τ 是 $\mathbf{L}^p(a,b)$ 中的线性算子, 并且

$$\|V_\tau\|\leqslant 1. \tag{5}$$

我们来证明

$$V_\tau(x)\xrightarrow[\tau\to 0]{} x \qquad (\text{在 } \mathbf{L}^p(a,b)\text{ 中}). \tag{6}$$

事实上, 如果 x 是连续函数, 则

$$\int_a^b |x(t+\tau)-x(t)|^p dt\leqslant\int_a^b \varepsilon^p dt=\varepsilon^p(b-a) \qquad (\tau\leqslant\tau_\varepsilon),$$

因而(6)式成立. 因为连续函数集合在 $\mathbf{L}^p(a,b)$ 中稠密, 由(5)式再应用 Banach-Steinhaus 定理可知, (6)式对于任意 $x\in\mathbf{L}^p(a,b)$ 都成立.

后面的讨论完全与定理 1 的证明一样.

充分性. 我们来证明, 如果本定理的条件成立, 则若我们取

$$\omega_h(\xi)=\begin{cases}1, & \xi<h,\\ 0, & \xi\geqslant h\end{cases} \qquad (h>0)$$

作为平均的核, 那么也能得到定理 1 的条件. 仍用前面的记号, 我们可得

$$\|U_h(x)-x\|^p=\frac{1}{(2h)^p}\int_a^b\left|\int_{-h}^h [x(t+\tau)-x(t)]d\tau\right|^p dt.$$

对内层积分应用 Hölder 不等式, 然后再交换积分次序, 即得

$$\begin{aligned}
&\|U_h(x)-x\|^p\\
&\leqslant\frac{1}{(2h)^p}\int_a^b\left\{\left[\int_{-h}^h 1^q d\tau\right]^{p/q}\left[\int_{-h}^h |x(t+\tau)-x(t)|^p d\tau\right]\right\}dt\\
&=\frac{1}{2h}\int_{-h}^h d\tau\int_a^b |x(t+\tau)-x(t)|^p dt\\
&=\frac{1}{2h}\int_{-h}^h \|V_\tau(x)-x\|^p d\tau.
\end{aligned}$$

如果定理的第二个条件成立，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在$h_0>0$，使当$|\tau|\leqslant h_0$时，对于任何$x\in E$，有$\|V_\tau(x)-x\|^p<\varepsilon$，但这时由于前面建立的不等式，有

$$\|U_h(x)-x\|^p\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varepsilon d\tau=\varepsilon.$$

因此定理1的第二个条件成立．因为在两个定理中第一个条件是一样的，对集合E应用定理1，可知E是相对紧的．

1.4. 最后我们介绍一个在赋范空间中集合紧性的判别准则（参见 Гельфанд[1]）．

定理3（Гельфанд） B-空间$\mathbf{X}$中集合E相对紧的必要条件为：对于任何(*)-弱收敛于零的泛函序列$\{f_n\}$，极限关系

$$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \tag{7}$$

在E上一致地成立，即对于任意的$\varepsilon>0$，存在标号n_ε，使当$n>n_\varepsilon$时，对于任何$x\in E$有

$$|f_n(x)|<\varepsilon.$$

而当$\mathbf{X}$是可分空间时，上述条件也是充分的．

证．充分性． 先证集E是有界的．事实上，假如不然，则存在元素序列$x_n\in E$ $(n=1,2,\cdots)$，使得$\|x_n\|=\gamma_n^2\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$．根据关于有足够多泛函的定理，可找到泛函$f_n'$，$\|f_n'\|=1$，$f_n'(x_n)=\|x_n\|$．令$f_n=\frac{1}{\gamma_n}f_n'$，我们得到序列$\{f_n\}$，它收敛于零，可是

$$f_n(x_n)=\gamma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty,$$

因此$f_n(x)\to0$在E上不是一致的．

用B表示赋(*)-弱拓扑的空间$\mathbf{X}^*$中的闭单位球．我们已经知道(III.3.1)，每个元素$x\in\mathbf{X}$都可以看作是在$(\mathbf{X}^*,\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X}))$上（因此，也是在$B$上）的连续函数．用$\varphi$表示从$\mathbf{X}$到$\mathbf{C}(B)$内的相应的嵌入．我们来证明，集$\varphi(E)$在$B$-空间$\mathbf{C}(B)$中是相对紧的．

因为，容易看出，映射 φ 是线性等距．所以，可用它证明 E 也是相对紧的．根据定理 V. 7. 6, B 是度量紧集（具有度量 r）．我们来验证集合 $\varphi(E)$ 满足 Arzela-Ascoli 定理的条件（参见定理 I. 5. 4）．因为，我们已证明了，集合 E 是有界的，所以我们只要验证它是同等连续的．假如不然，即存在 $\varepsilon>0$，对于任意的 $\delta>0$，可找到 $x_\delta\in E$ 及 $f_n, f'_n\in B$，使得 $r(f_n, f'_n)<\delta$ 及

$$|f_n(x_\delta)-f'_n(x_\delta)|\geqslant\varepsilon.$$

依次取 $\delta=1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots$，可以从 E 中找到一元素序列 $\{x_n\}$ 及两个泛函序列 $\{f_n\}$，$\{f'_n\}\subset B$，使得 $r(f_n, f'_n)<1/n$，而

$$|f_n(x_n)-f'_n(x_n)|\geqslant\varepsilon, \quad (n\in\mathbf{N}). \tag{8}$$

因为 B 是度量紧集，所以（如果需要，可取子序列）可以认为 $f_n\to f_0\ (\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X}))$, $f_0\in B$. 因为 $r(f_n,f'_n)<1/n$，故 $f'_n\to f_0(\sigma(\mathbf{X}^*,\mathbf{X}))$. 由于按 $(*)$-弱拓扑 $f_n-f'_n\to 0$，所以根据(7)，$f_n(x)-f'_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ 在 E 上一致地成立，从而与(8)式矛盾.

必要性．我们来证明，如果 $\{U_n\}$ 是把给定的空间 $\mathbf{X}$ 变换为赋范空间 $\mathbf{Y}$ 的连续线性算子序列，并且对于 $x\in\mathbf{X}$

$$U_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbf{0}, \tag{9}$$

则当 E 是相对紧的时候，(9)式在 E 上一致地成立.

因为 $\mathbf{X}$ 是 B-空间，所以从(9)可推出算子 U_n 范数的有界性（参见 VII. 1. 1）：$\|U_n\|\leqslant M$．因为 E 是紧的，对于 E 存在有限的 $\dfrac{\varepsilon}{2M}$-网：$x_1, x_2, \cdots, x_m$．对于充分大的 n

$$\|U_n(x_k)\|<\varepsilon/2 \qquad (k=1, 2, \cdots, m). \tag{10}$$

其次，对于任意的 $x\in E$，存在元素 x_k，使得

$$\|x-x_k\|<\varepsilon/2M. \tag{11}$$

这时对于这个 n 将有

$$\|U_n(x)\|\leqslant\|U_n(x_k)\|+\|U_n(x-x_k)\|<\varepsilon/2+\|U_n\|\|x-x_k\|\leqslant\varepsilon,$$

即有 $U_n(x)\to 0$ 在 E 上一致地成立.

注. 如果 $\mathbf{X}$ 不是可分的，一般来讲，定理 3 的充分性部分不成立(参见 Бухвалов[1]，在那里也可见到定理 3 及定理 V.7.8的推广).

§2. 紧 算 子

2.1. 在第五章中已经指出，任何从一个有限维空间到另一个有限维空间的线性算子都可以由一个长方矩阵来确定. 因此研究这类算子就比较容易，因为有限矩阵的性质在代数中是熟知的. 可是若研究任意赋范空间中的算子，则往往就不存在类似于"有限维"算子的全部性质. 与"有限维"算子最接近的是所谓紧算子. 与"有限维"情形接近的紧算子的基本性质，将在第十三章建立. 这里我们仅给出定义，指出由定义推出的一些最简单的结果，较详细考察的只是 Hilbert 空间中的紧算子.

设算子 U 是从一个赋范空间 $\mathbf{X}$ 映射到另一个赋范空间 $\mathbf{Y}$ 内的算子. 如果它把 $\mathbf{X}$ 的每个有界集合映射为 $\mathbf{Y}$ 中的相对紧集，则称 U 是*紧的*. 此外，如果 U 还是连续的，则称它是*全连续的*.

以后我们几乎只对 U 是线性算子利用这个定义. 容易看出，每一个紧线性算子都是全连续的. 事实上，它把空间 $\mathbf{X}$ 中的单位球映射为相对紧集，此集当然是空间 $\mathbf{Y}$ 内的有界集，于是 $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|U(x)\|<\infty$，即 U 是有界算子.

最后指出，对于上述情形，在定义中可只要求算子 U 把单位球(或任意其他半径的球)映射为相对紧集. 其次，如果没有特别说明，我们说紧算子就是指紧线性算子.

在本节中所考察的紧算子的定义及此类算子的最简单性质对于空间 $\mathbf{L}^2$ 是由 Hilbert 阐明的(参见 Hilbert). 而在一般情况下参见 Banach.

上面提到的有限维算子自然是紧算子. 紧算子的另一个平凡

的例子是空间X中的连续线性泛函，只要把它看作从X到标量空间内的算子.

在§1中所引进的算子U_h(参见1.1)是更有趣的紧算子的例子.事实上,容易验证,集合$U_h(E)$的紧性只是集合E有界性的推论.

最后考察具有连续核的积分算子U:

$$y=U(x),\quad y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt.$$

可以认为U是从$\mathbf{C}[a,b]$到$\mathbf{C}[a,b]$内的算子. 我们指出，U是紧的. 事实上,如果E是$\mathbf{C}[a,b]$中的有界集(对于$x\in E$, $\|x\|\leqslant M$),则$U(E)$显然也是有界集(对于$y\in U(E)$, $\|y\|\leqslant M\|U\|$).其次,如果$x\in\mathbf{X}$,则($y=U(x)$)

$$\begin{aligned}|y(s')-y(s)|&\leqslant\int_a^b|K(s',t)-K(s,t)||x(t)|dt\\&\leqslant M\int_a^b|K(s',t)-K(s,t)|dt.\end{aligned}$$

如果s与s'充分接近,则右端可任意小,并与$x\in E$无关. 这说明$U(E)$的函数是同等连续的,因此,$U(E)$在$\mathbf{C}[a,b]$中是相对紧的.

利用定理Ⅸ.1.2可以证明，如果把算子U看作$\mathbf{L}^p(a,b)$到$\mathbf{L}^r(a,b)$($1<p,r<\infty$)内的算子,则它是紧算子.

上面所有结果及其证明都可以搬到空间$\mathbf{C}(K)$及$\mathbf{L}^p(D)$之中.

2.2. 我们证明有关紧算子的三个简单定理. 设$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$是赋范空间.

定理1. 如果U是从$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$内的紧算子，则算子U的值域$\mathbf{Y}_0=\Delta_U$是可分的.

证. 用B_n表示空间$\mathbf{X}$中以0点为中心,n为半径的球,用Q_n表示空间$\mathbf{Y}$中的集合$U(B_n)$,即形为$y=U(x)$($x\in B_n$)的元素的集合. 因为$\mathbf{X}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$,所以$\mathbf{Y}_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}Q_n$. 但$\bar{Q}_n$是紧的,所以是可分

的(I. 5. 1). 这样 $\mathbf{Y}_0$ 也是可分的.

定理 2. a) 从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的紧算子 U_1 与 U_2 的线性组合 $U=\alpha U_1+\beta U_2$ 是紧算子.

b) 如果 $U\in B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, 而 $V\in B(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$, 并且这两个算子中有一个是紧的, 则乘积 VU 也是紧的.

证. a) 设$E\subset\mathbf{X}$ 是有界集, 又设$\{y_n\}\subset U(E)$, 这时

$$y_n=\alpha U_1(x_n)+\beta U_2(x_n) \qquad (x_n\in E,\ n\in \mathbf{N}).$$

根据算子 U_1 的紧性, 从序列$\{U_1(x_n)\}$ 中可以选出收敛的子序列$\{U_1(x_{n_k})\}$. 同理可以从序列$\{U_2(x_{n_k})\}$中选出收敛的子序列, 设其为$\{U_2(x_{n_{k_j}})\}$. 显然, 序列 $U(x_{n_{k_j}})$收敛, 即 $U(E)$是相对紧的.

b) 因为连续线性算子把有界集变换为有界集, 把紧集变换为紧集. 由此可直接推出本命题.

定理 3. 设$\{U_n\}$是从 $\mathbf{X}$ 到 B-空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子序列. 它收敛于算子 U(在空间 $B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$中). 这时, 如果 $U_n(n=1,2,\cdots)$是紧的, 则U 也是紧的.

证. 设 B 是空间 $\mathbf{X}$ 中的单位球, 我们来证明 $U(B)$ 是相对紧的. 取 U_{n_0} 使得

$$\|U_{n_0}-U\|<\varepsilon.$$

集合 $U_{n_0}(B)$是紧的, 而因为对于 $y\in U(B)$

$$\|y-y_{n_0}\|=\|U(x)-U_{n_0}(x)\|\leqslant\|U-U_{n_0}\|\,\|x\|<\varepsilon$$

$$(y_{n_0}=U_{n_0}(x),\ \ y=U(x),\ \ x\in B),$$

所以 $U_{n_0}(B)$是 $U(B)$的 ε-网. 根据 Hausdorff 定理的注, $U(B)$是相对紧的. 这就说明算子U 是紧的.

注. 在定理的条件中, 不能用在 $\mathbf{X}$ 上的收敛来替代算子空间中的收敛——即按范数收敛. 事实上, 上面已指出, 算子 U_h(参见IX. 1. 1)是紧的, 并且, 在 $\mathbf{L}^p$ 中

$$U_h(x)\to x \qquad (x\in\mathbf{L}^p).$$

但在 $\mathbf{L}^p$ 中的恒等算子不是紧的. 事实上, 定理 IV. 1. 3 可改述为: 使赋范空间 $\mathbf{X}$ 中的恒等算子是紧的, 必须而且只须 $\mathbf{X}$ 是有限维的.

§3. 共轭算子

3. 1. 设 U 是从赋范空间 $\mathbf{X}$ 到赋范空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子, g 是空间 $\mathbf{Y}$ 中的连续线性泛函, 换言之, 它是共轭空间 $\mathbf{Y}^*$ 中的元素. 对于任意的 $x\in\mathbf{X}$, 令

$$f(x)=g(U(x)). \tag{1}$$

这样, 泛函 f 是作为由 $\mathbf{Y}$ 到实(或复)数空间内的线性算子的泛函 g 与算子 U 的乘积: $f=gU$. 所以 f 是连续线性泛函, 并且

$$\|f\|\leqslant\|U\|\|g\|. \tag{2}$$

于是公式 (1) 使每个泛函 $g\in\mathbf{Y}^*$ 对应于某个泛函 $f\in\mathbf{X}^*$. 实现这种对应的算子叫做给定算子 U 的共轭算子, 记为 U^*, 即 $f=U^*g$ 相当于(1), 换言之, $U^*(g)=gU$.

这样, 每个 $U\in B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 对应一个把 $\mathbf{Y}^*$ 变换到 $\mathbf{X}^*$ 内的共轭算子 U^*, 我们来证明 $U^*\in B(\mathbf{Y}^*,\mathbf{X}^*)$.

定理 1. 共轭算子 U^* 是从空间 $\mathbf{Y}^*$ 到 $\mathbf{X}^*$ 内的连续线性算子, 并且

$$\|U^*\|=\|U\|. \tag{3}$$

证. 我们验证算子 U^* 是线性的. 如果 $g=\lambda g_1+\mu g_2$ 及 $f=U^*(g)$, 则

$$f(x)=g(U(x))=\lambda g_1(U(x))+\mu g_2(U(x))$$
$$=\lambda U^*(g_1)(x)+\mu U^*(g_2)(x).$$

由此

$$U^*(g)=\lambda U^*(g_1)+\mu U^*(g_2).$$

从不等式(2)可推出 U^* 的有界性, 由此知

$$\|U^*\| \leqslant \|U\|.$$

其次，取任意的 $x \in \mathbf{X}$，设 $y = U(x)$，构造泛函 $g \in \mathbf{Y}^*$，使得

$$g(y) = \|y\|, \quad \|g\| = 1.$$

这时

$$\begin{aligned} \|U(x)\| = \|y\| = g(y) = (gU)(x) = U^*(g)(x) \\ \leqslant \|U^*(g)\| \|x\| \leqslant \|U^*\| \|x\|, \end{aligned}$$

由此显然可得

$$\|U\| \leqslant \|U^*\|.$$

我们还要指出，如果 U_1 和 U_2 是从空间 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子，且

$$U = \lambda U_1 + \mu U_2,$$

则

$$U^* = \bar{\lambda} U_1^* + \bar{\mu} U_2^*.$$

事实上($g \in \mathbf{Y}^*$, $x \in \mathbf{X}$)，

$$\begin{aligned} U^*(g)(x) &= \lambda[g(U_1(x))] + \mu[g(U_2(x))] \\ &= (\lambda g)(U_1(x)) + (\mu g)(U_2(x)) \\ &= U_1^*(\bar{\lambda} g)(x) + U_2^*(\bar{\mu} g)(x) \\ &= [\bar{\lambda} U_1^*(g) + \bar{\mu} U_2^*(g)](x). \end{aligned}$$

设 V, U 分别为从空间 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内及空间 $\mathbf{Y}$ 到 $\mathbf{Z}$ 内的连续线性算子．如果 $W = UV$，则 $W^* = V^* U^*$.

事实上，记 $f = W^*(g)$，$f_1 = U^*(g)$ ($g \in \mathbf{Z}^*$)，可得

$$f(x) = g(W(x)) = g(UV(x)) = f_1(V(x)) = V^* U^*(g)(x) \quad (x \in \mathbf{X}).$$

3.2. 考察实有限维空间 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$，它们的维数分别等于 m 和 n，U 是从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的线性算子．算子 U 由矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

借助公式

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\xi_k \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

来确定，其中

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\in\mathbf{X}, \qquad y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)\in\mathbf{Y}.$$

设 $g=(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$是空间 $\mathbf{Y}$ 中的泛函

$$g(y)=\sum_{j=1}^{n}\psi_j\eta_j.$$

泛函 $f=U^*g$ 将有下列形式

$$f(x)=g(U(x))=\sum_{j=1}^{n}\psi_j\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\xi_k=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\psi_j\right)\xi_k,$$

即 $f=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$，其中

$$\varphi_k=\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\psi_j=\sum_{j=1}^{n}a^*_{kj}\psi_j$$

$$(a^*_{kj}=a_{jk}; \quad j=1, 2, \cdots, n; \quad k=1, 2, \cdots, m).$$

于是，算子 U^* 由矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \cdots & a^*_{1n} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^*_{m1} & a^*_{m2} & \cdots & a^*_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

所确定，此矩阵由 A 经行列置换而得.

现在设 U 是具有连续核的积分算子

$$y=U(x),\ \ y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt,$$

并设U是$\mathbf{L}^p(a,b)$中的算子($1<p<\infty$).

取泛函$g\in(\mathbf{L}^p)^*$

$$g(y)=\int_a^b \psi(s)y(s)\,ds \qquad \left(y\in\mathbf{L}^p,\ \psi\in\mathbf{L}^q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

将有

$$g(U(x))=\int_a^b \psi(s)\left[\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right]ds$$
$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\psi(s)\,ds\right]x(t)\,dt=\int_a^b \varphi(t)x(t)\,dt.$$

于是,共轭算子U^*也是积分算子,其核为$K^*(s,t)=K(t,s)$:

$$f=U^*g,\ \varphi(t)=\int_a^b K^*(t,s)\psi(s)\,ds=\int_a^b K(s,t)\psi(s)\,ds.$$

注. 如果考察复有限维空间,则共轭算子由下面的矩阵来确定:

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix}$$

$$(a_{jk}^*=\bar{a}_{kj};\quad j=1,2,\cdots,m;\quad k=1,2,\cdots,n).$$

为了得到这个结果,只要注意到泛函$f=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)\in\mathbf{X}^*$及$g=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)\in\mathbf{Y}^*$由下式所确定:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}\bar{\varphi}_k\xi_k \qquad (x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\in\mathbf{X})$$

$$g(y)=\sum_{k=1}^{n}\bar{\psi}_k\eta_k \qquad (y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k)\in\mathbf{Y})$$

在复空间$\mathbf{L}^p$中类似地有:共轭于积分算子的算子也是积分算

子，其核为

$$K^*(s,t)=\overline{K(t,s)}.$$

3.3. 以算子 U^* 为出发点，又可以构成它的共轭算子，我们称其为给定算子 U 的二次共轭，记为 U^{**}. 根据定理 1，它是从空间 $\mathbf{X}^{**}$ 到 $\mathbf{Y}^{**}$ 内的连续线性算子. 把空间 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}^{**}$ 的子空间等同起来，把空间 $\mathbf{Y}$ 与 $\mathbf{Y}^{**}$ 的子空间等同起来，我们来证明，在 $\mathbf{X}$ 上算子 U^{**} 与 U 重合. 设 π_1 是 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{X}^{**}$ 内的典型嵌入，π_2 是 $\mathbf{Y}$ 到 $\mathbf{Y}^{**}$ 内的典型嵌入.

定理 2. 对于任何 $x\in\mathbf{X}$，有

$$U^{**}(\pi_1(x))=\pi_2(U(x)). \tag{5}$$

证. 如果 $g\in\mathbf{Y}^*$，则

$$[U^{**}(\pi_1(x))](g)=[\pi_1(x)](U^*(g))=\overline{[U^*(g)](x)}$$
$$=\overline{g(U(x))}=[\pi_2(U(x))](g),$$

由此可推出(5).

推论. 如果空间 $\mathbf{X}$ 是自反的，则 $U^{**}=U$（等式在这样理解下成立：即把空间 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}^{**}$ 的对应元素，空间 $\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{Y}^{**}$ 的对应元素看成同一个元素）.

3.4. 由给定算子取共轭后其紧性仍然保持.

定理 3. 设 U 是从赋范空间 $\mathbf{X}$ 到 B-空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子，这时若算子 U 和算子 U^* 有一个是紧的，则另一个也是紧的.

证. 先设算子 U 是紧的，在空间 $\mathbf{Y}$ 中取泛函的有界序列 $\{g_n\}$ $(\|g_n\|\leqslant M;n=1,2,\cdots)$. 我们来证明，从泛函序列 $\{U^*g_n\}$ 中可以找到收敛的子序列，这样就证明了算子 U^* 的紧性.

用 $\mathbf{Y}_0$ 表示集合 $U(\mathbf{X})$ 的闭包，根据定理 IX.2.1，$\mathbf{Y}_0$ 是可分空间. 我们只在 $\mathbf{Y}_0$ 上研究泛函 g_n. 因为泛函序列 $\{g_n\}$ 有界，所以根据定理 V.7.6，从中可以选出 $(*)$-弱收敛的子序列，不妨设 $\{g_n\}$ 已是这样的序列，即

$$\lim_{n\to\infty} g_n(y) = g(y) \qquad (y \in \mathbf{Y}_0).$$

此外，g 是 $\mathbf{Y}_0$ 中的线性泛函．因为它可以保范地扩张到整个$\mathbf{Y}$上，所以可以认为 $g \in \mathbf{Y}^*$．还要指出，

$$\|g\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|g_n\| \leqslant M.$$

令 $f = U^*(g)$，$f_n = U^*(g_n)$，因为 $U(x) \in \mathbf{Y}_0$，故对于任何 $x \in \mathbf{X}$ 有

$$f_n(x) = g_n(U(x)) \to g(U(x)) = f(x).$$

于是 $f_n \to f(\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$．我们来证明，它也是按范数收敛的．假如不然，便可以认为(如果需要，可取子序列)

$$\|f_n - f\| \geqslant m > 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

对于每一个 $n = 1, 2, \cdots$ 可找到元素 x_n，使得

$$\|x_n\| = 1, \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| > \frac{1}{2}\|f_n - f\| \geqslant \frac{1}{2}m$$
$$(n = 1, 2, \cdots),$$

即，令 $y_n = U(x_n)$ 有

$$|g_n(y_n) - g(y_n)| \geqslant \frac{1}{2}m \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{6}$$

因为算子U是紧的，而$\|x_n\| = 1 (n = 1, 2, \cdots)$，则从序列$\{y_n\}$中可找到收敛子序列$\{y_{n_k}\}$．设 $y_{n_k} \to y_0$，这时由于 $y_0 \in \mathbf{Y}_0$，所以

$$\begin{aligned}
&|g_{n_k}(y_{n_k}) - g(y_{n_k})| \\
&\leqslant |g_{n_k}(y_{n_k}) - g_{n_k}(y_0)| + |g_{n_k}(y_0) - g(y_0)| \\
&\qquad + |g(y_0) - g(y_{n_k})| \\
&\leqslant 2M\|y_{n_k} - y_0\| + |g_{n_k}(y_0) - g(y_0)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

它与(6)式矛盾．

现在证明，如果 U^* 是紧的，则U也是紧的．

考察算子 U^{**}，根据上面的证明，这个算子是紧的，又因为根据定理 2，它可看成为算子U的扩张，所以这个算子U也是紧的．事实上，如果 $E \subset \mathbf{X}$ 是有界集，则 $U(E)$是在 $\mathbf{Y}^{**}$中的相对紧集，这

时，因为 $\mathbf{Y}(=\pi_2(\mathbf{Y}))$ 在 $\mathbf{Y}^{**}$ 中闭，所以 $U(E)$ 在 $\mathbf{Y}$ 中也是相对紧的.

3.5. 利用共轭算子的概念可以导出一个便于利用的紧性判别法.

定理 4. 设 U 是从赋范空间 $\mathbf{X}$ 到可分 B-空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子. U 是紧算子，当且仅当共轭算子 U^* 把空间 $\mathbf{Y}^*$ 中的每个 $(*)$-弱收敛于零的泛函序列 $\{g_n\}$ 变换为空间 $\mathbf{X}^*$ 中的按范数收敛于零的泛函序列 $\{f_n\}$.

证. 必要性. 设 $\{f_n\}$ 不是按范数收敛于零的，可以认为

$$\|f_n\|\geqslant m>0 \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{7}$$

根据前面的定理，U^* 是紧的，又因为序列 $\{g_n\}$ 有界，所以从 $\{f_n\}$ 中可选出收敛的子序列 $\{f_{n_k}\}$. 设

$$f_{n_k}\to f. \tag{8}$$

对于任何 $x\in\mathbf{X}$，因为 $g_{n_k}\to\mathbf{0}(\sigma(\mathbf{Y}^*,\mathbf{Y}))$，故有

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=\lim_{k\to\infty}g_{n_k}(U(x))=0.$$

因而 $f=\mathbf{0}$，而这时(8)与(7)矛盾.

充分性. 根据定理 3，只要验证 U^* 是紧算子. 设 B 是 $\mathbf{Y}^*$ 中的单位球，$\{g_n\}\subset B$. 因为 $\mathbf{Y}$ 是可分的，所以根据定理 V. 7.6，$g_{n_k}\to g(\sigma(\mathbf{Y}^*,\ \mathbf{Y}))$. 这时根据条件 $U^*(g_{n_k})\to U^*(g)$ (按范数收敛)，可知集合 $U^*(B)$ 是相对紧的，故算子 U^* 也是紧的.

3.6. 对于 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的算子 U，共轭算子的概念已在 V. 3.3 中定义了，我们指出，新的定义实质上可归结为原来的定义.

设 g 是 $\mathbf{H}$ 中的线性泛函，根据 V. 3.2，存在元素 $z\in\mathbf{H}$，使得

$$g(y)=(y,z) \qquad (y\in\mathbf{H}). \tag{9}$$

其次，记 $f=U^*g$，并设泛函 f 由元素 z^* 来确定：

$$f(x)=(x,z^*) \qquad (x\in\mathbf{H}). \tag{10}$$

注意到等式(9)和(10)，关系式 $f(x)=g(U(x))$ 可写做

$$(x, z^*)=(Ux, z) \qquad (x\in\mathbf{H}). \tag{11}$$

算子 U^* 定义在 $\mathbf{H}^*$ 内. 因为 $\mathbf{H}^*$ 与 $\mathbf{H}$ 本身线性等距，所以算子 U^* 也可以看作是 $\mathbf{H}$ 中的算子(显然也是线性的)，我们仍用同一个符号 U^* 来表示. 因为泛函 g 对应于元素 z，而 f 对应于元素 z^*，所以 $z^*=U^*z$，而(11)式可写为 $(Ux, z)=(x, U^*z)$ $(x\in\mathbf{H})$，故与以前共轭算子的定义是一致的.

对于 $\mathbf{L}^2$ 中一些具体算子 Hilbert 给出其共轭算子的定义（参见 Hilbert）. 对于另一部分情况参见 Riesz[3]. 一般的定义见 Schauder[2], Hildebrandt[1], Banach.

§4. Hilbert 空间中的紧自共轭算子

4.1. 这节将对 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中紧自共轭算子的结构进行详细分析. 这种算子的结构特别类似于对称矩阵的结构. 和在矩阵的情况那样，在阐明紧自共轭算子时，特征值及其有关概念起着基本的作用.

本节的结果，对于 $\mathbf{L}^2$ 中积分算子是由 Hilbert 和 Schmidt 建立的，对于一般情况是由 Neumann[1](对可分的 $\mathbf{H}$)和 Rellich[1](对任意的 $\mathbf{H}$)建立的.

数 λ 是算子 U 的特征值，如果存在元素 $x_0\neq\mathbf{0}$，使得

$$Ux_0=\lambda x_0.$$

使等式 $Ux=\lambda x$ 成立的元素 x 叫做属于(对应于)给定特征值 λ 的特征元素. 属于给定特征值 λ 的特征元素全体构成对应的特征子空间 $\mathbf{H}_\lambda$. 不难验证，$\mathbf{H}_\lambda$ 确实是空间 $\mathbf{H}$ 的子空间*⁾.

4.2. 我们指出关于 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的自共轭算子 U 的特征值和特征元素的一些最简单的性质.

---

*⁾ 所有上述的定义都可以转移到任意赋范空间 $\mathbf{X}$ 及其中的算子 U 的情形. 在这种情况下，用 $\mathbf{X}_\lambda$ 表示特征子空间.

I. 对于任意 $x\in\mathbf{H}$，表达式 (Ux,x) 是实的（参见 V. 6. 2）。

这可由等式

$$(Ux,x)=(x,Ux)=\overline{(Ux,x)}$$

推出。

II. 下面关系式成立：

$$\|U\|=\sup_{\|x\|=1}|(Ux,x)|.$$

记 $Q=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ux,x)|$。因为当 $\|x\|=1$ 时

$$|(Ux,x)|\leqslant\|Ux\|\|x\|\leqslant\|Ux\|\leqslant\|U\|,$$

所以 $Q\leqslant\|U\|$。

其次，容易验证等式（参见 V. 4. 2）

$$\begin{aligned}(Ux,y)=\frac{1}{4}\{&[(U(x+y),x+y)-(U(x-y),x-y)]\\&+i[(U(x+iy),x+iy)-(U(x-iy),x-iy)]\}\end{aligned}\tag{1}$$

再由 I 便得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Ux,y)&=\frac{1}{4}[(U(x+y),x+y)-(U(x-y),x-y)]\\&\leqslant\frac{1}{4}Q[\|x+y\|^2+\|x-y\|^2]=\frac{1}{2}Q[\|x\|^2+\|y\|^2]\end{aligned}$$

（关于最后等式参见 IV. 5. 1）。现在取元素 x 使得 $\|x\|=1$ 及 $y=\dfrac{Ux}{\|Ux\|}$，可得

$$\|Ux\|=\mathrm{Re}(Ux,y)\leqslant Q,$$

由此

$$\|U\|\leqslant Q.$$

III. 算子 U 的特征值是实的。

事实上，如果 λ 是特征值，x 是对应于它的非零特征元素，则

$$\lambda=\frac{(Ux,x)}{(x,x)}.$$

由于U是自共轭的，这时上式分子是实的，故λ也是实的.

IV. 对应于算子U的不同特征值λ_1和λ_2的特征子空间$\mathbf{H}_{\lambda_1}$和$\mathbf{H}_{\lambda_2}$是正交的.

事实上，设x与y分别是$\mathbf{H}_{\lambda_1}$和$\mathbf{H}_{\lambda_2}$中的元素. 因为$Ux=\lambda_1 x, Uy=\lambda_2 y$，于是，例如设$\lambda_1\neq 0$，有

$$(x,y)=\frac{1}{\lambda_1}(Ux,\ y)=\frac{1}{\lambda_1}(x,\ Uy)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x,y),$$

这只在$(x,y)=0$时才有可能.

4.3. 现在设U不仅是自共轭的，而且还是紧算子，则下述定理成立.

定理 1. 算子U至少有一个特征值.

证. 因为当$U=\mathbf{0}$时定理显然成立，所以我们可以认为$U\neq\mathbf{0}$. 现在引进算子的界

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Ux,x),\ M=\sup_{\|x\|=1}(Ux,x).$$

根据 II, $\|U\|=\max[|m|,M]$，我们来证明

$$\lambda_1=\begin{cases}m, & \text{如果}\|U\|=|m|,\\ M, & \text{如果}\|U\|=M\end{cases}$$

是算子U的特征值.

事实上，例如考察$\|U\|=M$的情形. 根据数M的定义，可找到规格化元素序列$\{x_n\}$，使得

$$(Ux_n,x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}M=\lambda_1. \tag{2}$$

因为$\{x_n\}$是有界序列，根据算子U的紧性，从序列$\{Ux_n\}$中可找到收敛子序列. 不妨设已经这样做过了，即$\{Ux_n\}$收敛. 例如设$Ux_n\to y_0$，从关系式

$$\|Ux_n-\lambda_1 x_n\|^2=\|Ux_n\|^2-2\lambda_1(Ux_n,x_n)+\lambda_1^2$$

$$\leqslant \|U\|^2+\lambda_1^2-2\lambda_1(Ux_n, x_n),$$

再注意 $\lambda_1^2=\|U\|^2$ 并由(2)式可得

$$Ux_n-\lambda_1 x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0}.$$

所以

$$x_n=\frac{1}{\lambda_1}[Ux_n-(Ux_n-\lambda_1 x_n)]$$

有极限，即 $x_n \to x_0=\frac{1}{\lambda_1}y_0$. 因为 $Ux_n \to Ux_0=y_0$, 所以 $y_0=Ux_0=\lambda_1 x_0$, 又由于 $x_0\neq\mathbf{0}$($\|x_0\|=1$), 从而 λ_1 是特征值.

定理证毕.

推论. 如果算子 U 没有异于零的特征值, 则 $U=\mathbf{0}$.

注. 定理中得到的算子 U 的特征值是按绝对值最大的.

事实上, 如果 λ 是某个特征值, 而 x 是对应的特征元素, 可以认为它是规格化的, 则

$$|\lambda|=|\lambda|(x,x)=|(Ux,x)|\leqslant\|U\|=|\lambda_1|.$$

4.4. 以 P_λ 表示到特征子空间 $\mathbf{H}_\lambda$ 上的投影算子 (参见 V.3.4). 下面的定理实际上改进了定理 1.

定理 2. 紧自共轭算子 U 的特征值的集合至多是可数的. 并且

$$U=\sum_k \lambda_k P_{\lambda_k}, \tag{3}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 是算子 U 的不同的特征值 (级数的收敛理解为算子空间中按范数收敛).

证. 设 λ 是算子 U 的某个特征值, 则关系式

$$\lambda P_\lambda=UP_\lambda=P_\lambda U \tag{4}$$

成立. 事实上, 因为对于任何 $x\in\mathbf{H}$, $P_\lambda x\in\mathbf{H}_\lambda$, 所以 $UP_\lambda x=\lambda P_\lambda x$. 由算子 P_λ 与 U 的乘积 $UP_\lambda=\lambda P_\lambda$ 是自共轭算子可推出, 它们是可交换的(参见 V.6.1).

考察算子

$$U_2=U_1-\lambda_1 P_{\lambda_1} \qquad (U_1=U). \tag{5}$$

由(4),上式可写为

$$U_2=\tilde{P}_1 U_1=U_1\tilde{P}_1, \tag{6}$$

其中 $\tilde{P}_1=I-P_{\lambda_1}$. 由此推出 U_2 是自共轭的并且还是紧的算子(后者是根据定理 IX. 2. 2). 关系式(6)还表明

$$\|U_2\|\leqslant\|\tilde{P}_1\|\|U_1\|\leqslant\|U_1\|.$$

对于算子 U_2 应用前面的定理,我们可得到它的特征值λ_2. 并且,因为$|\lambda_1|=\|U_1\|$, $|\lambda_2|=\|U_2\|$,故

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|.$$

我们证明 λ_1 不是算子 U_2 的特征值. 事实上,假如不然,便可求出元素 $x\neq\mathbf{0}$,使得

$$U_2 x=\lambda_1 x$$

或者借助(5)有

$$U_1 x-\lambda_1 P_{\lambda_1} x=\lambda_1 x. \tag{7}$$

将算子 P_{λ_1} 作用于此等式的两边,注意(4)便得

$$\lambda_1 P_{\lambda_1} x=UP_{\lambda_1} x-\lambda_1 P_{\lambda_1} x=\mathbf{0}.$$

从而由(7)得

$$U_1 x=\lambda_1 x,$$

即 $x\in\mathbf{H}_{\lambda_1}$,故 $x=P_{\lambda_1}x=\mathbf{0}$,从而导致矛盾.

我们再证明, 算子 U_2 的每个异于零的特征值都是算子 U_1 的特征值,并且,对应的特征子空间相同.

事实上,设 $\lambda\neq0$ 是算子 U_2 的特征值, 并且 $x\neq\mathbf{0}$ 是满足条件 $U_2 x=\lambda x$ 的元素. 由(6)可知

$$U_1\tilde{P}_1 x=\lambda x, \tag{8}$$

由此

$$\tilde{P}_1 U_1\tilde{P}_1 x=\lambda\tilde{P}_1 x.$$

另一方面，

$$\tilde{P}_1U_1\tilde{P}_1x=U_1\tilde{P}_1^2x=U_1\tilde{P}_1x=\lambda x,$$

所以 $\tilde{P}_1x=x$. 这样，由(8)可得

$$U_1x=\lambda x,$$

即 λ 是算子 U_1 的特征值. 如果现在把 x 看作是算子 U_1 的对应于特征值 λ 的特征元素，则因为 $\lambda\neq\lambda_1$，子空间 $\mathbf{H}_\lambda$ 与 $\mathbf{H}_{\lambda_1}$ 正交(参见 4.2 中的 IV)，所以 $P_{\lambda_1}x=\mathbf{0}$，再由(5)式

$$U_2x=U_1x-\lambda_1P_{\lambda_1}x=U_1x=\lambda x.$$

因此，x 是算子 U_2 的特征元素.

如果算子 U_2 不恒等于零，则从它出发作算子 $U_3=U_2-\lambda_2P_{\lambda_2}$，等等. 这个过程继续下去，便得到紧自共轭算子 $U_1=U, U_2, \cdots, U_n$ 及这些算子的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，使得

$$U_{k+1}=U_k-\lambda_kP_{\lambda_k}=U-\sum_{j=1}^{k}\lambda_jP_{\lambda_j}\qquad(k=1,2,\cdots,n-1),$$

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|,\ \|U_k\|=|\lambda_k|\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

并且根据上面的证明，λ_k 是算子 $U_1=U$ 的两两不同的特征值.

假如 $U_n=\mathbf{0}$，则

$$U=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_jP_{\lambda_j}. \tag{9}$$

如果对于任意 $n=1,2,\cdots,U_n\neq\mathbf{0}$，则由上述过程得出一个算子序列 $U_1, U_2, \cdots$ 及特征值序列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$. 我们来证明，这时 $\lambda_n\to0$. 事实上，假如不然，对于所有的 $n=1,2,\cdots$

$$|\lambda_n|\geqslant\lambda_0>0.$$

在子空间 $\mathbf{H}_{\lambda_n}$ 中取规格化元素 x_n，因为不相同的元素 x_n 两两正交，所以

$$\|Ux_m-Ux_n\|^2=\|\lambda_mx_m-\lambda_nx_n\|^2=|\lambda_m|^2+|\lambda_n|^2\geqslant2\lambda_0^2$$
$$(m\neq n),$$

由此导致序列$\{Ux_n\}$及其任何子序列都不收敛，这和算子U的紧性矛盾. 因为$\|U_n\|=|\lambda_n|$，所以，由上面证明可推知$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0}$，因此

$$U=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k P_{\lambda_k}.$$

于是，算子可表示为(3)的形式.

我们证明，除$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$外算子没有其他异于零的特征值. 事实上，假如$\lambda$是这样的特征值，则对于某个$x\neq\mathbf{0}$应有$Ux=\lambda x$，即

$$\lambda x=\sum_k \lambda_k P_{\lambda_k}x.$$

元素$P_{\lambda_k}x$属于$\mathbf{H}_{\lambda_k}$，所以是两两正交的，从而

$$\lambda P_{\lambda_m}x=\lambda_m P_{\lambda_m}x \qquad (m\in\boldsymbol{N}).$$

因为$\lambda\neq\lambda_m$，所以$P_{\lambda_m}x=\mathbf{0}$. 因此$x=\mathbf{0}$.

定理证毕.

注 1. 不难验证，对应于异于零的特征值的特征子空间$\mathbf{H}_{\lambda_k}$是有限维的.

事实上，$\mathbf{H}_{\lambda_k}$中任何有界集合E是有界集合$\tilde{E}$的象($\tilde{E}$由所有形为$z=(1/\lambda_k)x$的元素z组成，其中$x\in E$). 所以由算子U的紧性可知集合E是相对紧的，而这只有当$\mathbf{H}_{\lambda_k}$是有限维时才有可能(参见定理 IV. 1. 3).

注 2. 由关系式(6)推出，特征值λ_k可由下式确定:

$$\lambda_k=\pm\sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\perp H_{\lambda_j}}}|(Ux, x)| \qquad (j=1, 2, \cdots, k-1).$$

4.5. 用$\mathbf{H}_0$表示对应于零特征值的特征子空间，用$\tilde{\mathbf{H}}$表示它的正交补空间. 因为对于任意$x\in\mathbf{H}, y\in\mathbf{H}_0$

$$(Ux, y)=(x, Uy)=0,$$

所以$Ux\perp\mathbf{H}_0$，即$U(\mathbf{H})\subset\tilde{\mathbf{H}}$. 反之，若$y\perp U(\mathbf{H})$，则对于任意$x\in\mathbf{H}$

$$0=(Ux, y)=(x, Uy),$$

由此推出,$Uy=\mathbf{0}$, 即 $y\in\mathbf{H}_0$, 于是 $\tilde{\mathbf{H}}=\overline{U(\mathbf{H})}$.

在每个子空间 $\mathbf{H}_{\lambda_k}$ 中取完全正交系. 由上面的注可知, 它对于任意的 $k=1, 2, \cdots$都是有限的. 把这些系合并成一个系得到正交系 $x_1, x_2, \cdots$, 它们由算子 U 的特征元素构成. 和前面一样, 对应于元素 x_k 的特征值记为 λ_k. 这时, 在这些特征值中一般说有相等的*), 由定理 2 推出, 所作的正交系在 $\tilde{\mathbf{H}}$ 中是完全的, 因此每个元素 $z\in\mathbf{H}$ 可表示为下列形式

$$z=x_0+\tilde{x}, \tag{10}$$

其中

$$x_0\in\mathbf{H}_0 \qquad \tilde{x}=\sum_k c_k x_k\in\tilde{\mathbf{H}}$$

$$(c_k=(\tilde{x}, x_k)=(z, x_k), \quad k\in N).$$

特别, 如果 $z=Ux$, 则上面已指出, $z\in\tilde{\mathbf{H}}$, 故

$$z=\sum_k c_k x_k$$

$$(c_k=(z, x_k)=(Ux, x_k)=(x, Ux_k)=\lambda_k(x, x_k)).$$

考察方程

$$x-\mu Ux=y, \tag{11}$$

其中 y 是 $\mathbf{H}$ 中指定的元素, μ 是数值参数.

把 y 和未知元素 x 表示为形式(10), 得到方程

$$x_0+\sum_k c_k x_k-\mu\sum_k c_k\lambda_k x_k=y_0+\sum_k d_k x_k$$

$$(c_k=(x, x_k), \quad d_k=(y, y_k)),$$

由此

---

*) 这样表示法的方便之处在于, 不仅特征元素确定特征值, 而且反过来特征值也单值地(可相差一个因子)确定特征元素.

$$x_0=y_0 \quad c_k(1-\mu\lambda_k)=d_k \qquad (k=1, 2, \cdots),$$

从而，如果对于任意 $k=1, 2, \cdots$，有

$$1-\mu\lambda_k\neq 0,$$

则

$$x_0=y_0, \quad c_k=\frac{d_k}{1-\mu\lambda_k} \qquad (k=1, 2, \cdots), \tag{12}$$

并且

$$\sum |c_k|^2\leqslant\frac{1}{\min\limits_k|1-\mu\lambda_k|^2}\sum_k|d_k|^2<\infty,$$

其解存在且唯一. 用 x^* 表示这个未知的解，在此情况有

$$x^*=y_0+\sum_k\frac{d_k}{1-\mu\lambda_k}x_k.$$

如果 $\mu\lambda_k=1$，则解仅在对应的系数 $d_k=0$ 时，即方程(11)的右端(元素 y)与属于特征值 $1/\mu$ 的所有特征元素正交时才存在. 此外，因为对应的系数 c_k 可以任意选取，故其解不是唯一的：如果 x^* 是某个解，则 $x^*+\bar{x}$ 也是解，其中 $\bar{x}$ 是 $\mathbf{H}_{1/\mu}$ 中任意元素.

值

$$\mu_k=\frac{1}{\lambda_k} \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

叫做方程(11)的特征值，而属于特征值 λ_k 的特征元素叫做对应于特征值 μ_k 的特征元.

如果把 U 看成是 $\mathbf{L}^2$ 中具有连续对称核的积分算子

$$y=Ux, \quad y(s)=\int_a^b K(s, t)x(t)dt,$$

则上面得到的结果成为积分方程理论中熟知的结果，这里就不再一一列出了.

其次，把对称矩阵看成为有限维 Hilbert 空间中的算子，则可以从上述结果得出矩阵中已知的定理.

4.6. 设 H 是可分空间，为了把紧自共轭算子 U 用矩阵表出（参见 V.3.1），我们用下列方式选取完全的规格化正交系：即在上面关于 $\overset{\shortparallel}{\mathbf{H}}$ 作出的系中再添上 $\mathbf{H}_0$ 中的规格化正交系．以 $\{x_k\}$ 表示所得的系，而以 $\{\lambda_k\}$ 表示对应的特征值（于是，λ_k 可能为零），则得算子 U 的矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}. \tag{13}$$

这个矩阵的对角线元素是特征值，而所有其余的元素都等于零．

可以指出，如果 U 可用形为(13)的矩阵来表示，其中 λ_k 是实数，$\lambda_k\to 0$，则 U 是紧自共轭算子．

§5. 自共轭算子的积分表示

在这一节中，我们用某种 Stieltjes 型的抽象积分来建立任意自共轭算子的表示．如果所讨论的算子还是紧的，则它归结为前一节的公式(3)．

对于具体空间中的算子，这种表示式由 Hilbert 给出（参见 Hilbert），在一般情况下由 Neumann[1]给出，下面讨论的思想属于 F. Riesz，关于这一节叙述的材料，也可参见 Ахиезер 和 Глазман．

这里研究的基本工具是算子函数的概念，这个概念的特殊情况我们在过去已遇到过：例如，对于赋范空间中的算子已定义过整指数幂，而对于 Hilbert 空间中的正算子已讨论过它的平方根，下面把实变量函数与算子之间的对应关系系统地推广到所有连续函数上．

5.1. 设 U 是 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 中的自共轭算子，和前一节一样，用

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Ux,x),\qquad M=\sup_{\|x\|=1}(Ux,x)$$

表示算子的界.

其次,设 $\varphi(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n$. 定义

$$\varphi(U)=c_0I+c_1U+\cdots+c_nU^n,$$

算子 $\varphi(U)$ 叫做算子多项式.

我们指出算子多项式的某些性质:

I. $[\varphi(U)]^*=\bar{\varphi}(U)$. 特别, 如果 $\varphi(t)$ 是实多项式, 则 $\varphi(U)$ 是自共轭算子.

II. 如果 $\varphi(t)=\alpha\varphi_1(t)+\beta\varphi_2(t)$, 则 $\varphi(U)=\alpha\varphi_1(U)+\beta\varphi_2(U)$.

III. 如果 $\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$, 则 $\varphi(U)=\varphi_1(U)\varphi_2(U)$.

IV. 算子多项式与任意和 U 可交换的算子都是可交换的, 即由 $UV=VU$ 可知 $\varphi(U)V=V\varphi(U)$.

V. 如果对于 $t\in[m,M]$, $\varphi(t)\geqslant0$, 则算子 $\varphi(U)$ 是正的.

由于前面四个性质很显然成立, 我们只证 V.

因为多项式 $\varphi(t)$ 在区间 $[m,M]$ 中是非负的, 所以在这个区间中它不能有奇数重根. 此外, 因为经过奇数重根时多项式符号将改变, 而 $\varphi(t)$ 的符号对充分大的 t 与最高次项系数 c_n 符号一致. 所以, 当 $c_n>0$ 时, 大于或等于 M 的奇数重根的个数是偶数, 如果 $c_n<0$, 它是奇数. 根据上面讨论可知, $\varphi(t)$ 可表示为下列形式

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)\cdots\varphi_s(t),$$

其中因子 $\varphi_k(t)$ 具有下列形式之一:

$$\varphi_k(t)=\begin{cases}a & (a>0),\\(t+\alpha_k)^2+\beta_k & (\alpha_k\text{ 是实的}, \beta_k\geqslant0),\\t-t_k & (t_k\leqslant m),\\t_k-t & (t_k\geqslant M).\end{cases}$$

不难验证，对于所有这些情况，$\varphi_k(U)\geqslant 0$.

事实上，例如若 $\varphi_k(t)=t-t_k(t_k\leqslant m)$，则 $\varphi_k(U)=U-t_kI$，并且

$$(\varphi_k(U)x,x)=(Ux,x)-t_k(x,x)\geqslant(m-t_k)(x,x)\geqslant 0.$$

根据 III，

$$\varphi(U)=\varphi_1(U)\varphi_2(U)\cdots\varphi_s(U).$$

但是，算子 $\varphi_k(U)$ 是彼此可交换的（性质 IV），从而，再应用定理 V. 6. 2 的推论可知它们的乘积 $\varphi(U)$ 也是正算子.

我们还要指出两个算子多项式的性质，它们可由上面的性质推出.

VI. 如果在区间 $[m,M]$ 中 $\varphi_1(t)\leqslant\varphi_2(t)$，则 $\varphi_1(U)\leqslant\varphi_2(U)$.

VII. $\|\varphi(U)\|\leqslant\max\limits_{t\in[m,M]}|\varphi(t)|$.

事实上，

$$\|\varphi(U)\|^2=\sup_{\|x\|=1}(\varphi(U)x,\varphi(U)x)=\sup_{\|x\|=1}(\bar{\varphi}(U)\varphi(U)x,x)$$
$$=\sup_{\|x\|=1}(\psi(U)x,x),$$

其中记 $\psi(t)=|\varphi(t)|^2$. 如果 $l=\max\limits_{t\in[m,M]}|\varphi(t)|$，则

$$0\leqslant\psi(t)\leqslant l^2\qquad(t\in[m,M]),$$

所以

$$0\leqslant\psi(U)\leqslant l^2I,$$

从而

$$\sup_{\|x\|=1}(\psi(U)x,x)\leqslant l^2.$$

5. 2. 设 $\varphi(t)$ 是区间 $[m,M]$ 上的连续函数，则存在多项式序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在 $[m,M]$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$. 不难看出，算子序列 $\{\varphi_n(U)\}$ 将收敛于某一个算子. 事实上，

$$\|\varphi_{n+p}(U)-\varphi_n(U)\|\leqslant\max_{t\in[m,M]}|\varphi_{n+p}(t)-\varphi_n(t)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

如果有另一个多项式序列也一致收敛于$\varphi(t)$(在$[m, M]$上),则对应的算子多项式序列将收敛于原序列相同的极限算子. 把两个序列合并成一个,即可验证这一事实. 由这些讨论给出了表达式

$$\varphi(U)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(U)$$

的根据,算子$\varphi(U)$叫做算子函数.

下面的定理描述了算子函数的性质.

定理 1. a) $[\varphi(U)]^*=\bar{\varphi}(U)$. 特别,如果$\varphi(t)$对于$t\in[m, M]$是实的,则$\varphi(U)$是自共轭算子.

b) 如果$\varphi(t)=\alpha\varphi_1(t)+\beta\varphi_2(t)$, 则 $\varphi(U)=2\varphi_1(U)+\beta\varphi_2(U)$.

c) 如果$\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$,则$\varphi(U)=\varphi_1(U)\varphi_2(U)$.

d) 算子$\varphi(U)$与任意和U可交换的算子可交换.

e) 如果$\varphi(t)\geqslant\psi(t)(t\in[m, M])$,则$\varphi(U)\geqslant\psi(U)$.

f) $\|\varphi(U)\|\leqslant\max\limits_{t\in[m,M]}|\varphi(t)|$*).

g) 如果连续函数序列$\{\varphi_n(t)\}$在区间$[m, M]$上一致收敛于函数$\varphi(t)$,则$\|\varphi_n(U)-\varphi(U)\|\to 0$.

h) 如果P是与U可交换的投影算子,则

$$P\varphi(U)=P\varphi(PU).$$

证. 利用算子多项式的性质,不难验证命题 a)—g).

至于点 h),如果$\varphi(t)$是多项式,只要注意到$P^2=P$,从而$P^k=P(k=1,2,\cdots)$,则容易验证相应要证的式子. 当$\varphi(t)$是任意连续函数的情况,必须利用极限过程.

5.3. 为了单值地确定算子$\varphi(U)$,并不必须知道函数$\varphi(t)$在整个$[m, M]$上的值,而只要知道在所谓算子U的谱的闭集$S_U\subset$

---

*) 后面(在5.3中)将给出$\|\varphi(U)\|$的精确表达式.

$[m, M]$上给定函数 $\varphi(t)$ 的值即可.

设U是自共轭算子,λ 是一个数. 如果存在序列$\{x_n\}$, 使得

$$\|x_n\|=1\ (n=1,2,\cdots) \qquad Ux_n-\lambda x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0}, \tag{1}$$

则称 λ 是U的谱点. 换言之,如果

$$\inf_{\|x\|=1}\|Ux-\lambda x\|=0, \tag{2}$$

则 λ 是谱点. 谱点的全体叫做算子U的谱*),并且记为 S_U.

显然, 每个特征值都属于谱, 然而谱也可能包含非特征值的点. 例如,当算子U是紧的, 而空间$\mathbf{H}$是无限维的, $\lambda=0$ 是谱点. 可是,容易看出,它不总是特征值.

设 λ 是谱点,由(1)可得

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}(Ux_n, x_n).$$

由此推出,算子U的谱分布在实数轴上,并且包含在$[m, M]$之中. 我们指出,算子U的界是谱点.

我们假定 $0\leqslant m\leqslant M$**), 考察点 $\lambda=M$. 注意$\|U\|=\lambda$, 对于$\|x\|=1$ 将有

$$\|Ux-\lambda x\|^2=\|Ux\|^2-2\lambda(Ux, x)+\lambda^2\leqslant 2\lambda[\lambda-(Ux, x)],$$

从而

$$\inf_{\|x\|=1}\|Ux-\lambda x\|^2\leqslant 2\lambda[\lambda-\sup_{\|x\|=1}(Ux, x)]=0,$$

根据(2),这就意味着 $\lambda\in S_U$.

其次,可以证明, S_U 是闭集.

事实上,如果 $\lambda_0\notin S_U$,则由(2)

$$\inf_{\|x\|=1}\|Ux-\lambda_0 x\|=d>0.$$

---

*) 当U是任何赋范空间中任意的线性算子时,这个定义形式上也是有意义的. 然而对于一般情况将给出另一个谱的定义, 此定义与只对 Hilbert 空间中自共轭算子U给出的定义是等价的.

**) 算子U加上形如 μI 的算子,这里的条件就能满足, 这时算子的谱和界在实轴上向右移动了 μ.

这时，如果$|\lambda-\lambda_0|<d/2$，则

$$\inf_{\|x\|=1}\|Ux-\lambda x\|\geqslant\inf_{\|x\|=1}\|Ux-\lambda_0 x\|-\sup_{\|x\|=1}\|\lambda_0 x-\lambda x\|$$

$$>d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}>0.$$

因此，集 S_U 的余集是开的.

在叙述主要结果之前，我们先证两个辅助命题.

引理 1. 设 $\varphi(t)$是实多项式，这时 $S_{\varphi(U)}=\varphi(S_U)$，即算子 $\varphi(U)$的谱由表示为 $\mu=\varphi(\lambda)(\lambda\in S_U)$的形式的所有 μ 组成.

证. 设 μ 是某个实数，$t_1, t_2, \cdots, t_s$ 是方程

$$\varphi(t)=\mu$$

的全部根. 显然，算子 $\varphi(U)-\mu I$ 可表示为乘积形式:

$$\varphi(U)-\mu I=c(U-t_1 I)(U-t_2 I)\cdots(U-t_s I). \tag{3}$$

取 $\lambda\in S_U$，可求出规格化元素序列 $\{x_n\}$，使得 $Ux_n-\lambda x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. 在分解式(3)中令 $\mu=\varphi(\lambda)$，$t_s=\lambda$，这时

$$\varphi(U)x_n-\mu x_n=c(U-t_1 I)(U-t_2 I)\cdots(Ux_n-\lambda x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

即 $\mu\in S_{\varphi(U)}$.

反之，如果 t_k 中没有一个属于算子 U 的谱，则

$$\inf_{\|x\|=1}\|Ux-t_s x\|=\rho_s>0,$$

$$\inf_{\|x\|=1}\|(U-t_{s-1}I)(Ux-t_s x)\|\geqslant\inf_{\|y\|\geqslant\rho_s}\|Uy-t_{s-1}y\|$$

$$=\rho_{s-1}>0,$$

如此继续下去，得

$$\inf_{\|x\|=1}\|\varphi(U)x-\mu x\|=\rho_1>0.$$

从而 $\mu=\varphi(t_k)(k=1,2,\cdots,s)$不属于 $S_{\varphi(U)}$.

引理 2. 如果 $\varphi(t)$是多项式，则

$$\|\varphi(U)\|=\max_{t\in S_U}|\varphi(t)|.$$

事实上，

$$\|\varphi(U)\|^2=\sup_{\|x\|=1}(\varphi(U)x,\varphi(U)x)=\sup_{\|x\|=1}(\bar{\varphi}(U)\varphi(U)x,x)$$
$$=\sup_{\|x\|=1}(\psi(U)x,x),\qquad(4)$$

其中 $\psi(t)=|\varphi(t)|^2$.

因此，$\|\varphi(U)\|^2$ 是算子 $\psi(U)$的上界．但是正算子 $\psi(U)$的上界与这个算子谱的上确界重合:

$$M_{\psi(U)}=\sup S_{\psi(U)}.\qquad(5)$$

根据引理 1 的结论

$$\sup S_{\psi(U)}=\sup \psi(S_U)=\sup_{t\in S_U}\psi(t)=[\sup_{t\in S_U}|\varphi(t)|]^2.$$

此外，由于集合 S_U 是闭的，上确界可以用最大值代替，把最后一个等式与关系式(4)和(5)对照，即得要求的结果.

现在不难证明基本定理了.

定理 2. 如果 $\varphi(t)$是$[m, M]$上的连续函数，则

$$\|\varphi(U)\|=\max_{t\in S_U}|\varphi(t)|.\qquad(6)$$

事实上，设$\{\varphi_n(t)\}$是一致收敛于 $\varphi(t)$的多项式序列，根据引理 2

$$\|\varphi_n(U)\|=\max_{t\in S_U}|\varphi_n(t)|=\|\varphi_n\|.$$

令 $n\to\infty$ 取极限，便得到(6).

推论. 设 φ_1 和 φ_2 是$[m, M]$上的连续函数，若它们在算子的谱 S_U 上重合，则 $\varphi_1(U)=\varphi_2(U)$.

设 $\varphi(t)$是在算子 U 的谱上给定的而且还是连续的，把它连续延拓到整个空间$[m, M]$上，我们便得到在$[m, M]$上连续的函数 $\tilde{\varphi}(t)$，我们定义

$$\varphi(U)=\tilde{\varphi}(U).$$

由上面讨论可知算子 $\varphi(U)$不依赖于函数 $\varphi(t)$延拓的方法，而仅由函数 φ 在 S_U 上的值来确定．显然，定理 1 所述的算子函数的

性质都可搬到刚才定义的函数上(在定理 1 讲到的区间$[m, M]$用S_U替代).

利用算子函数推广了的概念可以证明一个刻划自共轭算子谱的重要定理.

我们说复数λ是算子U的正则值,如果它不属于这个算子的谱.

定理 3. 数λ是算子U的正则值的充要条件为在$\mathbf{H}$中存在线性逆算子

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1} \text{ *)}.$$

证. 必要性. 设λ是正则值. 在S_U上作函数ρ_λ:

$$\rho_\lambda(t) = \frac{1}{t - \lambda},$$

并设$R_\lambda = \rho_\lambda(U)$. 因为

$$(t - \lambda)\rho_\lambda(t) = 1 \qquad (t \in S_U),$$

所以根据定理 1 有

$$(U - \lambda I)R_\lambda = R_\lambda(U - \lambda I) = I,$$

从而

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1}.$$

充分性. 如果存在线性逆算子(即使是左逆)

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1},$$

则当$\|x\| = 1$时

$$\|R_\lambda(U - \lambda I)x\| = \|x\| = 1.$$

从而

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| \geqslant \frac{1}{\|R_\lambda\|} > 0.$$

利用这个定理可以把引理 1 的结果推广到任意实的连续函数

---

*) 正是这个定理可以作为在任意赋范空间中的任意线性算子的一般情况下定义谱的基础(参见第十三章).

上去.

定理 4. 设 $\varphi(t)$是 S_U 上的连续实函数,则

$$S_{\varphi(U)}=\varphi(S_U).$$

证. 设 $\mu\overline{\in}\varphi(S_U)$. 函数 $\psi(t)$:

$$\psi(t)=\frac{1}{\varphi(t)-\mu}\qquad(t\in S_U).$$

在 S_U 上连续,所以算子 $\psi(U)$有意义. 显然

$$\psi(U)=[\varphi(U)-\mu I]^{-1}.$$

因此,由定理 3, $\mu\overline{\in}S_{\varphi(U)}$.

现在假设 $\mu=\varphi(\lambda)$, 其中 $\lambda\in S_U$. 设$\{\varphi_n(t)\}$是在 S_U 上一致收敛于 $\varphi(t)$的多项式序列,这时

$$\|\varphi(U)x-\mu x\|\leqslant\|\varphi_n(U)x-\varphi_n(\lambda)x\|+\|\varphi(U)-\varphi_n(U)\|\|x\|$$
$$+|\mu-\varphi_n(\lambda)|\|x\|.$$

又因为根据引理 1,有

$$\inf_{\|x\|=1}\|\varphi_n(U)x-\varphi_n(\lambda)x\|=0,$$

所以

$$\inf_{\|x\|=1}\|\varphi(U)x-\mu x\|\leqslant\|\varphi(U)-\varphi_n(U)\|+|\mu-\varphi_n(\lambda)|.$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\inf_{\|x\|=1}\|\varphi(U)x-\mu x\|=0,$$

即 $\mu\in S_{\varphi(U)}$.

5.4. 可以将每个自共轭算子U和一投影算子族对应起来.利用投影算子族能够建立算子U及算子函数的 Stieltjes 积分型的形式表达式.

设U是自共轭算子. 考察函数

$$\varphi_\lambda^+(t)=\begin{cases}0 & (t\leqslant\lambda),\\ t-\lambda & (t>\lambda),\end{cases}$$

并引用记号

$$U_\lambda^+=\varphi_\lambda^+(U).$$

其次，设 $\mathbf{H}_\lambda^+$表示所有使 $U_\lambda^+x=0$ 的元素 x 所构成的集合，即 $\mathbf{H}_\lambda^+$是算子 U_λ^+ 对应于零特征值的特征子空间. 最后，用 I_λ 表示到子空间 $\mathbf{H}_\lambda^+$上的投影算子.

如下述定理指出，投影算子 I_λ 的性质与算子 U 的谱有密切关系. 因此我们把投影算子族 I_λ 叫做算子 U 的谱函数.

定理 5. a) 如果 $\lambda<m$，则 $I_\lambda=0$；如果 $\lambda>M$，则 $I_\lambda=I$.

b) 如果 $\lambda\leqslant\mu$，则 $I_\lambda\leqslant I_\mu$.

c) 谱函数作为 λ 的函数在

$$I_\lambda=I_{\lambda+0}=\lim_{\mu\to\lambda+0}I_\mu \qquad (\text{在 } \mathbf{H} \text{ 上})$$

意义下是右连续的.

d) 投影算子 $I_\lambda(-\infty<\lambda<\infty)$ 与任意和 U 可交换的算子可交换.

e) 算子 U 的每一个实正则值 λ 都是谱函数不变化的点，即存在 $\delta>0$，使得 $I_{\lambda-\delta}=I_{\lambda+\delta}$. 反之，谱函数不变化的点是算子 U 的正则值.

f) 实数 λ 是算子 U 的特征值的充要条件为 $I_\lambda=I_{\lambda+0}\neq I_{\lambda-0}$，其中 $I_{\lambda-0}=\lim\limits_{\mu\to\lambda-0}I_\mu$(在 $\mathbf{H}$ 上). 并且，算子 $P_\lambda=I_\lambda-I_{\lambda-0}$ 是到对应于特征值 λ 的特征子空间上的投影算子.

g) 如果在区间$[\lambda,\ \mu]$上 $\varphi(t)\geqslant0$，则$[I_\mu-I_\lambda]\varphi(U)\geqslant0$*).

证. a) 如果 $\lambda<m$，则 $U_\lambda^+=U-\lambda I$. 所以对于 $x\neq0$

$$(U_\lambda^+x,x)=(Ux,x)-\lambda(x,x)\geqslant(m-\lambda)(x,x)>0,$$

于是 $\mathbf{H}_\lambda^+$ 仅由零元素组成.

在 $\lambda>M$ 时有 $U_\lambda^+=0$ 及 $\mathbf{H}_\lambda^+=\mathbf{H}$.

b) 如果 $\lambda\leqslant\mu$，则 $\varphi_\lambda^+(t)\geqslant\varphi_\mu^+(t)$. 因而根据定理1，$U_\lambda^+\geqslant U_\mu^+$.

---

*) 显然只要求在属于区间$[\lambda,\mu]$的谱点处不等式 $\varphi(t)\geqslant0$ 成立就足够了.

此外，$U_\mu^+\geqslant\mathbf{0}$. 所以

$$0\leqslant(U_\mu^+x,x)\leqslant(U_\lambda^+x,x)\qquad(x\in\mathbf{H}).$$

如果 $x\in\mathbf{H}_\lambda^+$，则 $U_\lambda^+x=\mathbf{0}$，因而

$$(U_\mu^+x,x)=0.$$

由此推出 $U_\mu^+x=\mathbf{0}$*)，即 $x\in\mathbf{H}_\mu^+$. 因此 $\mathbf{H}_\lambda^+\subset\mathbf{H}_\mu^+$，它正对应于要证的投影算子之间的关系：$I_\lambda\leqslant I_\mu$（参见定理 V.6.7）.

c）因为 I_λ 随 λ 下降而下降，所以根据定理 V.6.7，在 $\mathbf{H}$ 上 $I_{\lambda+0}=\lim\limits_{\mu\to\lambda+0}I_\mu$ 存在，并且是投影算子. 用 $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+$ 表示与它对应的子空间. 因为 $I_\lambda\leqslant I_{\lambda+0}$，所以 $\mathbf{H}_\lambda^+\subset\mathbf{H}_{\lambda+0}^+$. 设 $x\in\mathbf{H}_{\lambda+0}^+$，因为，显然 $x\in\mathbf{H}_\mu^+(\mu>\lambda)$，$I_\mu x=x$. 因此，$U_\mu^+x=\mathbf{0}$. 但是

$$\|U_\mu^+-U_\lambda^+\|=\max_{t\in S_U}|\varphi_\mu^+(t)-\varphi_\lambda^+(t)|\leqslant\mu-\lambda,$$

于是

$$U_\lambda^+x=\lim_{\mu\to\lambda+0}U_\mu^+x=\mathbf{0},$$

由此 $x\in\mathbf{H}_\lambda^+$. 这样 $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+\subset\mathbf{H}_\lambda^+$，与前面的联系起来便得到 $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+=\mathbf{H}_\lambda^+$，或者 $I_{\lambda+0}=I_\lambda$.

d）设 V 是与 U 可交换的算子. 根据定理 1，算子 V 也与 U_λ^+ 可交换，由此对于 $x\in\mathbf{H}_\lambda^+$ 有

$$U_\lambda^+Vx=VU_\lambda^+x=\mathbf{0},$$

即 $Vx\in\mathbf{H}_\lambda^+$. 如果 x 是 $\mathbf{H}$ 中任意的元素，则根据证明 $VI_\lambda x\in\mathbf{H}_\lambda^+$，因而

$$VI_\lambda=I_\lambda VI_\lambda. \tag{7}$$

算子 V^* 也与 U 可交换，所以在(7)式中可用 V^* 代替 V：

$$V^*I_\lambda=I_\lambda V^*I_\lambda.$$

---

*）如果对于正算子 V 及某个 $x\in\mathbf{H}$ 有 $(Vx,x)=0$，则 $Vx=\mathbf{0}$. 事实上，

$$0=(Vx,x)=([\sqrt{V}]^2x,x)=(\sqrt{V}x,\sqrt{V}x),$$

即 $\sqrt{V}x=\mathbf{0}$. 而这时 $Vx=\sqrt{V}(\sqrt{V}x)=\mathbf{0}$.

对最后一个等式的两边取共轭算子，便有

$$I_\lambda V = I_\lambda V I_\lambda.$$

与(7)式比较，得

$$I_\lambda V = V I_\lambda.$$

e) 引进算子

$$U_\lambda^- = \varphi_\lambda^-(U),$$

其中

$$\varphi_\lambda^-(t) = \begin{cases} t-\lambda & (t \leqslant \lambda), \\ 0 & (t > \lambda), \end{cases}$$

我们证明下式成立：

$$U_\lambda^- = I_\lambda(U - \lambda I). \tag{8}$$

事实上，因为

$$U - \lambda I = U_\lambda^+ + U_\lambda^-, \tag{9}$$

则对于 $x \in \mathbf{H}_\lambda^+$

$$Ux - \lambda x = U_\lambda^- x.$$

如果 x 是 $\mathbf{H}$ 中的任意元素，则可写为

$$I_\lambda(Ux - \lambda x) = (U - \lambda I) I_\lambda x = U_\lambda^- I_\lambda x = I_\lambda U_\lambda^- x. \tag{10}$$

但是，因为 $U_\lambda^+ U_\lambda^- = \mathbf{0}$，即 $U_\lambda^+(U_\lambda^- x) = \mathbf{0}$，则 $U_\lambda^- x \in \mathbf{H}_\lambda^+$，从而 $I_\lambda U_\lambda^- x = U_\lambda^- x$，这就导致公式(8).

现在设 λ_0 是谱函数不变化的点，即存在包含 λ_0 的区间(λ, μ)，使得 $I_\lambda = I_\mu$. 考察算子

$$P = \frac{U_\lambda^- - U_\mu^-}{\mu - \lambda}.$$

利用 (8) 式，便有

$$P = \frac{I_\lambda(U - \lambda I) - I_\mu(U - \mu I)}{\mu - \lambda} = I_\lambda,$$

即，P 是投影算子，并且

$$P = \sigma(U),$$

其中 $\sigma(t)$是这样的函数，当 $t\leqslant\lambda$ 时它等于 1，当 $t\geqslant\mu$ 时它等于 0，并在区间$[\lambda,\mu]$上是线性的函数.

设在区间(λ,μ)中有算子 U 的谱点，例如设 $\tilde{\lambda}$ 是一个谱点，这时

$$Q=P-P^2=\mathbf{0}.$$

但根据定理 2

$$\|Q\|=\max_{t\in S_U}|\sigma(t)-\sigma^2(t)|\geqslant\sigma(\tilde{\lambda})-\sigma^2(\tilde{\lambda})>0,$$

于是，λ_0 作为区间(λ,μ)中的点是正则值.

现在设 λ 是谱函数增长的点，这就是说，对于任意 $\delta>0$

$$I_{\lambda+\delta}-I_{\lambda-\delta}\neq\mathbf{0}.$$

讨论 $x\in\mathbf{H}_{\lambda+\delta}^{+}\ominus\mathbf{H}_{\lambda-\delta}^{+}$. 因为 $x\in\mathbf{H}_{\lambda+\delta}^{+}$，所以 $U_{\lambda+\delta}^{+}x=\mathbf{0}$. 但因为

$$\|U_{\lambda+\delta}^{+}-U_{\lambda}^{+}\|\leqslant\delta,$$

所以

$$\|U_{\lambda}^{+}x\|\leqslant\delta\|x\|.$$

其次，$x\perp\mathbf{H}_{\lambda-\delta}^{+}$，即 $I_{\lambda-\delta}x=\mathbf{0}$. 因而

$$I_{\lambda-\delta}U_{\lambda-\delta}^{-}x=U_{\lambda-\delta}^{-}I_{\lambda-\delta}x=\mathbf{0},$$

由此得 $U_{\lambda-\delta}^{-}x\perp\mathbf{H}_{\lambda-\delta}^{+}$. 但上面已经指出，$U_{\lambda-\delta}^{-}x\in\mathbf{H}_{\lambda-\delta}^{+}$. 因此对于所考虑的情况 $U_{\lambda-\delta}^{-}x=\mathbf{0}$. 与前面类似地讨论可知

$$\|U_{\lambda-\delta}^{-}-U_{\lambda}^{-}\|\leqslant\delta,$$

由此

$$\|U_{\lambda}^{-}x\|\leqslant\delta\|x\|.$$

由(9)式得

$$\|Ux-\lambda x\|\leqslant\|U_{\lambda}^{+}x\|+\|U_{\lambda}^{-}x\|\leqslant2\delta\|x\|. \tag{11}$$

取序列 $\delta_n\to0$ 及与其相对应的规格化元素 $x_n\in\mathbf{H}_{\lambda+\delta_n}^{+}\ominus\mathbf{H}_{\lambda-\delta_n}^{+}$ 的序列，即有

$$\|Ux_n-\lambda x_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

这就表示 λ 属于算子 U 的谱.

f) 首先指出,由于谱函数的单调性,在 $\mathbf{H}$ 上

$$I_{\lambda-0}=\lim_{\mu\to\lambda-0} I_\mu$$

存在,并且 $I_{\lambda-0}$ 是投影算子,显然还有 $I_{\lambda-0}\leqslant I_\lambda$.

现在假设,在点 λ 处

$$I_{\lambda-0}\neq I_{\lambda+0}=I_\lambda.$$

以 $\mathbf{H}^+_{\lambda-0}$ 表示对应于投影算子 $I_{\lambda-0}$ 的子空间,取 $x\in\mathbf{H}^+_\lambda\ominus\mathbf{H}^+_{\lambda-0}$. 显然,对于任意 $\delta>0$, $x\in\mathbf{H}^+_{\lambda+\delta}\ominus\mathbf{H}^+_{\lambda-\delta}$. 因为不等式(11)对任意 $\delta>0$ 均成立,而其左端又与 δ 无关系,所以

$$\|Ux-\lambda x\|=0,$$

即 λ 是算子 U 的特征值, 而 x 是相应的特征元素. 如果象通常那样用 H_λ 表示特征子空间,用 P_λ 表示到 $\mathbf{H}_\lambda$ 上的投影算子,则从上面证明推出

$$\mathbf{H}_\lambda\supset\mathbf{H}^+_\lambda\ominus\mathbf{H}^-_{\lambda-0}\qquad (P_\lambda\geqslant I_\lambda-I_{\lambda-0}).$$

其次,讨论投影算子

$$I'_\mu=P_\lambda-I_\mu P_\lambda\qquad(-\infty<\mu<\infty),$$

我们来证明 $I'_\mu x=\mathbf{0}$ 等价于等式 $P_\lambda U^+_\mu x=\mathbf{0}$. 事实上,如果 $I'_\mu x=\mathbf{0}$, 则 $P_\lambda x=I_\mu P_\lambda x$, 由此 $P_\lambda U^+_\mu x=U^+_\mu P_\lambda x=\mathbf{0}$. 反之, 如果 $P_\lambda U^+_\mu x=\mathbf{0}$, 则 $P_\lambda x\in\mathbf{H}^+_\mu$ 及 $I_\mu P_\lambda x=P_\lambda x$, 即 $I'_\mu x=\mathbf{0}$.

利用定理 1 中的h),将有

$$P_\lambda U^+_\mu=P_\lambda\varphi^+_\lambda(P_\lambda U).$$

但是

$$P_\lambda U=\lambda P_\lambda,$$

所以由算子函数的定义直接得到

$$P_\lambda U^+_\mu=\begin{cases}(\lambda-\mu)P_\lambda, & \mu<\lambda,\\ \mathbf{0}, & \mu\geqslant\lambda.\end{cases}$$

由此推出,当 $\mu<\lambda$ 时,等式 $I'_\mu x=\mathbf{0}$ 等价于 $P_\lambda x=\mathbf{0}$, 即当 $\mu<\lambda$ 时

$I'_\mu = P_\lambda$. 如果 $\mu \geqslant \lambda$, 则 $I'_\mu = \mathbf{0}$. 于是

$$I_\mu P_\lambda = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mu < \lambda, \\ P_\lambda, & \mu \geqslant \lambda. \end{cases}$$

但是

$$I_\mu = I_\mu P_\lambda + I_\mu (I - P_\lambda),$$

从而

$$I_{\lambda-0} = \lim_{\mu \to \lambda - 0} I_\mu = I_{\lambda-0}(I - P_\lambda).$$

从等式

$$I_\lambda = I_\lambda P_\lambda + I_\lambda (I - P_\lambda) = P_\lambda + I_\lambda (I - P_\lambda)$$

减去前式得

$$I_\lambda - I_{\lambda-0} = P_\lambda + (I_\lambda - I_{\lambda-0})(I - P_\lambda) \geqslant P_\lambda.$$

因为 $P_\lambda \neq \mathbf{0}$, 从而更有 $I_\lambda - I_{\lambda-0} \neq \mathbf{0}$, 即谱函数在点 λ 处有跳跃. 此外, 考虑到前面得到的关系式, 便得

$$P_\lambda = I_\lambda - I_{\lambda-0}.$$

g) 首先假设在区间 $[\lambda, \mu]$ 上函数 $\varphi(t) = 0$, 我们来证明, $[I_\mu - I_\lambda]\varphi(U) = \mathbf{0}$. 为此我们考察函数 $\widetilde{\varphi}(t)$, 它是在点 $\lambda, \lambda_2, \cdots, \lambda_r (\lambda_k \leqslant \lambda, \lambda_r = \lambda)$ 及 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s (\mu_k \geqslant \mu, \mu_1 = \mu)$ 处与函数 $\varphi(t)$ 重合, 而在这些点之间的区间中成线性的函数. 显然

$$\widetilde{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi^-_{\lambda_k}(t) + \sum_{k=1}^{s} \beta_k \varphi^+_{\mu_k}(t),$$

从而

$$\widetilde{\varphi}(U) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k U^-_{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{s} \beta_k U^+_{\mu_k}.$$

我们来验证

$$[I_\mu - I_\lambda]\widetilde{\varphi}(U) = \mathbf{0}. \tag{12}$$

我们分别考察和式

$$[I_\mu - I_\lambda]\tilde{\varphi}(U) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k [I_\mu - I_\lambda] U^-_{\bar{\lambda}_k} + \sum_{k=1}^{s} \beta_k [I_\mu - I_\lambda] U^+_{\mu_k}$$

的每个加项. 利用公式(8)得

$$\begin{aligned}[I_\mu - I_\lambda] U^-_{\bar{\lambda}_k} &= [I_\mu - I_\lambda] I_{\lambda_k}(U - \lambda_k I) \\ &= [I_\mu I_{\lambda_k} - I_\lambda I_{\lambda_k}](U - \lambda_k I).\end{aligned}$$

但是,$I_{\lambda_k} \leqslant I_\lambda \leqslant I_\mu$, 所以 $I_\mu I_{\lambda_k} = I_\lambda I_{\lambda_k} = I_{\lambda_k}$, 由此推出$[I_\mu - I_\lambda] U^-_{\bar{\lambda}_k} = \mathbf{0}$. 其次, $[I_\mu - I_\lambda] U^+_{\mu_k} = I_\mu [I - I_\lambda] U^+_{\mu_k} = [I - I_\lambda] U^+_{\mu_k} I_\mu = \mathbf{0}$. 于是(12)式得证.

函数 $\varphi(t)$ 可以表示成上面所考察的那种分段线性函数序列在区间$[m, M]$上一致收敛的极限. 因为形如(12) 的关系式对序列中每个函数都成立,则根据定理 1中的 g),取极限便得所要求的关系式$[I_\mu - I_\lambda]\varphi(U) = \mathbf{0}$.

现在假设 $\varphi(t)$满足定理条件,即对于 $t \in [\lambda, \mu]$, $\varphi(t) \geqslant 0$. 除了函数 $\varphi(t)$我们还讨论函数 $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(\lambda), & t < \lambda, \\ \varphi(t), & \lambda \leqslant t \leqslant \mu, \\ \varphi(\mu), & t > \mu. \end{cases}$$

因为对于所有 t, $\psi(t) \geqslant 0$, 所以 $\psi(U) \geqslant \mathbf{0}$, 那么更有$[I_\mu - I_\lambda]\psi(U) \geqslant \mathbf{0}$, 但在区间$[\lambda, \mu]$上函数 $\varphi(t)$和 $\psi(t)$重合,从而按上述证明得

$$[I_\mu - I_\lambda][\varphi(U) - \psi(U)] = \mathbf{0}.$$

由此得到

$$[I_\mu - I_\lambda]\varphi(U) = [I_\mu - I_\lambda]\psi(U) \geqslant \mathbf{0}.$$

定理证毕.

5.5. 现在转到算子函数的积分表示. 设 $\varphi(t)$是在$(-\infty, +\infty)$上给定的实连续有界函数*), 考察由点$-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots <$

---

*) 可以认为,最初 $\varphi(t)$在算子U的谱上给定, 然后再保持指定的性质延拓到整个数轴上.

$\lambda_n<\lambda_{n+1}=\infty$ $(\lambda_1<m, \lambda_n>M)$给出的数轴的分划. 作和:

$$s=\sum_{k=1}^{n-1} l_k[I_{\lambda_{k+1}}-I_{\lambda_k}]; \qquad S=\sum_{k=1}^{n-1} L_k[I_{\lambda_{k+1}}-I_{\lambda_k}], \tag{13}$$

其中

$$l_k=\inf_{t\in[\lambda_k,\lambda_{k+1}]} \varphi(t), L_k=\sup_{t\in[\lambda_k,\lambda_{k+1}]} \varphi(t).$$

因为在区间$[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ 中函数 $\varphi(t)$满足条件 $l_k\leqslant\varphi(t)\leqslant L_k$, 所以根据定理 5 中的g)

$$l_k[I_{\lambda_{k+1}}-I_{\lambda_k}]\leqslant[I_{\lambda_{k+1}}-I_{\lambda_k}]\varphi(U)\leqslant L_k[I_{\lambda_{k+1}}-I_{\lambda_k}],$$

取和便得

$$s\leqslant\varphi(U)\leqslant S. \tag{14}$$

但另一方面

$$S-s=\sum_{k=1}^{n-1}(L_k-l_k)[I_{\lambda_{k+1}}-I_k]\leqslant\delta I,$$

其中 δ 表示 $\max\limits_{k=1,2,\cdots,n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$. 所以, 若 $\delta\to 0$, 则$\|S-s\|\to 0$. 而由于 $0\leqslant S-\varphi(U)\leqslant S-s$, 故 $S\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}\varphi(U)$, 类似地 $s\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}\varphi(U)$.

现在作“积分”和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\xi_k)[I_{\lambda_{k+1}}-I_{\lambda_k}] \qquad (\lambda_k\leqslant\xi_k\leqslant\lambda_{k+1}). \tag{15}$$

不难验证

$$s\leqslant\sigma\leqslant S,$$

从而

$$\lim_{\delta\to 0}\sigma=\lim_{\delta\to 0} S=\varphi(U).$$

但是$\lim\limits_{\delta\to 0}\sigma$可以看作积分:

$$\lim_{\delta\to 0}\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dI_t. \tag{16}$$

于是我们得到公式

$$\varphi(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dI_t. \tag{17}$$

特别,如果 $\varphi(t)=t$,公式(17)给出算子 U 的积分表达式

$$U=\int_{-\infty}^{+\infty}tdI_t. \tag{18}$$

在定理 1 及 5.3 中给出的算子函数的性质可以用算子积分(16)的术语来表述. 我们再给出把算子函数的概念同一般 Stieltjes 积分联系起来的公式:

$$(\varphi(U)x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)d(I_tx,y)$$

及由此推出的关系式:

$$\|\varphi(U)x\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|^2d(I_tx,x).$$

这些推导不难,请读者自己完成.

可以在区间$[\lambda,\mu]$上考察形为(16)的积分. 不难验证

$$\int_\lambda^\mu\varphi(t)dI_t=[I_\mu-I_\lambda]\varphi(U).$$

特别地,如果 $\lambda<m$, $\mu\geqslant M$,则

$$\int_\lambda^\mu\varphi(t)dI_t=\varphi(U).$$

5.6. 为了构造形为(16)的积分不必要假设投影算子族 I_λ 是自共轭算子的谱函数,而只要投影算子族满足定理 5 a)和 5b) 的条件就够了.

设$\{E_\lambda\}$是一依赖于一个实参数的投影算子族,并满足条件:

1) 如果 $\lambda\leqslant\mu$,则 $E_\lambda\leqslant E_\mu$.

2) 存在数 m 和 M,使得当 $\lambda<m$ 时 $E_\lambda=0$,当 $\lambda>M$ 时 $E_\lambda=I$.

在这种情况下,我们称$\{E_\lambda\}$为单位分解.

作了这些假设之后, 实变量的复函数(E_tx,y) 对于任意元素

$x,y\in\mathbf{H}$ 都是有界变差函数．这可以由下式直接推出：

$$(E_tx,y)=\frac{1}{4}\{[(E_t(x+y),x+y)-(E_t(x-y),x-y)]$$
$$+i[(E_t(x+yi),x+yi)-(E_t(x-yi),x-yi)]\}.$$

因此，如果 $\varphi(t)$是连续的有界函数，则积分

$$J(\varphi;x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)d(E_tx,y)\qquad(x,y\in\mathbf{H})$$

有意义．不难看出，泛函 $J(\varphi;x,y)$ 关于 x 及 y 是可加的及齐次的*)．此外，因为

$$|J(\varphi;x,y)|\leqslant\sup|\varphi(t)|\bigvee_{-\infty}^{\infty}[(E_tx,y)]$$
$$\leqslant\sup|\varphi(t)|\cdot\frac{1}{4}[\|x+y\|^2+\|x-y\|^2+\|x+yi\|^2$$
$$+\|x-yi\|^2]=\sup|\varphi(t)|[\|x\|^2+\|y\|^2],\qquad(19)$$

所以泛函 $J(\varphi;x,y)$关于 x,y 连续．

指定 x，考察作为 y 的线性泛函

$$f_x(y)=\overline{J(\varphi;x,y)}.$$

注意到 Hilbert 空间中线性泛函的一般形式，将有

$$f_x(y)=(y,\tilde{x}),$$

其中元素 $\tilde{x}\in\mathbf{H}$ 仅由泛函 f_x 确定，即最终由元素 x 确定．设 $\tilde{x}=J(\varphi)x$，则可写为

$$J(\varphi;x,y)=(J(\varphi)x,y).$$

显然，算子 $J(\varphi)$是可加的和齐次的．其次，利用(19)式可得

$$\|J(\varphi)x\|=\left(J(\varphi)x,\frac{J(\varphi)x}{\|J(\varphi)x\|}\right)\leqslant\sup_{\|y\|=1}(J(\varphi)x,y)$$
$$\leqslant\sup|\varphi(t)|[\|x\|^2+1],$$

由此推出算子 $J(\varphi)$的有界性．

*）对于 y 的齐次是“第二类的”；$J(\varphi;x,\alpha y)=\bar{\alpha}J(\varphi;x,y)$．

完全一样地可定义在任意区间$[\lambda,\mu]$上的积分.

现在我们来证明，算子$J(\varphi)$是形为(15)的积分和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\xi_k)[E_{\lambda_{k+1}}-E_{\lambda_k}] \qquad (\lambda_1<m,\lambda_n>M)$$

的极限. 我们有

$$\begin{aligned}(J(\varphi)x,y)-(\sigma x,y) &=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\varphi(t)d(E_tx,y)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\varphi(\xi_k)d(E_tx,y)\\ &=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}[\varphi(t)-\varphi(\xi_k)]d(E_tx,y).\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}\|J(\varphi)-\sigma\| &=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}|(J(\varphi)x,y)-(\sigma x,y)|\\ &\leqslant\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}[\varphi(t)-\varphi(\xi_k)]d(E_tx,y)\right|.\end{aligned}$$

以ω表示函数$\varphi(t)$在区间$[\lambda_1,\lambda_2]$, $[\lambda_2,\lambda_3]$, $\cdots$, $[\lambda_{n-1},\lambda_n]$上的最大振幅，则可继续估计

$$\begin{aligned}\|J(\varphi)-\sigma\| &\leqslant\omega\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}\sum_{k=1}^{n-1}\bigvee_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}[(E_tx,y)]\\ &\leqslant\omega\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}\bigvee_{-\infty}^{+\infty}[(E_tx,y)]\leqslant 2\omega.\end{aligned}$$

如果$\delta=\max\limits_{k=1,2,\cdots,n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\to 0$, 则$\omega\to 0$, 从而$\lim\limits_{\delta\to 0}\sigma=J(\varphi)$.

根据上面的讨论，我们可记$J(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dE_t$.

利用上述证明，我们指出算子$J(\varphi)$的一些性质.

I. $[J(\varphi)]^*=J(\bar{\varphi})$.

II. 如果 $\varphi(t)=\alpha\varphi_1(t)+\beta\varphi_2(t)$, 则

$$J(\varphi)=\alpha J(\varphi_1)+\beta J(\varphi_2).$$

III. 如果 $\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$, 则

$$J(\varphi)=J(\varphi_1)J(\varphi_2)=J(\varphi_2)J(\varphi_1). \tag{20}$$

证明最后一个性质. 对于某个分划作积分和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\xi_k)[E_{\lambda_{k+1}}-E_{\lambda_k}],$$

$$\sigma'=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_1(\xi_k)[E_{\lambda_{k+1}}-E_{\lambda_k}],$$

$$\sigma''=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_2(\xi_k)[E_{\lambda_{k+1}}-E_{\lambda_k}].$$

因为当 $j<k$ 时 $\lambda_j<\lambda_{j+1}\leqslant\lambda_k<\lambda_{k+1}$, 所以

$$\begin{aligned}[E_{\lambda_{k+1}}-E_{\lambda_k}][E_{\lambda_{j+1}}-E_{\lambda_j}]&=E_{\lambda_{k+1}}E_{\lambda_{j+1}}-E_{\lambda_{k+1}}E_{\lambda_j}\\&\quad-E_{\lambda_k}E_{\lambda_{j+1}}+E_{\lambda_k}E_{\lambda_j}\\&=E_{\lambda_{j+1}}-E_{\lambda_j}-E_{\lambda_{j+1}}+E_{\lambda_j}=0.\end{aligned}$$

所以在乘积

$$\sigma'\sigma''=\sum_{j,k=1}^{n-1}\varphi_1(\xi_j)\varphi_2(\xi_k)[E_{\lambda_{j+1}}-E_{\lambda_j}][E_{\lambda_{k+1}}-E_{\lambda_k}]$$

中仅当 $j=k$ 时加项才异于零, 因此

$$\sigma'\sigma''=\sigma.$$

取极限得(20).

IV. 有估计式

$$\|J(\varphi)\|\leqslant\max_{t\in[m,M]}|\varphi(t)|. \tag{21}$$

事实上

$$\begin{aligned}\|J(\varphi)x\|^2&=(J(\varphi)x,J(\varphi)x)=(J(|\varphi|^2)x,x)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|^2d(E_tx,x).\end{aligned}$$

因为

$$(E_t x, x) = \begin{cases} 0, & t < m, \\ \|x\|^2, & t > M, \end{cases}$$

所以

$$\|J(\varphi)x\|^2 = \int_{m-\varepsilon}^{M+\varepsilon} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x) \leqslant \max_{t\in[m-\varepsilon, M+\varepsilon]} |\varphi(t)|^2 \|x\|^2.$$

由于这个不等式对于任何 $\varepsilon > 0$ 成立，所以取极限（注意到函数 $\varphi(t)$ 的连续性）可得

$$\|J(\varphi)x\|^2 \leqslant \max_{t\in[m,M]} |\varphi(t)|^2 \|x\|^2,$$

此式等价于(21)式.

V. 如果连续函数序列 $\{\varphi_n\}$ 在区间 $[m, M]$ 上一致收敛于函数 φ，则 $J(\varphi_n) \to J(\varphi)$.

算子积分 $J(\varphi)$ 的性质与算子函数的性质是一致的. 从下述定理看出，产生这种情况的原因是很明显的.

定理 6. 设 $\{E_\lambda\}$ 是单位分解，作为参数 λ 的函数它是右连续的，则 $\{E_\lambda\}$ 是算子

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t$$

的谱函数，并且

$$J(\varphi) = \varphi(U). \tag{22}$$

证. 利用性质 II, III 及 V 不难验证等式(22)成立.

特别地

$$U_\lambda^+ = \varphi_\lambda^+(U) = J(\varphi_\lambda^+),$$

从而

$$(U_\lambda^+ x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda^+(t) d(E_t x, x) = \int_\lambda^\infty (t-\lambda) d(E_t x, x). \tag{23}$$

如果 $I_\lambda x = x$，即如果 $U_\lambda^+ x = \mathbf{0}$，则

$$\int_{\lambda}^{\infty}(t-\lambda)d(E_t x, x)=0,$$

这只有当 $t>\lambda$

$$(E_t x, x)=\text{const}$$

时才可能. 从而

$$(E_t x, x)=(E_{\infty}x, x)=(x, x) \qquad (t>\lambda).$$

因此

$$E_t x=x \qquad (t>\lambda).$$

令 $t\to\lambda+0$ 取极限, 可得

$$E_{\lambda}x=E_{\lambda+0}x=x,$$

即 $I_{\lambda}\leqslant E_{\lambda}$.

反之, 如果 $E_{\lambda}x=x$, 则对于 $t>\lambda$ 更有 $E_t x=x$. 这时由等式(23)得

$$(U_{\lambda}^{+}x, x)=0.$$

从而

$$U_{\lambda}^{+}x=\mathbf{0}^{*)},$$

这表示 $I_{\lambda}x=x$. 于是, $I_{\lambda}\geqslant E_{\lambda}$, 再由前面的结果可知 $I_{\lambda}=E_{\lambda}$.

注. 如果单位分解不满足右连续性的要求, 则可以指出

$$I_{\lambda}=E_{\lambda+0}.$$

事实上, 在证明定理时实际上可得 $I_{\lambda}\leqslant E_{\lambda+0}$. 其次, 对不等式 $I_t\geqslant E_t$, 令 $t\to\lambda+0$ 取极限, 即得反向不等式

$$I_{\lambda}=I_{\lambda+0}\geqslant E_{\lambda+0}.$$

设 U 是自共轭紧算子, $\{\lambda_k\}$ 是其特征值全体. 和前面一样, 用 $\mathbf{H}_{\lambda_k}$ 表示特征子空间, 用 P_{λ_k} 表示到这个子空间上的投影算子, 引进算子

---

*) 参见 5.4 中的脚注.

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} P_{\lambda_k} \qquad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{24}$$

不难验证，族$\{E_\lambda\}$是右连续的单位分解，因而$\{E_\lambda\}$是算子

$$\tilde{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t$$

的谱函数．但直接验证可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k},$$

注意到前节的公式(3)，即知

$$\tilde{U} = U.$$

因此，投影算子(24)组成算子U的谱函数．算子U按公式(18)的积分表示与前节的公式(3)一致．

5.7. 积分表达式 (17) 对于进一步扩充算子函数的概念开辟了一条途径．考察这种函数$\varphi(t)$，使对于任何(x, y)，Lebesgue-Stieltjes 积分

$$J(\varphi; x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) d(I_t x, y)$$

存在(且有限)，其中$\{I_\lambda\}$是算子U的谱函数．和上面一样，可以指出，泛函$J(\varphi; x, y)$可以表示为

$$J(\varphi; x, y) = (J(\varphi)x, y) \qquad (x, y \in \mathbf{H}),$$

其中$J(\varphi)$是线性算子．注意到公式(22)，自然可令

$$\varphi(U) = J(\varphi).$$

换一种办法也可以扩充算子函数的概念．像按单调实函数定义可加集合函数一样，从谱函数出发可以定义算子测度．如果$\varphi(t)$是关于集合e的算子测度可测的特征函数，则$\varphi(U)$是在e上的算子测度的值．当$\varphi(t)$是有限个值的可测函数时，$\varphi(U)$的意义是很明显的．关于算子测度可测的函数是有限个值的可测函数序列的一致收敛的极限，从而可以对任意的可测函数$\varphi(t)$定义$\varphi(U)$．

第十章 有序赋范空间

在对于分析某些函数及序列的向量空间是很重要的那些具体的讨论中，正定，不等式，正算子等概念起着重要的作用．但是这些概念及其有关的一些结果，到目前为止在我们所研究的 Banach 赋范空间理论中却找不到任何反映，这就使得用泛函方法不可能掌握经典分析与实用分析中的某些重要问题．当时这就导致在 Л. В. Канторович 的工作中（参见[2—4a]）建立了线性半序空间的理论，或者称其为向量格，即以相容的向量和格的结构按确定方式作出的空间（1935—1937）．在这些工作中给出向量格的公理，建立了其中的线性算子理论，并给出了所述理论在函数论问题及泛函方程中的各种不同的应用．

以后，在列宁格勒半序空间学派的工作中，这个理论得到了富有成效的进展（Б. З. Вулих，А. Г. Пинскер，А. И. Юдин，Г П. Акилов 以及他们的学生 А. И. Векслер，Д. А. Владимиров，Г. Я. Роткович）．在这个泛函分析领域的一个重要部分的发展中有个重大的成就，那就是 Г. Я. Лозановский 引进的赋范格理论．

М. Г. Крейн 关于在其中引进正元锥的赋范空间的研究与向量格理论有密切的联系，这些工作从三十年代后半期开始而后由伏龙涅什学派继续发展（М. А. Красносельский 及其学生）．这些工作首先与算子谱论和解算子方程（非线性分析）联系起来了．本书不打算考察这些理论，读者可参考 Крейн 和 Рутман[1]的评论文章及 Красносельский-II 的书．关于向量格理论与 М. Г. Крейн 理论之间的联系可参见 Вулих-IV 的书．向量格理论还与拓扑半域理论有联系（参见 Антоновский，Болтянский 和 Сарымсаков）．

F. Riesz[4]于 1929 年在 Bologna 数学会议上作的关于泛函格的报告，在向量格理论的发展中有很大影响．在四十年代，日本数学家 H. Nakano 继续前期的研究，建立了半序空间的系统理论，它还包含了许多新的研究方向（参见 Nakano）．在向量格理论的发展中起重要作用的还有另一些日本数学家（T. Ogasavara, I. Amemiya, T. Ando, K. Yosida, S. Kakutani, T.

Shimogaki), 美国数学家(G. Birkhoff, S. Bochner, M. Stone 等), 荷兰数学家(H. Freudenthal, W. Luxemburg, A. Zaanen)及法国数学家(J. Dieudonné)等.

在这一章中, 我们要考察赋范格, 即赋范空间的向量格, 其中的范数和序按自然方式联系着.

我们指出, 已讨论过的理想空间是最重要的一类向量格. 然而, 甚至只须注意到在理想空间中的应用, 抽象的过程就能得到新的有趣的结果 (见 §5).

为了叙述赋范格理论所包含的材料, 需要向量格一般理论的很多纯代数结果, 我们简洁地叙述这些结果而不予证明, 读者可在 Вулих-I 的书中找到证明. 在本章中所叙述的在赋范格方面的结果实质上是 Вулих-I 一书的补充. 向量格理论的基础参考书是: Канторович, Вулих 和 Пинскер; Вулих-I; Nakano; Luxemburg 和 Zaanen; Fremlin; Schäffer-II 等. Luxemburg [1]及 Luxemburg 和 Zaanen [1]的文章具有基础评述的特点, 很多地方都讨论了赋范格理论. 在 §§1—4 中叙述的大部分结果都是人们熟知的, 并且在我们建议引用的文献中都有反映.

我们指出, 向量格理论的发展要求部分地改变在 Вулих-I 的书中所采用的术语和记号. 所作的改变将在下面一一约定.

§1. 向 量 格

1.1. 实向量空间 $\mathbf{X}$ 叫做向量格*⁾, 如果 $\mathbf{X}$ 同时是个格, 即是这样的有序集, 对其中任何两个元素 $x, y\in\mathbf{X}$ 存在它们的上确界 $x\vee y$ 和下确界 $x\wedge y$, 并且满足下列代数运算与序相容的条件:

1) 对于任意 $z\in\mathbf{X}$, 从 $x\leqslant y$ 可推出 $x+z\leqslant y+z$;

2) 如果 $x\geqslant\mathbf{0}$ 而数 $\lambda\geqslant 0$, 则 $\lambda x\geqslant\mathbf{0}$.

集合 $\mathbf{X}_+=\{x\in\mathbf{X}: x\geqslant\mathbf{0}\}$ 叫做向量格 $\mathbf{X}$ 的正元锥. 显然, 在向量格中, 其元素的任何有限集合存在上确界与下确界.

对于任何 $x\in\mathbf{X}$, 元素 $x_+=x\vee\mathbf{0}$ 叫做它的正部, 元素 $x_-=(-x)\vee\mathbf{0}=$

---

*) 在 Вулих-I 的书中称向量格为 K-线集或者线性结构, 在 Bourbaki-IV 及 Luxemburg 和 Zaanen 的书中称为 Riesz 空间. 向量格(vector-lattice) 的术语是 Birkhoff 引进的.

$(-x)_+$ 叫做它的负部，而元素 $|x|=x_++x_-$ 叫做元素 x 的模．对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 等式 $x=x_+-x_-$ 成立．

向量格 $\mathbf{X}$ 中的有序区间（或简称区间）是形式为 $[x_1, x_2]=\{x\in\mathbf{X}: x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$ 的任何集合，其中 $x_1\leqslant x_2(x_1, x_2\in\mathbf{X})$．

设 x、y 是向量格 $\mathbf{X}$ 中的两个元素，如果 $|x|\wedge|y|=0$，则称它们是离析的（记为 x d y）．设 $E_1, E_2\subset\mathbf{X}$，如果任何元素 $x\in E_1$ 与任何元素 $y\in E_2$ 是离析的，则称这两个集合是离析的（E_1 d E_2）．最后，若 $x\in\mathbf{X}$，对于任何元素 $y\in E\subset\mathbf{X}$ 都有 x d y，则称元素 x 与集合 E 是离析的（x d E）．如果 E 是向量格 $\mathbf{X}$ 中的任意的集合，则由与集合 E 离析的所有元素 $x\in\mathbf{X}$ 所组成的集合 E^{d} 叫做集合 E 的离析余集．此外，令 $E^{\mathrm{dd}}=(E^{\mathrm{d}})^{\mathrm{d}}$．容易看出，对于任意 E，$(E^{\mathrm{d}})^{\mathrm{dd}}=E^{\mathrm{d}}$．

如果 $E_1{}^{\mathrm{dd}}\supset E_2{}^{\mathrm{dd}}(E_1, E_2\subset\mathbf{X})$，则称集 E_1 比集 E_2 广；如果 $E_1{}^{\mathrm{dd}}=E_2{}^{\mathrm{dd}}$，则称 E_1 与 E_2 同样广．元素 $x\in\mathbf{X}_+$ 称为（弱）单位元，如果 $\{x\}^{\mathrm{dd}}=\mathbf{X}$．

设 E 是向量格 $\mathbf{X}$ 的子集．如果从 $x\in\mathbf{X}$, $y\in E$, $|x|\leqslant|y|$ 可推出 $x\in E$，则称 E 是实心的（实心体的）．如果 E 是 $\mathbf{X}$ 中任意的子集，则包含 E 的最小实心集合叫做 E 的实心包，并且记为 $\mathrm{sol}(E)$．容易看出，$\mathrm{sol}(E)$ 是所有这样的元素 $x\in\mathbf{X}$ 的集合，即存在 $y\in E$，使得 $|x|\leqslant|y|$．

1.2. 向量格 $\mathbf{X}$ 的线性子集 $\mathbf{Y}$ 叫做 $\mathbf{X}$ 中的向量子格*)，如果对于任何 y_1, $y_2\in\mathbf{Y}$ 有 $y_1\vee y_2, y_1\wedge y_2\in\mathbf{Y}$．向量格 $\mathbf{X}$ 的线性实心子集 $\mathbf{Y}$ 叫做理想**)．向量格 $\mathbf{X}$ 的理想 $\mathbf{Y}$ 叫做基，如果 $\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{X}$ 一样广，即 $\mathbf{Y}^{\mathrm{d}}=\{0\}$．

如果 $u\in\mathbf{X}_+$，则 $\mathbf{X}$ 中的包含 u 的最小理想叫做 $\mathbf{X}$ 中的主理想或者 u-理想，并记为 $\mathbf{X}(u)$．容易看出，$\mathbf{X}(u)$ 由所有这样的 $x\in\mathbf{X}$ 组成，使得对于某个 λ，$0\leqslant\lambda<+\infty$，有 $|x|\leqslant\lambda u$．

如果对于某个 $u\in\mathbf{X}_+$，向量格 $\mathbf{X}$ 与主理想 $\mathbf{X}(u)$ 重合，则 $\mathbf{X}$ 叫做有界元素的向量格***)，而元素 u 叫做（$\mathbf{X}$ 中的）强单位元．

如果集合 $\mathbf{Y}\subset\mathbf{X}$ 是某个集合 $E\subset\mathbf{X}$ 的离析余集，则称 $\mathbf{Y}$ 是向量格 $\mathbf{X}$ 中的带****)；换言之，称集合 $\mathbf{Y}\subset\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的带，如果 $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}^{\mathrm{dd}}$．

---

*) 在 Вулих-I 中叫做线性子结构．

**) 在 Вулих-I 中叫做正规子空间或正规线性子集．

***) 在 Вулих-I 中叫做有界元素的 K-线性集．

****) 在 Вулих-I 中叫做分支．

我们约定，称向量格 $\mathbf{X}$ 是阿基米德型的，对于如果 $x\in\mathbf{X}_+$ 及任意 $n\in\boldsymbol{N}$ 有 $nx\leqslant y\in\mathbf{X}$，便能推出 $x=0$. 泛函分析所感兴趣的所有向量格都是阿基米德型的.

如果 $\mathbf{X}$ 是阿基米德向量格，则集合 $\mathbf{Y}\subset\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的带的充要条件为 $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的理想，并且满足下列条件(所谓正则性条件)：如果 $E\subset\mathbf{Y}$ 且在 $\mathbf{X}$ 中存在 $\sup E(\inf E)$，则 $\sup E\in\mathbf{Y}(\inf E\in\mathbf{Y})$.

1.3. 向量格 $\mathbf{X}$ 叫做 K_σ-空间(或者 σ-完备向量格)，如果其中的任何可数的上有界集合都有上确界. 向量格 $\mathbf{X}$ 叫做 K-空间(或者完备向量格)，如果其中的任何上有界集合都有上确界. 容易看出(与定理 I.6.17 推论 1 的证明对照)，在 K_σ-空间中任意可数的下有界集合，而在 K-空间中任意下有界集合都有下确界. K_σ-空间是阿基米德向量格. 在 K_σ-空间或 K-空间中的理想是 K_σ-空间或 K-空间.

在 K-空间 $\mathbf{X}$ 中，带的重要性质是可将 $\mathbf{X}$ 用典型的方式投影到带上. 设 $\mathbf{Y}$ 是 K-空间 $\mathbf{X}$ 中的带，$x\in\mathbf{X}_+$. 令

$$[\mathbf{Y}]x=\sup\{y\in\mathbf{Y}_+:y\leqslant x\}.$$

根据 K-空间的定义在 $\mathbf{X}$ 中存在这个上确界，而由正则性条件 $[\mathbf{Y}]x\in\mathbf{Y}$. 对于任意的 $x\in\mathbf{X}$，令

$$[\mathbf{Y}]x=[\mathbf{Y}]x_+-[\mathbf{Y}]x_-.$$

显然，$[\mathbf{Y}]$ 是将 $\mathbf{X}$ 映射到 $\mathbf{Y}$ 上的线性算子，并使 $\mathbf{Y}$ 中的元素在其作用下保持不动. 容易看出

$$|[\mathbf{Y}]x|\leqslant|x| \quad \text{且} \quad |[\mathbf{Y}]x|=[\mathbf{Y}](|x|) \qquad (x\in\mathbf{X}).$$

算子 $[\mathbf{Y}]$ 叫做到带 $\mathbf{Y}$ 上的投影算子. 任何元素 $x\in\mathbf{X}$ 可唯一地表示为 $x=y+z$，其中 $y\in\mathbf{Y}$，$z\in\mathbf{Y}^d$，并且 $y=[\mathbf{Y}]x$，$z=[\mathbf{Y}^d]x$ (参见 Вулих-I 定理 IV.3.2).

对于任意的集合 $E\subset\mathbf{X}$，以 $[E]$ 表示到由集合 E 生成的带 E^{dd} 上的投影算子 $[E^{dd}]$. 如果 $u\in\mathbf{X}$，则在 $\mathbf{X}$ 中包含 u 的最小的带 $\{u\}^{dd}$ 叫做主带，并且记为 $\mathbf{X}_u$. 与上面引进的记号相对应，用 $[u]$ 表示到 $\mathbf{X}_u$ 上的投影.

向量格 $\mathbf{X}$ 叫做可数型向量格，如果非零的两两离析元素的任何有界族至多是可数的. 可数型向量格类的方便在于：任何界都可在某个可数集上实现. 确切地说，阿基米德向量格 $\mathbf{X}$ 是可数型向量格的充要条件是：

(*) 对于任何存在 $\sup E$ 的集合 $E\subset\mathbf{X}$，可找到一个不多于可数的子集 $E_0\subset E$，使得 $\sup E_0=\sup E$；或者在(*)中用 inf 代替 sup 而得到的类似的

条件.

我们引进下面的记号. 设$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$是向量格 **X** 中的有向列. 记号 $x_\alpha\uparrow$ 表示, 对于 $\alpha\geqslant\alpha'$ 的任何 $\alpha,\alpha'\in A$ 有 $x_\alpha\geqslant x_{\alpha'}$. 记号 $x_\alpha\uparrow x$ 表示 $x_\alpha\uparrow$ 且 $\sup x_\alpha=x$. 类似地定义 $x_\alpha\downarrow$ 及 $x_\alpha\downarrow x$.

研究阿基米德向量格常常能转化为研究 K-完备后的 K-空间. 对于任意阿基米德向量格 **X**, 可以找到唯一的 K-空间 k**X**, 称其为 **X** 的 K-完备化空间, 它具有下列性质:

1) **X** 是 k**X** 中的向量子格;

2) 如果 $E\subset$ **X** 且在 **X** 中存在 $x=\sup E$, 则这个元素 x 也是 E 在 k**X** 中的上确界;

3) 对于任何 $\hat{x}\in k$**X** 存在 **X** 中的有向列$\{y_\alpha\}$及$\{y'_\beta\}$, 使得 $y_\alpha\uparrow\hat{x}$, $y'_\beta\downarrow\hat{x}$.

K-完备化可以用类似于建立实数时采用的 Dedekind 分割的方法得到(参见 Вулих-I 定理 IV. 11. 1).

1. 4. 在向量格 **X** 中我们考察两种类型的收敛.

有向列$\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$ 叫做 (o)-收敛于极限 $x\in$ **X** ($x_\alpha\xrightarrow{(o)}x$ 或者 $x=(o)\text{-}\lim x_\alpha$), 如果存在有向列$\{y_\beta\}$ $(\beta\in B)$, 使得

1) $y_\beta\downarrow\mathbf{0}$;

2) 对于任何 $\beta\in B$ 存在 $\alpha_0\in A$, 使得对于一切的$\alpha\geqslant\alpha_0$ 都有$|x_\alpha-x|\leqslant y_\beta$.

在序列$\{x_n\}$的情形, 我们使用另一种序收敛定义. 序列叫做$(o\sigma)$-收敛于极限 $x\in$ **X** ($x_n\xrightarrow{(o\sigma)}x$ 或者 $x=(o\sigma)\text{-}\lim x_n$), 如果存在序列$\{y_n\}$, 使得

1) $y_n\downarrow\mathbf{0}$;

2) $|x_n-x|\leqslant y_n$, $n\in\boldsymbol{N}$.

如果 **X** 是 K_σ-空间或可数型阿基米德向量格, 则对于序列, 两种收敛的定义是一致的. 在一般情况下并不一致.

设 **X** 是向量格, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset$ **X**. 我们说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ (o)-收敛于 $x\left(\text{记为}x=(o)\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\right)$, 如果它的部分和序列$(o)$-收敛于 x. 类似地定义级数的$(o\sigma)$-收敛.

如果 **X** 是可数型阿基米德向量格, 并且有向列 $x_\alpha\xrightarrow{(o)}x$ $(\alpha\in A)$, 则存在递增指标序列 $\alpha_n\in A$ $(n\in\boldsymbol{N})$, 使得 $x_{\alpha_n}\xrightarrow{(o\sigma)}x$.

我们指出，在向量格中，格运算与线性运算关于序收敛是连续的.

设 $\mathbf{X}$ 是阿基米德向量格. 序列$\{x_n\}$叫做(r)-收敛于极限 $x\in\mathbf{X}$ $(x_n\xrightarrow{(r)}x)$，如果存在元素 $z\in\mathbf{X}_+$(称做收敛的控制元)，使得 $|x-x_n|\leqslant\varepsilon_n z$ $(n\in\boldsymbol{N})$，其中 $\varepsilon_n\in(0,+\infty)$且 $\varepsilon_n\to0$. 序列$\{x_n\}$ 叫做(r)-基本的，如果存在 $z\in\mathbf{X}_+$ 及数列 $\varepsilon_n\downarrow0$，使得当 $m\geqslant n$ 时 $|x_n-x_m|\leqslant\varepsilon_n z$. 从$(r)$-收敛可以推出$(o\sigma)$-收敛. 阿基米德向量格 $\mathbf{X}$ 叫做(r)-完备的，如果其元素的任何(r)-基本序列都(r)-收敛. 任意 K_σ-空间都是(r)-完备的(Вулих-I，引理 V.3.1).

1.5. 研究向量格的重要工具是关于它在连续函数空间的形式下的实现的定理.

设 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是向量格. 从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的线性映射U叫做格同态，如果对于任何 $x_1,x_2\in\mathbf{X}$ 有

$$U(x_1\vee x_2)=U(x_1)\vee U(x_2).$$

显然，在这种情况下，公式 $U(x_1\wedge x_2)=U(x_1)\wedge U(x_2)$ 及 $|U(x)|=U(|x|)$也成立. 特别地，如果 $x\geqslant0$，则 $U(x)\geqslant0$.

我们称U是保界的，如果从在 $\mathbf{X}$ 中集E存在上确界能推出在 $\mathbf{Y}$ 中集 $U(E)$存在上确界，并且

$$\sup U(E)=U(\sup E).$$

此时，对于下确界类似的公式成立.

从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 上的双方单值的格同态U叫做格同构或序同构. 如果U是格同构，则映射U和U^{-1}都是保界的. 称两个向量格 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是序同构的，如果存在 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 上的格同构. 显然，映射 U: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 是格同构的充要条件为U是向量空间 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的同构，并且 $U(\mathbf{X}_+)=\mathbf{Y}_+$.

紧空间Q叫做极不连通的，如果Q中任何开集的闭包都是开-闭集. 可以证明，连续函数向量格 $\mathbf{C}(K)$是 K-空间的充要条件为紧空间K是极不连通的(参见 Вулих-I).

其次，设Q是极不连通紧空间. 用 $\mathbf{C}_\infty(Q)$ 表示在Q上所有扩充的实连续函数集合，即这种函数在无处稠密集合上可以取值为 $+\infty$ 和 $-\infty$. 空间 $\mathbf{C}_\infty(Q)$按自然的方式成为向量空间. 事实上，可以证明，对于 x_1, $x_2\in\mathbf{C}_\infty(Q)$，当 $t\in Q$ 使得 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$是有限的时，令 $y(t)=x_1(t)+x_2(t)$，则函数 y 可以唯一的延拓成 $\mathbf{C}_\infty(Q)$中的元素，就把它作为和 x_1+x_2. 在定义与数相乘时并不产生困难. 对于所有 $t\in Q$，如果 $x_1(t)\geqslant x_2(t)$，就令 $x_1\geqslant x_2$，这样在

$\mathbf{C}_\infty(Q)$中便引进了序. 这时 $\mathbf{C}_\infty(Q)$就成为 K-空间(Вулих-I, 定理 V.2.2). 下面的定理起着极重要的作用(参见 Вулих-I, 定理 V.4.2).

定理 1. 任何 K-空间 $\mathbf{X}$ 都序同构于在适当的极不连通紧空间 Q*) 上建立的 K-空间 $\mathbf{C}_\infty(Q)$ 的某个基. 如果 E 是 $\mathbf{X}$ 中两两离析的正元素的确定的集合, 则这个同构可这样选取, 使得它把 E 中的元素变换为 Q 中开-闭集上的特征函数.

因为可以使阿基米德向量格 K-完备化, 而根据定理 1, K-完备化空间可以实现为函数的 K-空间, 其中对于有限个元素的线性运算和格的运算可以逐点计算. 这样我们便得到方便的 А. И. Юдин 的关系保持原理. 假如我们有两个关系式 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $v(x_1, \cdots, x_n)$, 它们由有限个线性运算和格运算组成, 其中所有变量 $x_1, \cdots, x_n$ 可以在任意的向量格中取值. 这时在阿基米德向量格 $\mathbf{X}$ 中对任何自变量值不等式 $u \geqslant v$ 成立的充要条件为不等式 $u \geqslant v$ 在 $x_1, \cdots, x_n$ 取任意的实数值时成立(这个原理对无限的情况不成立!). 我们指出, 用其他方法也可以证明关系保持原理在任意的向量格中成立. 从下述例子中读者可以看到上述原理是很方便的: 要证明对于任何 $x, y, z \in \mathbf{X}$ 不等式

$$|(x \vee z)-(y \vee z)| \leqslant |x-y|, \quad |(x \wedge z)-(y \wedge z)| \leqslant |x-y|$$

成立, 只要用一次这个原理, 另外根据向量格的定义即可.

我们现在来刻划那样的 K-空间 $\mathbf{X}$, 它根据定理 1 实现时给出了整个 K-空间 $\mathbf{C}_\infty(Q)$. K-空间$\mathbf{W}$叫做扩张的, 如果在其中的两两离析元素的任何集合都有上确界. K-空间 $\mathbf{C}_\infty(Q)$是扩张的, 反之任何扩张的 K-空间在定理 1 中的同构下与整个 $\mathbf{C}_\infty(Q)$同构. 如果K-空间 $\mathbf{X}$ 序同构于某个扩张 K-空间 $\mathbf{W}$的基, 则$\mathbf{W}$叫做 K-空间 $\mathbf{X}$ 的极大扩张并且记为$\mathfrak{M}(\mathbf{X})$. 这个空间精确到序同构是唯一的. 极大扩张的存在由定理 1 保证.

现今向量格实现的途径可在 Векслер[1]的文章中见到.

1.6. 我们用已经了解一点的理想空间的例子来说明上面引进的概念.

首先, 我们扩充理想空间的概念, 保留以前的定义, 但是放弃测度为 σ-有限的条件, 而代之以较弱的直和性质(I.6.10). 从定理 I.6.17 推出, 实空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$是 K-空间, 并且用 $x \wedge y, x \vee y, |x|, x_+, x_-$ 表示的元素在 IV.3.1 中和在 1.1 中是一致的. 理想空间是 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$中的理想. 基本空间是 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中的基; 它们就是由此而得名的. 集合 E_1 广于 E_2, 如果

*) 如果把同胚的紧空间看作是同一个, 则上述紧空间还是唯一的.

$\operatorname{supp}E_1\supset\operatorname{supp}E_2(\operatorname{mod}\mu)$. 理想空间 $\mathbf{X}$ 中的单位就是这样的函数 $x\in\mathbf{X}$, 使得 $x(t)>0$ a.e.所有可测的有限个值的函数的集合是 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中的不是理想、但是向量子格的例子. 显然, $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$是 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$中的 u-理想, 其中 $u(t)\equiv1$. 基本空间 $\mathbf{X}$ 中的带集与Σ中的元素($\operatorname{mod}\mu$ 相等的集合是同一的)之间存在双方单值的对应. 这时 $A\in\Sigma$ 对应于带 $\mathbf{X}_A=\{x\in\mathbf{X}:\operatorname{supp}x\subset A(\operatorname{mod}\mu)\}$. 到带 $\mathbf{X}_A$ 上的投影算子$[\mathbf{X}_A]$ 是乘以集 A 上的特征函数的算子: $[\mathbf{X}_A]x=x\chi_A$.

容易验证, K-空间 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$是可数型 K-空间的充要条件为测度 μ 是 σ-有限的. 由于这个原因, 在以前我们研究理想空间时可以只处理序列.

如果 $\mathbf{X}$ 是理想空间, 则在 $\mathbf{X}$ 中 $x_n\xrightarrow{(o)}x$ 的充要条件为 $x_n(t)\to x(t)$a.e. 且 $|x_n|\leqslant y\in\mathbf{X}$ $(n\in\boldsymbol{N})$. 我们已经遇到过这种形式的收敛 (参见 VI.1.1). 在 $\mathbf{S}(0,1)$的情况, 定理 1 中的极不连通紧空间Q按其拓扑性质与紧空间 $[0,1]$ 有很大差异, 但是即使在此情况下, 定理 1 的实现常常成为新结果的源泉*). 最后指出, $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$是扩张的 K-空间, 是(T,Σ,μ)上的任何基本空间的极大扩张.

1.7. 我们对理想空间证明的结果常常可以搬到抽象的向量格上去. 可是, 应该说, 理想空间的理论比向量格的一般理论建立得还迟. 其次, 我们需要引理 IV.3.1 的下述推广.

引理 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是阿基米德向量格, 而 $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的基, 则对于任意 $x\in\mathbf{X}_+$ 可以找到有向列 $y_\alpha\uparrow x$, $0\leqslant y_\alpha\in\mathbf{Y}$.

证. 首先指出, 只要证明对于任何 $x\in\mathbf{X}_+$ 有

$$x=\sup\{y\in\mathbf{Y}:\ 0\leqslant y\leqslant x\}. \tag{1}$$

因为 $\mathbf{Y}$ 中任何两个元素的上确界也属于 $\mathbf{Y}$, 所以带着从 $\mathbf{X}$ 中诱导的序的集合 $A=\{y\in\mathbf{Y}:\ 0\leqslant y\leqslant x\}$ 是按递增有向的. 因此如果将每个元素 $y\in A$ 的指标就看做是它自己, 则A是递增有向列, 并且 $y\uparrow x$ $(y\in A)$.

假设对于某个 $x\in\mathbf{X}_+$ 公式(1)不成立. 这时存在 $y_0\in\mathbf{X}$, 使得 $y\leqslant y_0$ 对于任何 $y\in A$ 都成立, 但是 $x\leqslant y_0$ 不成立. 对于 $y_1=x\wedge y_0$ 可得, 对于所有 $y\in A$, $y\leqslant y_1$ 且 $y_1<x$. 因为 $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的基, 所以对于 $x-y_1>0$ 可找到 $z_0\in\mathbf{Y}$, 使得 $(x-y_1)\wedge z_0>0$. 对于 $z_1=(x-y_1)\wedge z_0\in\mathbf{Y}$ 有 $0<z_1\leqslant x-y_1$. 从而对于任何

---

*) 我们指出, 在这种情况下, 紧集 Q 是 Banach 代数 $\mathbf{L}^\infty(0,1)$ 的 Гельфанд 紧集(参见 Наймарк).

$y\in A$ 推得 $y+z_1\leqslant x-y_1+y\leqslant x$. 因为 $y+z_1\in \mathbf{Y}$, 所以根据归纳法有 $y+nz_1\leqslant x$ $(n\in \boldsymbol{N})$, 这与阿基米德原则矛盾.

§2. 线性算子与线性泛函

2.1. 设 $\mathbf{X}$ 是向量格, $\mathbf{Y}$ 是 K-空间. 在这一章中我们只考察线性算子和线性泛函, 所以在所有下面的定义中省略"线性"一词.

算子 $U:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 叫做正的, 如果对于任何 $x\geqslant 0$ 都有 $U(x)\geqslant 0$. 算子 U 叫做正则的, 如果 $U=U_1-U_2$, 其中 $U_i(i=1,2)$ 是正线性算子. 从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的所有正则算子的集合记为 $L^{\sim}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

定理 1. 线性算子 U: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ 正则的必要充分条件是任何有界集 $E\subset\mathbf{X}$ 的象 $U(E)$ 是 $\mathbf{Y}$ 中的有界集.

满足定理 1 判别条件的算子叫做序有界算子*). 定理 1 断定, 如果 $\mathbf{Y}$ 是 K-空间, 则正则算子类与 (o)-有界算子类重合. 在一般情况下这个结论不成立.

在集合 $L^{\sim}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 中我们用下列方式引进序: 如果 U 是正算子则 $U\geqslant 0$; 如果 $U_1-U_2\geqslant 0$, 则 $U_1\geqslant U_2$. 下面的事实特别重要: 这样定义序之后, 集合 $L^{\sim}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 是 K-空间 (Вулих-I, 定理 VIII.2.1). 并且, 如果 $\{U_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ 是上有界的算子集合, 则算子 $U=\sup U_\xi$ 对每个 $x\in\mathbf{X}_+$ 用下式来计算:

$$U(x)=\sup\{U_{\xi_1}(x_1)+\cdots+U_{\xi_n}(x_n):\ x=\sum_{i=1}^{n}x_i,\ x_i\geqslant 0,\ \xi_i\in\Xi\,(1\leqslant i\leqslant n)\}. \quad (1)$$

类似地计算下确界. 从(1)式不难得到, 如果 $U\in L^{\sim}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, 则对于 $x\in\mathbf{X}_+$ 有

$$U_+(x)=\sup\{U(x'):0\leqslant x'\leqslant x\},$$
$$U_-(x)=-\inf\{U(x'):0\leqslant x'\leqslant x\},$$
$$|U|(x)=\sup\{|U(x')|:|x'|\leqslant x\}.$$

由此推出, 对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 有

$$|U(x)|\leqslant|U|(|x|). \quad (2)$$

从公式(1)推出, 如果 U_α, $U\in L^{\sim}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ 且 $U_\alpha\xrightarrow{(o)}U$, 则对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 有 $U_\alpha(x)\xrightarrow{(o)}U(x)$ (反过来不成立).

再引进一些算子类.

---

*) 象前面一样, "序"这个词简记为(o), 例如(o)-有界算子.

算子 $U\in L^{\sim}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 叫做序连续的*) 或者正规的，如果从有向列 $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ 可推出 $U(x_\alpha)\xrightarrow{(o)} U(x)$. 所有$(o)$-连续算子的集合$L^{\sim}_n(\mathbf{X},\mathbf{Y})$是$K$-空间 $L^{\sim}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 的带.

算子 $U\in L^{\sim}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 叫做序 σ-连续的**)，如果从序列 $x_n \xrightarrow{(o\sigma)} x$，可推出 $U(x_n)\xrightarrow{(o)} U(x)$. 所有$(o\sigma)$-连续算子的集合 $L^{\sim}_{\sigma}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ 也是 $L^{\sim}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ 中的带. 显然，$L^{\sim}_n(\mathbf{X},\mathbf{Y})\subset L^{\sim}_{n\sigma}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$. 这些事实的证明参见 Вулих-I，第八章 §§ 3, 4.

2.2. 现在我们较详细地考察泛函的情况，即 $\mathbf{Y}=\mathbf{R}^1$ 的情况. 这时记

$$\mathbf{X}^{\sim}=L^{\sim}(\mathbf{X},\mathbf{R}^1),\quad \mathbf{X}^{\sim}_n=L^{\sim}_n(\mathbf{X},\mathbf{R}^1),\quad \mathbf{X}^{\sim}_{n\sigma}=L^{\sim}_{n\sigma}(\mathbf{X},\mathbf{R}^1).$$

我们指出，若设 f 是阿基米德向量格 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函，如果由 $x_n \xrightarrow{(o\sigma)} x$ 能推出 $f(x_n)\to f(x)$，则 $f\in\mathbf{X}^{\sim}_{n\sigma}$，它化简了$(o)$-连续性的验证. K-空间 $\mathbf{X}^{\sim}_n$叫做 $\mathbf{X}$ 的(o)-共轭空间. 如果 $\mathbf{X}$ 是可数型的 K-空间，则根据 1.4，$\mathbf{X}^{\sim}_n=\mathbf{X}^{\sim}_{n\sigma}$.

泛函 $f\in\mathbf{X}^{\sim}$ 叫做奇异的***)，如果在 $\mathbf{X}$ 中存在基 G，使得 f 在G上为零. 容易验证，全部奇异泛函的集合 $\mathbf{X}^{\sim}_s$ 是 $\mathbf{X}^{\sim}$ 中的理想.

引理 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是阿基米德向量格，则 $\mathbf{X}^{\sim}_s\subset(\mathbf{X}^{\sim}_n)^d$.

证. 假如不然，则存在泛函 $f\in\mathbf{X}^{\sim}_s$，使得对于某个 $g\in\mathbf{X}^{\sim}_n$ 有$|f|\wedge|g|>0$. 因为$\mathbf{X}^{\sim}_s$ 和 $\mathbf{X}^{\sim}_n$ 都是理想，所以$f_1=|f|\wedge|g|\in\mathbf{X}^{\sim}_s\cap\mathbf{X}^{\sim}_n$. 根据奇异泛函的定义，在 $\mathbf{X}$ 中存在基 $\mathbf{Y}$，使得 f_1 在 $\mathbf{Y}$ 上为零. 按引理 1.1，对于任何 $x\in\mathbf{X}_+$ 存在有向列 $x_\alpha\uparrow x$，$0\leqslant x_\alpha\in\mathbf{Y}$. 因为 $f_1\in\mathbf{X}^{\sim}_n$，所以 $f_1(x)=\lim f_1(x_\alpha)=0$. 于是 $f_1=0$，这与 $f_1>0$ 矛盾.

下面我们将证明，等式 $\mathbf{X}^{\sim}_s=(\mathbf{X}^{\sim}_n)^d$ 常常成立.

2.3. 现在我们推导与从向量格 $\mathbf{X}$ 到二次 (o)-共轭空间的典型嵌入有关的一些结果.

设 $\mathbf{X}$ 是向量格，$\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}^{\sim}$ 中的理想，并在 $\mathbf{X}$ 上是全的. 用 π 表示从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}^{\sim}$ 内的典型嵌入. 首先指出，$\pi(\mathbf{X})\subset\mathbf{Y}^{\sim}_n$. 事实上，如果 $x\in\mathbf{X}$ 且在 K-空间 $\mathbf{Y}$ 中 $f_\alpha\xrightarrow{(o)}0$，则在 $\widetilde{X}$ 中 $f_\alpha\xrightarrow{(o)}0$. 由此推出

$$\pi(x)(f_\alpha)=f_\alpha(x)\to 0,$$

这就证明了 $\pi(x)\in\mathbf{Y}^{\sim}_n$.

---

*) 在 Вулих-I 中叫做全线性算子.

**) 在 Вулих-I 中叫做(o)-线性算子.

***) 在 Вулих-I 中叫做反正规泛函.

定理 2. 1) 映射 π 是向量格 $\mathbf{X}$ 到 K-空间 $\mathbf{Y}_n^{\sim}$ 的向量子格上的格同态.

2) 映射 π 保界的充要条件为 $\mathbf{Y}\subset\mathbf{X}_n^{\sim}$.

3) 向量子格 $\pi(x)$ 是 $\mathbf{Y}^{\sim}$ 中理想的充要条件为 $\mathbf{Y}\subset\mathbf{X}_n^{\sim}$ 且 $\mathbf{X}$ 是 K-空间.

证. 在 Вулих-I 的定理 IX.5.1 的证明中包含了 1)(还可参见 Schäffer-I, V.1.6). 若 $\mathbf{Y}\subset\mathbf{X}_n^{\sim}$, 则 π 保界且 $\pi(\mathbf{X})$ 是理想, 这一事实的证明见 Вулих-I 的引理 IX.5.1. 2) 的必要性显然成立. 而 3) 的证明与 Вулих-I 的定理 IX.7.2 的证明类似.

还要指出, 根据 Вулих-I 中引理 IX.5.1 的证明. 集合 $\pi(\mathbf{X})$ 与 $\mathbf{Y}_n^{\sim}$ 总是同样广的.

推论 1. 如果元素 $x\in\mathbf{X}$ 使对于任何 $f\in\mathbf{Y}_+$ 有 $f(x)\geqslant 0$, 则 $x\geqslant\mathbf{0}$.

推论 2. 如果在 $\mathbf{X}$ 中 $x_\alpha\downarrow$ 且 $x_\alpha\to x(\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$, 则 $x_\alpha\downarrow x$.

证. 如果 $\alpha'\geqslant\alpha$, 则对于任意 $f\in\mathbf{Y}_+$, $f(x_\alpha-x_{\alpha'})\geqslant 0$, 再对 α' 取极限得 $f(x_\alpha-x)\geqslant 0$. 根据推论 1, 对于所有 α, $x_\alpha\geqslant x$. 另一方面, 如果对于所有 α, $y\leqslant x_\alpha$, 则对于 $f\in\mathbf{Y}_+$ 有 $f(y)\leqslant f(x_\alpha)\to f(x)$, 再根据推论 1 得 $x\geqslant y$. 因此 $x_\alpha\downarrow x$.

设 $\mathbf{X}$ 是具有全的 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 的 K-空间, $\kappa:\mathbf{X}\to(\mathbf{X}_n^{\sim})_n^{\sim}$ 是典型嵌入. 如果 $\kappa(\mathbf{X})=(\mathbf{X}_n^{\sim})_n^{\sim}$, 则称 $\mathbf{X}$ 是 (o)-自反的.

定理 3. 设 $\mathbf{X}$ 是具有全的 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 的 K-空间, 则下列命题等价:

1) $\mathbf{X}$ 是 (o)-自反的;

2) $\kappa(\mathbf{X})$ 是 $(\mathbf{X}_n^{\sim})_n^{\sim}$ 中的带;

3) 如果在 $\mathbf{X}$ 中的有向列 $\mathbf{0}\leqslant x_\alpha\uparrow$, 使得对于任何 $f\in\mathbf{X}_n^{\sim}$, $f\geqslant\mathbf{0}$, 有 $\sup f(x_\alpha)<+\infty$, 则可求得 $x\in\mathbf{X}$ 使得 $x_\alpha\uparrow x$.

1)$\Leftrightarrow$3), 在 Вулих-I 的定理 IX.6.1 中已证明了. 1)$\Rightarrow$2) 显然成立. 2)$\Rightarrow$1) 是因为在定理 2 之后已指出了, $\kappa(\mathbf{X})$ 是 $(\mathbf{X}_n^{\sim})_n^{\sim}$ 中的基.

推论. 如果 $\mathbf{X}$ 是向量格, $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}^{\sim}$ 中的带, 则 $\mathbf{Y}$ 是 (o)-自反的.

证. 显然, 集合 $\{\pi(x):x\in\mathbf{X}\}$ 是 $\mathbf{Y}$ 上 (o)-连续泛函全的集合. 设在 $\mathbf{Y}$ 中 $0\leqslant f_\alpha\uparrow$ 且对于任意的 $F\in\mathbf{Y}_n^{\sim}$, $F\geqslant\mathbf{0}$, 有 $\sup F(f_\alpha)<+\infty$. 特别地, 对于任何 $x\in\mathbf{X}_+$

$$\sup_\alpha \pi(x)(f_\alpha)=\sup_\alpha f_\alpha(x)<+\infty.$$

根据在 K-空间 $\mathbf{X}^{\sim}$ 中上确界的定义, 存在泛函 $f\in\mathbf{X}^{\sim}$ 使得 $f_\alpha\uparrow f$. 因为 $\mathbf{Y}$ 是带, 所以 $f\in\mathbf{Y}$, 并且定理 3 中的条件 3) 就成立了.

特别地,空间 $\mathbf{X}^{\sim}$ 和 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 是(o)-自反的.

2.4. 我们再考察理想空间 $\mathbf{X}$ 的情况,并且仍和 I. 6 中一样,假设测度具有直和性质. 因为在 σ-有限测度情况下,空间 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 及其中的所有理想都是可数型 K-空间,所以,正如 2.2 中所指出,序连续泛函类与序 σ-连续泛函类是重合的;因此,在第六章中我们已处理了序连续泛函.

用对偶 $\mathbf{X}'$ 表示 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 的定理 VI.1.1 可以不做任何改变地搬到测度 μ 具有直和性质的情况. 并且映射 $x'\in\mathbf{X}'\to f_{x'}\in\mathbf{X}_n^{\sim}$ 是 K-空间 $\mathbf{X}'$ 和$\mathbf{X}_n^{\sim}$ 的序同构. 因此,如果

$$f(x)=\int_T x(t)x'(t)d\mu \qquad (x\in\mathbf{X}),$$

则

$$|f|(x)=\int_T x(t)|x'(t)|d\mu,$$

$$f_+(x)=\int_T x(t)x'_+(t)d\mu, \qquad f_-(x)=\int_T x(t)x'_-(t)d\mu.$$

如果 $\mathbf{X}$ 是理想空间,则利用定理 VI.1.1 容易得知, $\mathbf{X}$ 是 (o)-自反的充要条件为 $\mathbf{X}=\mathbf{X}''$.

2.5. 与向量格 $\mathbf{C}(K)$ 一样,理想空间类是最重要的向量格类,所以在所有向量格类中得到它的抽象特征是很重要的. 这个特征就是: K-空间 $\mathbf{X}$ 序同构于某个理想空间的充要条件为在 $\mathbf{X}$ 中可找到具有全的 $\mathbf{Y}_n^{\sim}$ 的基 $\mathbf{Y}$. 我们要以这个结果的证明来结束这一节. 首先,我们证明几个引理.

引理 2. 如果 $\mathbf{X}$ 是 K-空间,则对于任何 $f\in\mathbf{X}_n^{\sim}$, $f\geqslant 0$, 存在具有下列性质的带 $\mathbf{C}_f$:

1) 对于 $\mathbf{C}_f$ 中的任何 $x>0$, $f(x)>0$;

2) 对于所有 $x\in(\mathbf{C}_f)^{\mathrm{d}}$, $f(x)=0$.

(称 $\mathbf{C}_f$ 为 f 的本性正带).

证. 令

$$\mathbf{N}_f=\{x\in\mathbf{X}:\quad f(|x|)=0\}.$$

因为 $f\in\mathbf{X}_n^{\sim}$, 所以 $\mathbf{N}_f$ 是带. 显然,带 $(\mathbf{N}_f)^{\mathrm{d}}$ 就是所要求的.

引理 3. 如果 $\mathbf{X}$ 是 K-空间, $f, g\geqslant 0$ 是 $\mathbf{X}$ 上的 (o)-连续泛函. 则 $f\,\mathrm{d}\,g$ 的充要条件为 $\mathbf{C}_f\mathrm{d}\mathbf{C}_g$.

证. 因为 $\mathbf{C}_f$ 和 $\mathbf{C}_g$ 都是带,所以关系 $\mathbf{C}_f\mathrm{d}\mathbf{C}_g$ 等价于关系 $\mathbf{C}_f\cap\mathbf{C}_g=\{0\}$. 如果 $f\,\mathrm{d}\,g$ 且 $0\leqslant x\in\mathbf{C}_f\cap\mathbf{C}_g$, 则因为 $f\wedge g=0$, 故有

$$\inf\{f(x_1)+g(x_2): x=x_1+x_2;\ x_1, x_2\geqslant \mathbf{0}\}=0.$$

因此，可以构造两个序列 $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\geqslant \mathbf{0}\,(n\in N)$，使得 $x=x_1^{(n)}+x_2^{(n)}$，并且

$$f(x_1^{(n)})+g(x_2^{(n)})<1/2^n.$$

令

$$y_i^{(n)}=\sup_{m\geqslant n} x_i^{(m)} \qquad (i=1,2).$$

这时 $y_i^{(n)}\downarrow y_i\geqslant 0 \quad (i=1,2)$，并且

$$f(y_1^{(n)})\leqslant\sum_{m=n}^{\infty} f(x_1^{(m)})\leqslant 1/2^{n-1},\quad g(y_2^{(n)})\leqslant 1/2^{n-1}.$$

所以，$f(y_1)=g(y_2)=0$. 因为 $\mathbf{0}\leqslant y_i\leqslant x\in \mathbf{C}_f\cap\mathbf{C}_g$，所以由本性正带的定义可知 $y_i=\mathbf{0}\ \ (i=1,2)$. 这时 $x=x_1^{(n)}+x_2^{(n)}\xrightarrow{(o)}\mathbf{0}$，由此 $x=\mathbf{0}$.

反之，设 $\mathbf{C}_f \mathrm{d} \mathbf{C}_g$. 如果 $\mathbf{Y}=(\mathbf{C}_f\cup\mathbf{C}_g)^{\mathrm{d}}$，则由 1.3，对于任何 $x\in\mathbf{X}_+$ 有

$$x=[\mathbf{C}_f]x+[\mathbf{C}_g]x+[\mathbf{Y}]x.$$

这时 $g([\mathbf{C}_f]x)=f([\mathbf{C}_g]x)=f([\mathbf{Y}]x)=g([\mathbf{Y}]x)=0$. 从而

$$0\leqslant(f\wedge g)(x)\leqslant f([\mathbf{C}_g]x+[\mathbf{Y}]x)+g([\mathbf{C}_f]x)=0.$$

由此 $f\,\mathrm{d}\,g$.

泛函 $f\in\mathbf{X}_n^{\sim}$, $f\geqslant\mathbf{0}$，叫做本性正的，如果 $\mathbf{C}_f=\mathbf{X}$.

引理 4. 如果 $\mathbf{X}$ 是具有全的 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 的 K-空间，则在 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 中存在两两离析的泛函系 $\{f_\alpha\}(\alpha\in A)$，使得 $f_\alpha>\mathbf{0}(\alpha\in A)$，$\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathbf{C}_{f_\alpha}\right)^{\mathrm{dd}}=\mathbf{X}$ 并且每个带 $\mathbf{C}_{f_\alpha}$ 都是主带.

证. 用 $\mathfrak{M}$ 表示 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 中两两离析的泛函系 $\mathrm{m}=\{f_\beta\}(\beta\in B)$ 全体的集合，其中 $f_\beta>\mathbf{0}(\beta\in B)$，使得每个带 $\mathbf{C}_{f_\beta}$ 都是主带. 在 $\mathfrak{M}$ 中引进序：设 $\mathrm{m}=\{f_\beta\}(\beta\in B)$，$\mathrm{n}=\{g_\gamma\}(\gamma\in\Gamma)$，如果对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 可找到 $\beta\in B$，使得 $f_\beta=g_\gamma$，则称 $\mathrm{m}\geqslant\mathrm{n}$. 根据 Zorn 引理，在 $\mathfrak{M}$ 中存在极大系 $\mathrm{m}_0=\{f_\alpha\}(\alpha\in A)$. 我们来证明，$\{f_\alpha\}(\alpha\in A)$就是所要求的系. 设 $\mathbf{Y}=\left(\bigcup_{\alpha\in A}\mathbf{C}_{f_\alpha}\right)^{\mathrm{dd}}\neq\mathbf{X}$. 令 $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}^{\mathrm{d}}$. 因为 $\mathbf{Z}\neq\{\mathbf{0}\}$，所以可找到 $x_0\in\mathbf{Z}$ 使得 $x_0>\mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 在 $\mathbf{X}$ 中是全的，必存在泛函 $g\in\mathbf{X}_n^{\sim}$，使得 $g(x_0)\neq 0$. 因为 $|g(x_0)|\leqslant|g|(x_0)$，所以可认为 $g>\mathbf{0}$. 对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 令

$$f(x)=g([x_0]x).$$

显然，$f\in\mathbf{X}_n^{\sim}$，又因为 $f(x_0)=g(x_0)>0$，所以 $f>\mathbf{0}$. 此外，$\mathbf{C}_f\subset\mathbf{X}_{x_0}\subset\mathbf{Z}$,

由此对于所有 $\alpha\in A$, $\mathbf{C}_f \,\mathrm{d}\, \mathbf{C}_{f_\alpha}$. 根据引理 3, 对于所有 $\alpha\in A, f \,\mathrm{d}\, f_\alpha$. 从而与 m_0 是极大元矛盾. 引理证毕.

现在来推导一个关于连续函数空间的引理. 在向量格 $\mathbf{C}[0,1]$中容易检验, 无限集的界不是逐点计算的.

引理 5. 设 K 是紧集, E 是向量格 $\mathbf{C}(K)$ 中非负函数集. $z(t)=\inf\{x(t):x\in E\}(t\in K)$. 使 $\inf E=0$ 的充要条件为集 $P=\{t\in K:z(t)>0\}$是 K 中的第一纲集。

证. 必要性. 对于任何 $\varepsilon>0$, 令 $P(\varepsilon)=\{t\in K:\ z(t)\geqslant\varepsilon\}$. 这时 $P=\bigcup_{n=1}^{\infty} P(1/n)$. 因此只要证明, 对于任何 $\varepsilon>0$ 集合 $P(\varepsilon)$ 都是无处稠密的. 因为

$$P(\varepsilon)=\bigcap_{x\in E}\{t\in K:\quad x(t)\geqslant\varepsilon\},$$

所以 $P(\varepsilon)$是闭的. 如果 $P(\varepsilon)$不是无处稠密的, 则存在点 $t_0\in K$, 它的开邻域 $V\subset P(\varepsilon)$. 因为紧集是完全正则的(参见 Dunford 和 Schwartz-I 第一章 § 5), 所以存在函数 $x_0\in\mathbf{C}(K)$使得

1) $0\leqslant x_0(t)\leqslant\varepsilon,\ t\in K$;

2) $x_0(t_0)=\varepsilon$;

3) $x_0(t)=0,\ t\in K\setminus V$.

这时, 对于任何 $x\in E$, $\mathbf{0}<x_0\leqslant x$. 这与 $\inf E=\mathbf{0}$ 矛盾.

充分性. 令 P 是第一纲集. 假设 $\mathbf{0}$ 不是 E 的下确界. 这时存在函数 $x_0\in\mathbf{C}(K)$, 使得对于任何 $x\in E$, $\mathbf{0}<x_0\leqslant x$; 因而存在点 $t_0\in K$, 使得 $x_0(t_0)>0$. 这时 $V=\{t\in K:\ x_0(t)>0\}$是非空的开集. 此外, 对于任何 $t\in V$, $z(t)\geqslant x_0(t)>0$, 由此 V 包含在P中. 因而V 是第一纲集. 但由拓扑学知道, 紧集中的非空开集不可能是第一纲的(在定理 I. 4. 2 的证明中只做不多的改变即可得此证明).

现在考察在极不连通紧集上的测度. 下面设 Q 是极不连通紧集 $\mathscr{G}_Q$ 是 Q 的所有开-闭子集的集合, $\mathscr{N}_Q$ 是 Q 中所有第一纲集的集合. 以 $\mathfrak{B}_Q$ 表示所有对称差 $G\triangle N$ 的集合, 其中 $G\in\mathscr{G}_Q, N\in\mathscr{N}_Q$.

引理 6. $\mathfrak{B}_Q$ 是包含紧集 Q 的 Borel σ-代数的 σ-代数.

证. 容易看出, 集合 $A\in\mathfrak{B}_Q$ 的充要条件为存在 $G\in\mathscr{G}_Q$ 使得集合

$$N_1=A\setminus G \quad 和 \quad N_2=G\setminus A \tag{3}$$

是第一纲集．事实上，如果 $A=G\triangle N$，$G\in\mathscr{G}_Q$，$N\in\mathscr{N}_Q$，则 $N_1=N\setminus G$ 和 $N_2=N\cap G$ 是第一纲集．反之，如果 A 满足条件(3)，则令 $N=N_1\cup N_2\in\mathscr{N}_Q$．显然 $A=G\triangle N$．于是只要证明满足条件(3)的集合构成了 σ-代数．如果 $\{A_n\}$ 是这样的集合的序列，而 $G_n\in\mathscr{G}_Q$ 是与其对应的集合，则令 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$．

因为 G 是开集，所以 $\bar{G}\setminus G$ 是无处稠密的．其次，对于 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 有

$$A\setminus\bar{G}\subset A\setminus G\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\setminus G_n)\in\mathscr{N}_Q,$$

$$G\setminus A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\setminus A_n)\in\mathscr{N}_Q.$$

因为 $\bar{G}\setminus A=[(\bar{G}\setminus G)\setminus A]\cup(G\setminus A)\in\mathscr{N}_Q$，所以 $A\in\mathfrak{B}_Q$．如果 $A=G\triangle N\in\mathfrak{B}_Q$，则 $Q\setminus A=(Q\setminus G)\triangle N$．因为 $Q\setminus G\in\mathscr{G}_Q$，所以 $Q\setminus A\in\mathfrak{B}_Q$．于是我们证明了 $\mathfrak{B}_Q$ 是 σ-代数．

因为对于任意的开集 U，集合 $\bar{U}\in\mathscr{G}_Q$，而集合 $\bar{U}\setminus U$ 无处稠密，所以 $U\in\mathfrak{B}_Q$．由此 Borel σ-代数包含在 $\mathfrak{B}_Q$ 之中．

在 σ-代数 $\mathfrak{B}_Q$ 上给定的测度 μ 叫做正规的，如果满足：

1) 由 $N\in\mathscr{N}_Q$ 可推出 $\mu(N)=0$;

2) 对于任何使 $\mu(G)=+\infty$ 的 $G\in\mathscr{G}_Q$，存在 $G_1\in\mathscr{G}_Q$，使得 $G_1\subset G$ 且 $0<\mu(G_1)<+\infty$．

正规测度 μ 叫做严格正的，如果还满足：

3) 由 $G\in\mathscr{G}_Q$，$G\neq\varnothing$ 可推出 $\mu(G)>0$．

在其上存在严格正的正规测度的极不连通紧空间叫做超 Stone 的．设 Q 是具有严格正的正规测度 μ 的超 Stone 的紧空间．我们指出由定义得到的一些最简单的推论．

a) 如果 $G\in\mathscr{G}_Q$，$N\in\mathscr{N}_Q$，则 $\mu(G\triangle N)=\mu(G)$．

事实上，$\mu(G\triangle N)=\mu(G\setminus N)+\mu(N\setminus G)=\mu(G\setminus N)$

$$=\mu(G\setminus N)+\mu(N\cap G)=\mu(G).$$

b) 测度 μ 是完全的．

如果 $A\subset G\triangle N$，$G\in\mathscr{G}_Q$，$N\in\mathscr{N}_Q$ 且 $\mu(G\triangle N)=0$，则由于 a)及 3)，$G=\varnothing$，由此 $A\subset N$，从而 $A\in\mathscr{N}_Q$．

c) 测度 μ 是局部有限的.

如果 $\mu(G\triangle N)=+\infty, G\in\mathscr{G}_Q, N\in\mathscr{N}_Q$, 则由 1) 可知 $\mu(G)=+\infty$, 这时由 2) 可找到 $G_1\in\mathscr{G}_Q$, 使得 $G_1\subset G$ 及 $0<\mu(G_1)<+\infty$. 因而 $G_1\triangle N\subset G\triangle N$ 及 $\mu(G_1\triangle N)=\mu(G_1)<+\infty$, 从而证明了 c).

d) 在紧空间 Q 中存在两两离析的集合系 $\{Q_\alpha\}\subset\mathscr{G}_Q$, 使得对于任何 α, $0<\mu(Q_\alpha)<+\infty$ 且集合 $Q\setminus\bigcup Q_\alpha$ 是无处稠密的.

首先指出, 对于任何开集 $V\subset Q$, 集 $\overline{V}\setminus V\in\mathscr{N}_Q$. 利用 Zorn 引理及 2) 不难推出 d) 成立.

e) 设 $\{Q_\alpha\}$ 是 d) 中的一个集合系. 如果对于任何 α, $A\cap Q_\alpha\in\mathfrak{B}_Q$, 则 $A\in\mathfrak{B}_Q$.

设 $A\cap Q_\alpha=G_\alpha\triangle N_\alpha$, 其中 $G_\alpha\in\mathscr{G}_Q, N_\alpha=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}N_\alpha^{(n)}$, 而 $N_\alpha^{(n)}$ 是无处稠密的. 此外可以认为 $G_\alpha, N_\alpha\subset Q_\alpha$. 令 $N^{(n)}=\bigcup\limits_{\alpha}N_\alpha^{(n)}(n\in\boldsymbol{N})$, 我们来证集合 $N^{(n)}$ 是无处稠密的.

假如上述论断不对, 设非空开集 V 包含在 $\overline{N}^{(n)}$ 之中, 因为集合 $Q\setminus\bigcup\limits_{\alpha}Q_\alpha$ 是闭的和无处稠密的, 所以集合 $U=V\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha}Q_\alpha\right)$ 是非空的和开的. 因为 Q_α 是两两不相交的开-闭集, 所以对于任何 α 有 $\overline{N}^{(n)}\cap Q_\alpha=\overline{N}_\alpha^{(n)}$. 从而 $U\cap Q_\alpha\subset\overline{N}_\alpha^{(n)}$. 这样, 集合 $U\cap Q_\alpha$ 一方面是开的, 另一方面又是无处稠密的. 所以对于任意的 $\alpha, U\cap Q_\alpha=\varnothing$. 这就表明 $U=\varnothing$.

于是 $N^{(n)}$ 是无处稠密的, $N=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}N^{(n)}\in\mathscr{N}_Q, G=\bigcup G_\alpha$ 是开集, 而这时根据引理 6 得 $G\in\mathfrak{B}_Q$.

现在显然有

$$A=(G\triangle N)\cup(A\cap(Q\setminus\bigcup Q_\alpha))\in\mathfrak{B}_Q.$$

从 b), c) 及 e) 可知, $(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 满足测度空间的所有公理(参见 I.6.2),

f) 空间 $(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 具有直和性质.

我们指出, 关于 d) 中集系 $\{Q_\alpha\}$ 直和条件满足. 显然只须考察 $G\in\mathscr{G}_Q$, $0<\mu(G)<\infty$ 的情况.

我们把 G 表为如下形式

$$G=\bigcup_{\alpha}(G\cap Q_\alpha)\cup\left[G\cap\left(Q\setminus\bigcup Q_\alpha\right)\right].$$

为了证明 f)，显然，只要验证仅对于不多于可数个指标 α，$G\cap Q_\alpha\neq\varnothing$. 假如不然，则可以找到数 $\varepsilon>0$ 及可数个指标 α_n，使得 $\mu(G\cap Q_{\alpha_n})\geqslant\varepsilon$，这与下列不等式矛盾

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(G\cap Q_{\alpha_n})\leqslant\mu(G)<+\infty.$$

定理 4. 设 μ 是 $\mathfrak{B}_Q$ 上的严格正的正规测度.

1) 如果 $x\in\mathbf{C}_\infty(Q)$，则 x 是几乎处处有限的可测函数.

2) 在 $\mathbf{C}_\infty(Q)$ 中，如果 $x\neq y$，则函数 x 与 y 不等价.

3) 如果 y 是 Q 上的几乎处处有限的可测函数，则可以找到 $x\in\mathbf{C}_\infty(Q)$，使得 $x(t)=y(t)$ a.e.

证. 1) 显然成立.

2) 如果 $x\neq y$，则集合 $P=\{t\in Q:x(t)\neq y(t)\}$ 是开的和非空的，因此 $\mu(P)=\mu(\bar{P})>0$.

3) 我们来证明，恒等映射 $x\in\mathbf{C}_\infty(Q)\to x\in\mathbf{S}(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 是扩张的 K-空间 $\mathbf{C}_\infty(Q)$ 与 $\mathbf{S}(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 之间的序同构. 我们先证这个映射建立了 $\mathbf{C}(Q)$ 与 $\mathbf{L}^\infty(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 之间的同构. 为此，只要验证，对于任何 $y\in\mathbf{L}^\infty(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 可以找到 $x\in\mathbf{C}(Q)$，使得 $x(t)=y(t)$ a.e. 如果 $G\triangle N\in\mathfrak{B}_Q$，则因为 G 是开-闭集，所以

$$\chi_{G\Delta N}(t)=\chi_G(t)\ \text{a.e.}\tag{4}$$

并且 $\chi_G\in\mathbf{C}(Q)$. 可以认为函数 y 是有界的. 这时，根据定理 I.6.3，存在有限可测函数序列 $\{y_n\}$，使在 Q 上一致地有 $y_n\to y$. 由(4)，对于 y_n 可找到 $x_n\in\mathbf{C}(Q)$，使 $x_n(t)=y_n(t)$ a.e. 这时，$x_n(t)\to y(t)$ 在 A 上一致成立，这个 A 是某个第一纲集的余集. 因此，函数 y 限制在 A 上是连续的，并且 $\bar{A}=Q$. 另一方面，因为显然有

$$\|x_n-x_m\|_{\mathbf{C}(Q)}=\|y_n-y_m\|_{\mathbf{L}^\infty(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)},$$

故 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{C}(Q)$ 中的 Cauchy 序列.

由于 $\mathbf{C}(Q)$ 的完备性，在 $\mathbf{C}(Q)$ 中按范数 $x_n\to x$，且 $x(t)=y(t)$ a.e. 于是我们建立了 $\mathbf{C}(Q)$ 与 $\mathbf{L}^\infty(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 之间的同构.

设 $y\in\mathbf{S}(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$，可以认为函数 $y(t)$ 处处有限. 对于任意的 $n=0,1,2,\cdots$，令

$$y_n(t)=\begin{cases} y(t), \text{如果 } n\leqslant |y(t)|<n+1, \\ 0\ , \text{在其余情形}. \end{cases}$$

这时，$y_n\in\mathbf{L}^\infty(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$. 根据上述证明，可找到 $x_n\in\mathbf{C}(Q)$，使 $x_n(t)=y_n(t)$ a.e. 因为在 $\mathbf{L}^\infty(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 中 $|y_n|\wedge|y_m|=0(n\neq m)$，所以在 $\mathbf{C}(Q)$ 中 $|x_n|\wedge|x_m|=0(n\neq m)$. 从而在 $\mathbf{C}_\infty(Q)$ 中也成立. 因为 $\mathbf{C}_\infty(Q)$ 是扩张的 K-空间，所以存在 $x=\sup x_n\in\mathbf{C}_\infty(Q)$. 显然逐点的 $\sup x_n(t)=y(t)$ a.e. 而根据引理 5，$x(t)=\sup x_n(t)$ 除了一个第一纲集合外处处成立，即也是几乎处处成立. 从而证明了 $y(t)=x(t)$ a.e.

在定理证明的过程中，我们已建立了下面的推论.

推论. 映射 $x\in\mathbf{C}_\infty(Q)\to x\in\mathbf{S}(Q,\mathfrak{B}_Q,\mu)$ 是序同构.

现在我们可以证明基本定理了.

定理 5. 使 K-空间 $\mathbf{X}$ 序同构于在具有直和性质的某个测度空间 (T,Σ,μ) 上的理想空间，必须而且只须，在 $\mathbf{X}$ 中存在具有全的 $\mathbf{Y}_n^\sim$ 的基 $\mathbf{Y}$.

证. 如果 $\mathbf{X}$ 是 (T,Σ,μ) 上的理想空间，则 $\mathbf{X}\cap\mathbf{L}^1(T,\Sigma,\mu)$ 是 $\mathbf{X}$ 中的基. 在 $\mathbf{L}^1(T,\ \Sigma,\ \mu)$ 上 (o)-连续泛函的集合是全的，所以它在这个基上也是全的.

我们来证逆命题. 因为，如果 $\mathbf{Y}$ 与 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中的基同构，则由极大扩张的唯一性，$\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$ 中的基同构. 所以可以认为 $\mathbf{X}_n^\sim$ 在 $\mathbf{X}$ 上是全的. 设 $\{f_\alpha\}(\alpha\in A)$ 是引理 4 中的泛函系，x_α 是生成带 $\mathbf{C}_{f_\alpha}$ 的元素. 根据引理 3，元素 x_α 是两两离析的. 这时，根据定理 1.1，极大扩张 $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$ 可作为 $\mathbf{C}_\infty(\mathbf{X})$ 实现，并且元素 x_α 成为了两两离析的开-闭集 Q_α 的特征函数. 因为 $\{x_\alpha:\alpha\in A\}^{dd}=\mathbf{X}$，所以 $\overline{\bigcup Q_\alpha}=Q$. 现在我们在 $\mathfrak{B}_Q$ 上定义测度. 如果 $A=G\triangle N$，$G\in\mathfrak{g}_Q$，$N\in\mathcal{N}_Q$，并且 A 包含在某个 Q_α 中，则令

$$\mu(A)=f_\alpha(\chi_Q).$$

(这里我们把 $\mathbf{X}$ 同它在 $\mathbf{C}_\infty(Q)$ 中的同构象等同起来). 对于任意的 $A\in\mathfrak{B}_Q$，令

$$\mu(A)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\mu(A\cap Q_{\alpha_i}):\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\subset A\right\}.$$

容易看出，为了验证 μ 是测度，只要验证，它在每个 σ-代数 $\mathfrak{B}_{Q_\alpha}$ 上的限制都是可数可加的. 首先指出，如果

$$G\triangle N\subset G_1\triangle N_1;\quad G,G_1\in\mathfrak{g}_Q;\quad N,N_1\in\mathcal{N}_Q$$

则 $G\subset G_1$. 事实上，假如不然，则可找到含于 G 的非空开集 U，使得 $U\cap G_1=$

$\varnothing$. 这时

$$U\backslash N\subset G\backslash N\subset G_1\triangle N_1=(G_1\backslash N_1)\cup(N_1\backslash G_1).$$

由此，因为 $U\cap G_1=\varnothing$，故 $U\backslash N\subset N_1\backslash G_1$. 从而 $U\subset N\cup N_1$，但我们已指出过，在紧集中的开集不能是第一纲集合.

我们现在来证明，μ 在 σ-代数 $\mathfrak{B}_{Q_\alpha}$ 上的限制是可数可加的. 设 $A_n=G_n\triangle N_n\in\mathfrak{B}_{Q_\alpha}$, $A_n\downarrow\varnothing$. 由上述证明可知，$G_n\downarrow$. 显然 $\cap G_n$ 是第一纲集合. 这时，根据引理 5，在 K-空间 $\mathbf{X}$ 中 $\chi_{G_n}\downarrow\mathbf{0}$. 由此 $\mu(A_n)=f_\alpha(\chi_{G_n})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

我们来验证，μ 是正规测度. 由测度 μ 的定义，性质 1)和 2)是显然的. 又对于任意的 $G\in\mathscr{E}_Q$，可找到 Q_α，使得 $G\cap Q_\alpha\neq\varnothing$，并且 f_α 在 $\mathbf{C}_{f_\alpha}$ 上是本性正的，这样便推出性质 3).

§3. 赋范格

3.1. 向量格 $\mathbf{X}$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 叫做单调的，如果从 $|x|\leqslant|y|$ 可以推出 $\|x\|\leqslant\|y\|$. 赋有单调范数的向量格叫做赋范格*). 按范数完备的赋范格叫做 Banach 格**). 如果赋范格(相应地 Banach 格) $\mathbf{X}$ 是 K-空间，则称 $\mathbf{X}$ 是赋范 K-空间***)(相应地 Banach K-空间****)).

显然，赋范理想空间是赋范 K-空间，Banach 理想空间是 Banach K-空间. 在 IV.3.1 中按范数收敛的性质 1)—4)在任意赋范格 $\mathbf{X}$ 中显然也成立. 性质 5)变成了在赋范 K-空间 $\mathbf{X}$ 中投影算子的连续性：如果按范数 $x_n\to x$，则按范数 $[E]x_n\to[E]x$(此外，算子 $[E]$ 的范数不超过 1). 还要指出，任何赋范格都是阿基米德格.

我们考察按范数收敛与正则收敛之间的联系. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范格，并且 $x_n\xrightarrow{(r)}x$，则因为 $\|x_n-x\|\leqslant\varepsilon_n\|u\|\to0$ (其中 u 是收敛的控制元)，所以按范数 $x_n\to x$. 一般来讲逆命题不成立. 然而在 Banach 格 $\mathbf{X}$ 的情况，由完全重复引理 IV.3.2 的证明可验证，如果按范数 $x_n\to x$，则可以找到子序列 $x_{n_k}\xrightarrow{(r)}x$. 类似于定理 IV.3.2 现在可得，在向量格 $\mathbf{X}$ 上引进的并使 $\mathbf{X}$ 成为 Banach 格的任意两个单调范数都是等价的.

---

*) 在 Вулих-I 中称作 KN-线集或者赋范结构.

**) 在 Вулих-I 中称作 KB-线集或者 Banach 结构.

***) 在 Вулих-I 中称作 KN-空间.

****) 在 Вулих-I 中称作(b)-完备 KN-空间.

定理 1. 1) 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范格, 则 $\mathbf{X}^*\subset\mathbf{X}^\sim$.

2) 如果 $\mathbf{X}$ 是 Banach 格, 则 $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}^\sim$.

证. 1) 根据范数的单调性, 在赋范格 $\mathbf{X}$ 中的序区间是按范数有界的, 又因为泛函 $f\in\mathbf{X}^*$ 在任何按范数有界的集上是有界的, 所以根据定理 2.1, $f\in\mathbf{X}^\sim$.

2) 设 $f\in\mathbf{X}^\sim$, 但 $f\notin\mathbf{X}^*$. 这时可找到序列 $x_n\to\mathbf{0}$(按范数), 并且 $f(x_n)\geqslant\varepsilon>0\,(n\in\boldsymbol{N})$. 另一方面可找到 $x_{n_k}\xrightarrow{(r)}\mathbf{0}$, 由此 $|f(x_{n_k})|\leqslant|f|(|x_{n_k}|)\leqslant\varepsilon_{n_k}|f|(u)\to0$. 所得的矛盾证明 $f\in\mathbf{X}^*$.

如果 $\mathbf{X}$ 是赋范格, 则容易看出, 具有通常范数及由 $\mathbf{X}^\sim$ 中诱导的序的 Banach 共轭 $\mathbf{X}^*$ 是 Banach K-空间(并且是 $\mathbf{X}^\sim$中的理想).

3.2. 在研究向量格时,除了在 1.5 中所考察的外, 还有一种实现类常常是有用的.

设 $\mathbf{X}$ 是阿基米德向量格, $u\in\mathbf{X}_+$. 取序区间$[-u,\ u]$的 Minkowski 泛函作为范数使 u-理想 $\mathbf{X}(u)$ 变为赋范格. 我们把所引进的范数记为$\|\cdot\|_u$, 并称其为 u-范数. 显然, 向量格 $\mathbf{X}$ 是(r)-完备的充要条件为每一个赋范格 $\mathbf{X}(u)$ 都是完备的$(u\in\mathbf{X}_+)$. 根据 М. Г. 及 С. Г. Крейн 和 S. Kakutani 定理(参见 Вулих-I, 定理 VII. 5. 1), 每个按 u-范数完备的 u-理想 $\mathbf{X}(u)$ 与某个紧集 K 上的 Banach 格 $\mathbf{C}(K)$ 序同构且等距同构, 这个事实突出了(r)-完备格的重要性. 由 3.1 关于在 Banach 格中按范数收敛和 (r)-收敛之间关系的结果可知, 任何 Banach 格都是(r)-完备的.

在算子理论中, 自然常常考察在复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间(及向量格). 因为当按自然方式定义序时, 例如在复 $\mathbf{L}^p(0,\ 1)$中, 一般没定义两个函数的上确界(两个复数没有最大值), 而是定义了函数的模, 所以模就成为把向量格的概念推广到复数情况的基础.

设复向量空间 $\mathbf{X}$ 是做为 (r)-完备向量格的实向量空间 $\mathbf{X}_0$ 的复值化*). 现在对于元素 $z=x+iy\,(x,\ y\in\mathbf{X}_0)$ 定义模 $|z|\in\mathbf{X}_0$. 为此考察主理想 $\mathbf{X}_0(|x|+|y|)$, 由于 $\mathbf{X}_0$ 是(r)-完备的, 所以这个主理想与实空间 $\mathbf{C}(K)$ 同构. 我们把这个同构以自然方式延拓到 $\mathbf{X}_0(|x|+|y|)+i\mathbf{X}_0(|x|+|y|)$ 与复的 $\mathbf{C}_C(K)$ 上的同构. 如果 $z=x+iy,\ x,\ y\in\mathbf{C}(K)$, 则函数 $|z(t)|\,(t\in K)$ 可按公式 $|z|=$

---

*) 即 $\mathbf{X}$ 是所有形如 $x+iy$ 的元素的集合$(x,\ y\in\mathbf{X}_0)$, 并且以自然方式引进线性运算(参见第十三章 § 2).

$\sup\limits_{0\leqslant\theta<2\pi}|(\cos\theta)x+(\sin\theta)y|$来计算. 其中上确界是在向量格 $\mathbf{C}(K)$ 内取的，因而对于任意 $z\in\mathbf{X}$ 存在

$$|z|=\sup_{0\leqslant\theta<2\pi}|(\cos\theta)x+(\sin\theta)y|, \tag{1}$$

从而在 $\mathbf{X}$ 内建立了模.

满足上述条件的复向量空间 $\mathbf{X}$ 叫做复向量格，如果元素的模用(1)式定义. 几乎所有向量格和 Banach 格的概念都可以搬到复数的情况（参见 Schäffer-II).

3.3. 现在来建立赋范格完备性的判别准则.

定理 2 (Amemiye). 设 $\mathbf{X}$ 是赋范格，则下列命题是等价的：

1) $\mathbf{X}$ 按范数完备.

2) 如果 $0\leqslant x_n\uparrow$ 是 $\mathbf{X}$ 中的 Cauchy 序列，则按范数 $x_n\to x\in\mathbf{X}$.

3) 如果 $0\leqslant x_n\uparrow$ 是 $\mathbf{X}$ 中的 Cauchy 序列，则存在 $x=\sup x_n\in\mathbf{X}$.

证. 1)⇒2)⇒3) 显然成立.

2)⇒1). 如果 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的 Cauchy 序列，则可认为(如果需要的话，可取子序列)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{n+1}-x_n\|<+\infty. \tag{2}$$

令

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)_+,\quad z_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)_-.$$

这时 $0\leqslant y_n\uparrow, 0\leqslant z_n\uparrow$. 如果 $n<m$，则由(2)

$$\|y_m-y_n\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}(x_{k+1}-x_k)_+\right\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\|(x_{k+1}-x_k)_+\|$$

$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\|x_{k+1}-x_k\|\xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty}0.$$

于是，$\{y_n\}$ 是递增的 Cauchy 序列. 因而按范数 $y_n\to y$. 类似地，按范数 $z_n\to z$. 这时 $y_n-z_n\to y-z$，但

$$y_n-z_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=x_{n+1}-x_1,$$

从而，按范数 $x_n\to y-z+x_1$.

3)⇒2). 设 $0\leqslant x_n\uparrow$ 是 Cauchy 序列. 根据条件 $x=\sup x_n$ 存在. 不失一般性可认为

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant 1/n^3 \qquad (n\in\boldsymbol{N}). \tag{3}$$

考察

$$y_n=x_1+\sum_{k=1}^{n}k(x_{k+1}-x_k).$$

这时 $0\leqslant y_n\uparrow$, 并且由 3), 若 $n<m$, 则

$$\|y_m-y_n\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}k(x_{k+1}-x_k)\right\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}1/k^2\xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty}0.$$

从而根据条件可知 $y=\sup y_n$ 存在. 其次

$$n(x-x_n)=\sup_{m>n}\sum_{k=n}^{m}n(x_{k+1}-x_k)\leqslant\sup_{m>n}\sum_{k=n}^{m}k(x_{k+1}-x_k)\leqslant y,$$

由此

$$0\leqslant x-x_n\leqslant y/n.$$

根据范数的单调性, $x_n\to x$. 定理证毕.

3.4. 我们以考察向量格上的泛函来结束本节.

设 $\mathbf{X}(u)$ 是在 K-空间 $\mathbf{X}$ 中具有 u-范数的 u-理想.

定理 3(Grothendieck[1]). 如果在 $(\mathbf{X}(u))^*$ 中序列 $f_n\to 0$((*)-弱), 则 $f_n\to 0$(弱).

定理 3 及其推广的证明不是平凡的, 并且相当长, 这里就从略了 (参见 Schäffer-II).

特别地, 当 $\mathbf{X}(u)=\mathbf{L}^\infty(T,\ \Sigma,\ \mu)$时定理 3 给出了一个有趣的结果. 作为推论我们证明, 如果 $\mathbf{X}=\mathbf{l}^\infty$, 则空间 $\mathbf{X}^*$ 中的闭球 B 不是序列 $\sigma(\mathbf{X}^*,\ \mathbf{X})$-紧的 (参见第五章 7.2). 事实上, 若不然, 根据定理 3, 它在 $\mathbf{X}^*$ 中是序列弱紧的, 而这时根据定理 VIII.2.1, B 是弱紧的, 从而导致 $\mathbf{X}^*$ 及 $\mathbf{l}^\infty$ 都是自反的. 而实际上并非如此(参见 VI.2.1).

引理 1. 设 $\mathbf{X}$ 是(r)-完备向量格, $\{f_\alpha\}(\alpha\in A)$ 是 $\mathbf{X}^\sim$ 中的有向列, 并且满足条件

1) 对于任何 $x\in\mathbf{X}$, $\sup\limits_{\alpha\in A}|f_\alpha(x)|<\infty$,

2) 对于任意 $x\in\mathbf{X}$, 存在有限极限 $\lim f_\alpha(x)=f(x)$,

则 $f\in\mathbf{X}^\sim$.

证. 因为 $\mathbf{X}$ 是(r)-完备的, 所以所有 u-理想都是完备的, 根据 Banach-Steinhaus 定理(参见定理 VII.1.2 后的注), f 在每一 u-理想 $\mathbf{X}(u)$ 上的限制

都是连续的,这就是说,在任何区间上 f 有界,即 $f\in\mathbf{X}^{\sim}$.

推论. 设 $\mathbf{X}$ 是具有全的 $\mathbf{X}^{\sim}$ 的 K-空间,则

1) 任何 $\sigma(\mathbf{X}^{\sim},\mathbf{X})$-有界集 M 按这个拓扑是相对紧的.

2) 如果 $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}^{\sim}$ 中的理想,则 $\mathbf{Y}$ 中的任意区间按拓扑 $\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ 是紧的.

证. 1) 根据引理III.3.5,只须证明集合 M 的 $\sigma(\mathbf{X}^{+},\mathbf{X})$-闭包包含在 $\mathbf{X}^{\sim}$ 之中,但这可由引理 1 推出.

2) 可由 1) 及定理 2.2 的推论 1 推出.

定理 4. 设 $\mathbf{X}$ 是 K-空间,$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathbf{X}_n^{\sim}$, f 是 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函, 如果对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 有 $f_m(x)\to f(x)$, 则 $f\in\mathbf{X}_n^{\sim}$.

证. 根据引理 1 可知 $f\in\mathbf{X}^{\sim}$. 显然只要证明,对于任何 $u\in\mathbf{X}_+$, f 在 u-理想 $\mathbf{X}(u)$ 上的限制(用 g 来表示)是 (o)-连续的. 令 $g_m=f_m|\mathbf{X}(u)$, 这时 $g_m\in\mathbf{X}(u)_n^{\sim}$, $g\in\mathbf{X}(u)^{\sim}=\mathbf{X}(u)^*$. 因为 $g_m\to g$(在 $\mathbf{X}(u)^*$ 中 $(*)$-弱收敛), 所以由定理 3, $g_m\to g$(弱). 根据定理 III.3.2 的推论 2, 元素 g_m 的凸组合 g'_m 按 $\mathbf{X}(u)^*$ 中的范数收敛于 g. 因为 $g'_m\in\mathbf{X}(u)_n^{\sim}$ 且 $\mathbf{X}(u)_n^{\sim}$ 是 $\mathbf{X}(u)^*$ 中的带, 而在赋范格中的带按范数是闭的,所以 $g\in\mathbf{X}(u)_n^{\sim}$, 证毕.

由定理 4 直接推出:

推论 1. 如果 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 在 K-空间 $\mathbf{X}$ 上是全的,则空间 $(\mathbf{X}_n^{\sim},\sigma(\mathbf{X}_n^{\sim},\mathbf{X}))$ 是序列完备的.

推论 2. 如果 K-空间 $\mathbf{X}$ 是 (o)-自反的, 则空间 $(\mathbf{X},\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}_n^{\sim}))$ 是序列完备的.

定理 5. 如果 $\mathbf{X}$ 是具有全的 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 的赋范格,则 $\mathbf{X}^*\cap\mathbf{X}_n^{\sim}$ 区分 $\mathbf{X}$ 上的点.

我们仅对 K-空间证明这个结论. 首先把定理 VI.1.5 的证明搬到非 σ-有限测度上, 这时对 K-空间 $\mathbf{X}$ 的情况, 定理 5 可由关于实现的定理 2.5 推出.

现在来建立一个关于 $\mathbf{X}^{\sim}$ 构造的重要定理.

定理 6. 如果 $\mathbf{X}$ 是具有全的 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 的向量格, 则 $\mathbf{X}_s^{\sim}=(\mathbf{X}_n^{\sim})^d$, 即 K-空间 $\mathbf{X}^{\sim}$ 可分解为两个离析的带 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 与 $\mathbf{X}_s^{\sim}$ 之和.

证. 我们就 $\mathbf{X}$ 是 K-空间的情况来证明定理 6. 根据引理 2.1, $\mathbf{X}_s^{\sim}\subset(\mathbf{X}_n^{\sim})^d$. 反之, 取 $\varphi\in(\mathbf{X}_n^{\sim})^d$, $\varphi\geqslant 0$; $\mathbf{N}_\varphi=\{x\in\mathbf{X}:\varphi(|x|)=0\}$. 显然 $\mathbf{N}_\varphi$ 是 $\mathbf{X}$ 中的理想. 我们来证明 $\mathbf{N}_\varphi$ 与 $\mathbf{X}$ 一样广, 从而得知 $\varphi\in\mathbf{X}_s^{\sim}$. 假如不然, 若记 $\mathbf{Y}=(\mathbf{N}_\varphi)^d$, 则 $\mathbf{Y}\neq\{0\}$. 对于任何 $y\in\mathbf{Y}$, 令 $\|y\|=\varphi(|y|)$. 这时 $\mathbf{Y}$ 是赋范格.

因为 $\mathbf{X}_n^{\sim}$ 在 $\mathbf{X}$ 上是全的，所以 $\mathbf{Y}_n^{\sim}$ 在 $\mathbf{Y}$ 上是全的．根据定理 5，$\mathbf{Y}^*\cap\mathbf{Y}_n^{\sim}$ 在 $\mathbf{Y}$ 上是全的．因此可找到这样的泛函 f，使得 $f\in\mathbf{Y}^*\cap\mathbf{Y}_n^{\sim}$，$f>0$ 且对于任何 $y\in\mathbf{Y}$，$f(y)\leqslant\|y\|=\varphi(y)$．

对于任何 $x\in\mathbf{X}$，令

$$f_1(x)=f([\mathbf{Y}]x).$$

这时 $0<f_1\in\mathbf{X}_n^{\sim}$，$0\leqslant f_1\leqslant\varphi\in(\mathbf{X}_n^{\sim})^d$．因此 $f_1=0$．从而得出矛盾．

特别地，从定理 6 可以得出，在赋范理想空间上的任何连续泛函可以唯一地分解为具有积分表示的泛函与奇异泛函之和．这个结果在各种不同的应用中是很重要的（首先在最优控制及凸分析中有其应用．参见 Дубовицкий 和 Милютин[2]）．下面关于在 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 上泛函表示的经典的 Yosida-Hewitt 定理*) 是定理 6 的特殊情形．

定理 7（Yosida-Hewitt）．如果测度 μ 有限，则在 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma,\mu)$ 上的任何线性连续泛函 f 可以唯一地表示为和 $f=f_1+f_2$ 的形式，其中

$$f_1(x)=\int_T x(t)y(t)d\mu\quad(y\in\mathbf{L}^1(T,\Sigma,\mu)),$$

而 f_2 具有这样的性质：对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $A\in\Sigma$，$\mu(T\setminus A)<\varepsilon$，使当 $\operatorname{Supp}x\subset A(\operatorname{mod}\mu)$ 时，$f_2(x)=0$．

§ 4. *KB*-空间

4.1. 在本节我们简短地考察具有类似于 IV.3.2 中引进的条件(A)，(B)和(C)**) 的 Banach 格．

设 $\mathbf{X}$ 是赋范格．

$\mathbf{X}$ 中的范数叫做序连续的，或叫做在 $\mathbf{X}$ 中满足条件(A)，如果

$$\text{从 } 0\leqslant x_\alpha\downarrow 0 \text{ 可推出 } \|x_\alpha\|\to 0.$$

$\mathbf{X}$ 中的范数叫做序半连续的，或叫做在 $\mathbf{X}$ 中满足条件(C)，如果

$$\text{从 } 0\leqslant x_\alpha\uparrow x\in\mathbf{X} \text{ 可推出 } \sup\|x_\alpha\|=\|x\|.$$

$\mathbf{X}$ 中的范数叫做单调完备的，或叫做在 $\mathbf{X}$ 中满足条件(B)，如果从 $0\leqslant x_\alpha\uparrow$，$x_\alpha\in\mathbf{X}$，$\sup\|x_\alpha\|<\infty$ 可推出存在元素 $x\in\mathbf{X}$，使得 $x_\alpha\uparrow x$．

---

*) Yosida-Hewitt 定理屡次被推广．定理 6 的最终形式是由 Г. Я. Лозановский 与 W. Luxemburg 和 A. Zaanen 分别独立完成的．也可参见 Лозановский[3]．

**) 条件(A)和(B)是由 Л. В. Канторович 引进的，条件(C)是 Nakano 引进的．

如果类似这些条件仅对序列成立，则分别叫做序 σ-连续或条件(A_σ)，序 σ-半连续或条件(C_σ)，单调 σ-完备或条件(B_σ). 下面我们将看到，在具有 σ-有限测度的空间上的赋范理想空间情况下，相应的条件对于序列或对于有向列是等价的. 即上面引进的术语与 IV.3.2 的术语是一致的.

4.2. 我们考察条件(A). 设 $\mathbf{X}$ 是赋范 K-空间，在 Вулих-I 第 207 页已证明，由条件(A_σ)可推出 K-空间 $\mathbf{X}$ 的可数型，所以$(A)\Longleftrightarrow(A_\sigma)$*). 显然，如果在 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立，则从 $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ 也能推出按范数 $x_\alpha\to x$.

我们首先考察条件(A)与(o)-连续泛函类的联系. 对于 Banach 理想空间，在这方面的一些结果已在第六章 §1 中讨论过，这里我们给以推广并补充一些新定理.

引理 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范格，$\{x_\alpha\}$是 $\mathbf{X}$ 中使得 $x_\alpha\downarrow$ 且按弱拓扑 $x_\alpha\to x$ 的有向列，则按范数 $x_\alpha\to x$.

证. 假如不然. 这时可以认为对于所有 α

$$\|x_\alpha-x\|\geqslant\varepsilon>0. \tag{1}$$

因为根据定理 2.2 的推论 2，$x_\alpha\downarrow x$. 所以对于任何 $\alpha, x_\alpha-x\geqslant 0$. 由于 $x_\alpha\to x\ (\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$，故可找到元素 $y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_{\alpha_i}$，其中 $0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，使得$\|y-x\|<\varepsilon/2$. 取 $\alpha\geqslant\alpha_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$，这时

$$0\leqslant x_\alpha-x\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_{\alpha_i}-x,$$

由此$\|x_\alpha-x\|<\varepsilon/2$，这与(1)式矛盾.

定理 1. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范格，则 $\mathbf{X}_n^\sim\supset\mathbf{X}^*$ 的充要条件是在 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立.

证. 如果 $\mathbf{X}_n^\sim\supset\mathbf{X}^*$ 且 $0\leqslant x_\alpha\downarrow 0$，则按弱拓扑 $x_\alpha\to 0$. 这时根据引理 1 有按范数 $x_\alpha\to 0$.

如果在 $\mathbf{X}$ 中(A)成立，$f\in\mathbf{X}^*$ 且 $x_\alpha\xrightarrow{(o)}0$，则按范数 $x_\alpha\to 0$. 由此 $f(x_\alpha)\to 0$，从而 $f\in\mathbf{X}_n^\sim$.

定理 2. 设 $\mathbf{X}$ 是 Banach K-空间，则下列条件等价:

---

*) 如果 $\mathbf{X}$ 是具有条件(A_σ)的赋范 K_σ-空间，则$\mathbf{X}$ 也是具有条件(A)的K-空间. 一般来讲，从(A_σ)不能推出(A).

1) 在 $\mathbf{X}$ 中条件 (A) 成立;

2) 在 $\mathbf{X}$ 中区间是弱紧的;

3) 如果 π: $\mathbf{X}\to\mathbf{X}^{**}$ 是典型嵌入, 则 $\pi(\mathbf{X})$ 是 $\mathbf{X}^{**}$ 中的理想.

证. 1)⇒3). 因为在 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立, 所以根据定理 1 及 3.1, $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}_n^\sim$. 这时, 根据定理 2.2, $\pi(\mathbf{X})$ 是 $\mathbf{X}^{**}$ 中的理想.

3)⇒2). 在 $\mathbf{X}$ 中任取一个区间 I. 因为 $\pi(\mathbf{X})$ 是 $\mathbf{X}^{**}$ 中的理想, 所以 $\pi(I)$ 是 $\mathbf{X}^{**}$ 中的区间. 根据引理 3.1 的推论, 区间 $\pi(I)$ 是(*)-弱紧的, 而这时区间 I 是弱紧的.

2)⇒1). 根据定理 1, 只要证明 $\mathbf{X}^*\subset\mathbf{X}_n^\sim$. 设 $f\in\mathbf{X}^*$, 假设 $f\notin\mathbf{X}_n^\sim$, 则可以找到有向列 $x_\sigma\downarrow 0$ 及数 $\varepsilon>0$, 使得

$$|f(x_\sigma)|\geqslant\varepsilon. \tag{2}$$

因为可以认为, 对于所有 α, $x_1\geqslant x_\alpha$, 所以由区间的弱紧性, 可找到有向子列 $x_\beta\to x\ (\sigma(\mathbf{X},\mathbf{X}^*))$. 根据定理 2.2 的推论 2 可知, $x=0$. 由此 $f(x_\beta)\to 0$, 从而与(2)式矛盾.

现在我们考察具有条件(A)的 Banach K-空间的一个有趣的特征. 它不用序而只用 B-空间的术语表述. 首先我们推导一个辅助定理.

设 $\mathbf{X}$ 是赋范格, $\{x_n\}$ 为 $\mathbf{X}$ 中的序列, 如果 $x_n\downarrow 0$ 且 $x_n-x_{n+1}\,\mathrm{d}\,x_{n+1}\ (n\in\boldsymbol{N})$, 则称 $\{x_n\}$ 为按侧下降到零的, 并且记为 $x_n\ \overline{\ }\!\downarrow 0$.

定理 3. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范 K-空间, 在其中由 $x_n\ \overline{\ }\!\downarrow 0$ 可推出 $\|x_n\|\to 0$, 则在 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立.

证. 设 $x_n\downarrow 0$, 指定数 $\varepsilon>0$ 并设 $q_n=(x_n-\varepsilon x_1)_+$. 这时 $q_n\downarrow 0$ 并且 $[q_n]x_1\ \overline{\ }\!\downarrow 0$. 因此 $\|[q_n]x_1\|\to 0$. 因为

$$x_n=[q_n]x_n+(x_n-[q_n]x_n)\leqslant[q_n]x_1+\varepsilon x_1,$$

所以

$$\|x_n\|\leqslant\|[q_n]x_1\|+\varepsilon\|x_1\|,$$

由此 $\|x_n\|\to 0$, 即在 $\mathbf{X}$ 中条件(A_σ)成立. 前面已经指出了, 从(A_σ)可推出(A).

引理 2. 如果 $\mathbf{X}$ 是不具有条件(A)的 Banach K-空间, 则可找到序列 $\{z_n\}\subset\mathbf{X}_+$, 使得

1) $z_n\,\mathrm{d}\,z_m\ (n\neq m)$;

2) $\|z_n\|=1\ \ (n\in\boldsymbol{N})$;

3) 存在 $\sup z_n=u\in\mathbf{X}$.

证. 因为在 $\mathbf{X}$ 中不具有条件(A),所以在 $\mathbf{X}$ 中定理 3 的条件不满足. 这时存在序列 $x_n \downarrow 0$, $\|x_n\| \geqslant \varepsilon > 0$. 这个序列不是基本的. 否则的话,按范数 $x_n \to x$, 而因为 $x_n \downarrow 0$, 所以 $x = 0$, 从而与 $\|x_n\| \geqslant \varepsilon > 0$ 矛盾. 因此, 可以求得 $\delta > 0$ 及 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 使得 $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \geqslant \delta$. 令

$$z_k = \frac{x_{n_k} - x_{n_{k+1}}}{\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|}.$$

这时 1) 和 2) 显然成立, 而由估计式 $z_k \leqslant x_1/\delta$ 可推出 3).

引理 3. 设 $\mathbf{X}$ 是具有条件(A)的 Banach K-空间, 且具有弱单位元, 则空间 $\mathbf{X}^*$ 中的闭单位球 $B_{\mathbf{X}^*}$ 是(*)-弱列紧的.

证. 设 x_0 是 $\mathbf{X}$ 中的弱单位元, $I = [-x_0, x_0]$. 因为对于任何元素 $x \in \mathbf{X}_+$ 有 $x \wedge n x_0 \uparrow x$(参见 Вулих-I, 引理 IV. 2. 1), 所以由在 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立可知, 区间的线性包在 $\mathbf{X}$ 中按范数(这时也是弱)稠密. 这样, 泛函

$$\rho(f) = \sup\{|f(x)| : x \in I\}, \quad f \in \mathbf{X}^*$$

成为 $\mathbf{X}^*$ 上的范数. 把所得的赋范空间记为 $\mathbf{X}^*_\rho$. 因为在空间 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立, 所以由定理 2, 区间 I 是弱紧的. 根据 Mackey-Arens 定理(参见定理 III. 3. 8), 赋范空间 $\mathbf{X}^*_\rho$ 的共轭空间可以和区间 I 的线性包重合. 因此拓扑 $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$ 比空间 $\mathbf{X}^*_\rho$ 的弱拓扑强, 而这时在球 $B_{\mathbf{X}^*}$ 上弱拓扑 $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$ 与 $\sigma(\mathbf{X}^*_\rho, (\mathbf{X}^*_\rho)^*)$ 一致. 故把定理 VIII. 2. 1 应用于赋范空间 $\mathbf{X}^*_\rho$ 上可得, 球 $B_{\mathbf{X}^*}$ 在两种弱拓扑下都是列紧的*).

现在我们可以提出并证明上面提到的判别准则. 这是由 Г. Я. Лозановский[1]得到的.

定理 4. 在 Banach K-空间 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立, 当且仅当, 在 $\mathbf{X}$ 中不存在闭子空间 $\mathbf{Y}$, 使 $\mathbf{Y}$ 按 B-空间理论的意义与空间 $\mathbf{l}^\infty$ 同构.

证. **必要性**. 假如不然, 则存在同构 $U: \mathbf{l}^\infty \to \mathbf{Y}$, 其中 $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}$ 的闭子空间. 设 $\mathbf{Y}_0 = U(\mathbf{c}_0)$, $\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{Y}_0$ 在 $\mathbf{X}$ 中生成的带. 因为空间 $\mathbf{Y}_0$ 是可分的, 所以在 $\mathbf{Z}$ 中有弱单位元. 事实上, 若 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{Y}_0$ 中的可数稠密集合, 则容易看出, 元素 $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|x_n\|} |x_n|$ 是弱单位元.

---

*) 定理 VIII. 2. 1 是对 B-空间得到的, 但是关系式 1)⇒2) 对任意赋范空间都成立, 这是显然的, 因为赋范空间可以完备化.

设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是c_0中的基本单位向量序列，这时c_0中任意元素都可表示为$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$，其中$\xi_k\to 0$. 令

$$f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k\right)=\xi_n \qquad (n\in N).$$

则有泛函$f_n\in(c_0)^*$且$\|f_n\|=1(n\in N)$. 在Y_0上按公式

$$g_n(y)=f_n(U^{-}(y)),\quad y\in Y_0$$

定义泛函g_n. 这时$\|g_n\|\leqslant\|f_n\|\|U^{-1}\|=\|U^{-1}\|(n\in N)$. 由此，集合$\{g_n\}$按$Y_0^*$中的范数有界. 把每个泛函$g_n$保范延拓到$Z$上，得到的泛函记为$\tilde{g}_n$. 这时$\{\tilde{g}_n\}$是$Z^*$中按范数有界的集合. 根据引理3，可选出子序列$\tilde{g}_{n_m}\to\tilde{g}\in Z^*$（按拓扑$\sigma(Z^*,Z)$收敛）. 对于所有$x\in X$令

$$\tilde{\tilde{g}}_{n_m}(x)=\tilde{g}_{n_m}([Z]x),\quad \tilde{\tilde{g}}(x)=\tilde{g}([Z]x),$$

这时$\tilde{\tilde{g}}_{n_m}\to\tilde{\tilde{g}}(\sigma(X^*,X))$.

现在如果我们令$\varphi_{n_m}=U^*\tilde{\tilde{g}}_{n_m}$及$\varphi=U^*\tilde{\tilde{g}}$，则按空间$(l^\infty)^*$中的$(*)$-弱拓扑$\varphi_{n_m}\to\varphi$. 根据定理3.3，按$(l^\infty)^*$中的弱拓扑$\varphi_{n_m}\to\varphi$. 在自然嵌入之下空间$l^1$是$(l^\infty)^*$中的带（因为$l^1$显然是$(o)$-自反的）. 把这些泛函投影到这个带上. 这时容易看出，按空间l^1的弱拓扑$[l^1]\varphi_{n_m}\to[l^1]\varphi$. 事实上，因为$[l^1]$是$(l^\infty)^*$中的算子，所以$[l^1]^*$是$(l^\infty)^{**}$中的算子，并且若$\psi\in(l^1)^*=(l^\infty)^{**}$，则$[l^1]^*(\psi)\in(l^\infty)^{**}$，由此

$$([l^1]\varphi_{n_m})(\psi)=\varphi_{n_m}([l^1]^*\psi)\to\varphi([l^1]^*\psi)=([l^1]\varphi)(\psi).$$

这时根据定理VIII.3.4，在l^1中按范数$[l^1]\varphi_{n_m}\to[l^1]\varphi$. 因为$(c_0)^*=l^1$，所以我们可以把泛函$[l^1]\varphi_{n_m}$及$[l^1]\varphi$看作是$c_0$上的泛函，并且容易看出，这就是把泛函$\varphi_{n_m}$和$\varphi$由$l^\infty$简单地限制在$c_0$上. 我们指出，$[l^1]\varphi_{n_m}=f_{n_m}$. 事实上，对于任意基本单位向量$e_k$有

$$\begin{aligned}([l^1]\varphi_{n_m})(e_k)&=\varphi_{n_m}(e_k)=(U^*\tilde{\tilde{g}}_{n_m})(e_k)=\tilde{\tilde{g}}_{n_m}(Ue_k)=g_{n_m}(Ue_k)\\&=f_{n_m}(e_k),\end{aligned}$$

由此可得$[l^1]\varphi_{n_m}=f_{n_m}$. 于是我们得到，序列$\{f_{n_m}\}$按$l^1$中的范数收敛. 但这是不可能的，因为当$n\neq m$时$\|f_n-f_m\|=1$. 所得的矛盾证明了必要性成立.

充分性. 如果在X中条件(A)不成立，则我们可取引理2中的序列$\{z_n\}$. 用下列公式定义算子$U:l^\infty\to X$：如果$\xi=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$，则

$$U(\xi)=(o)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k z_k.$$

其次，对于任何 $n\in\boldsymbol{N}$ 有

$$|\xi_n|z_n\leqslant|U(\xi)|\leqslant\|\xi\|_{1^\infty}u,$$

由此

$$\|\xi\|_{1^\infty}\leqslant\|U(\xi)\|_{\mathbf{X}}\leqslant\|\xi\|_{1^\infty}\|u\|.$$

从而子空间 $\mathbf{Y}=U(\mathbf{l}^\infty)$ 与 $\mathbf{l}^\infty$ 同构，所得的矛盾证明了定理成立.

推论. 如果 Banach K-空间 $\mathbf{X}$ 是可分的，则在 $\mathbf{X}$ 中条件(A)成立.

证. 假如在 $\mathbf{X}$ 中(A)不成立，则根据定理 4，在 $\mathbf{X}$ 中有同构于 $\mathbf{l}^\infty$ 的子空间 $\mathbf{Y}$. 因为 $\mathbf{l}^\infty$ 是不可分的，所以 $\mathbf{Y}$ 是不可分的，这与 $\mathbf{X}$ 的可分性矛盾.

从这个推论可以得到在第四章中定理 IV.3.3 的我们没有证明的那一部分.

4.3. 考察条件(B)和(C). 如果 $\mathbf{X}$ 是可数型 K-空间，则显然(C)$\Longleftrightarrow$(C_σ). 因此，对于在具有 σ-有限测度空间上的赋范理想空间，这两个条件是一致的. 在一般情形并不是这样的.

条件(B)和(B_σ)甚至在可数型 K-空间中也是不同的. 然而在具有 σ-有限测度 μ 的空间上的赋范理想空间中，(B_σ)$\Longleftrightarrow$(B)，因此我们使用的术语与 IV.3.2 是一致的. 事实上，设在这样的赋范理想空间 $\mathbf{X}$中条件(B_σ)成立，并且有向列 $0\leqslant x_\alpha\uparrow$ 按 $\mathbf{X}$ 中的范数有界，而这时根据定理 IV.3.1 的推论，它是拓扑向量空间 $\mathbf{S}(T,\ \Sigma,\ \mu)$ 中的有界集. 从引理 III.1.1 的证明中知道，$\sup\limits_{\alpha}x_\alpha(t)<+\infty$ a.e. 所以，根据定理 I.6.17 的推论 2，存在 $x_0=\sup x_\alpha\in\mathbf{S}(T,\Sigma,\mu)$，并且可找到序列 $x_{\alpha_n}\uparrow x_0$. 因为$\{x_{\alpha_n}\}$也是按范数有界的，所以从(B_σ)可得 $x_0\in\mathbf{X}$. 由此在 $\mathbf{X}$ 中(B)成立.

从定理 3.2 的条件 3)可推出:

定理 5. 如果在赋范 K-空间 $\mathbf{X}$ 中(B_σ)成立，则$\mathbf{X}$按范数完备.

从下面的定理可知，具有条件(B)和(C)的空间是很多的.

定理 6. 如果 $\mathbf{X}$ 是赋范格，则在 $\mathbf{X}^*$ 中条件(B)和(C)成立.

证. 设有向列$\{f_\alpha\}\subset\mathbf{X}^*$，$0\leqslant f_\alpha\uparrow$ 按范数有界. 对于 $x\in\mathbf{X}_+$，令 $f(x)=\sup f_\alpha(x)<+\infty$，对于 $x\in\mathbf{X}$，令 $f(x)=f(x_+)-f(x_-)$. 这时 f 是 $\mathbf{X}$ 上的线性泛函，我们来证明 $f\in\mathbf{X}^*$.

任取 $\varepsilon>0$. 这时，对于任何 $x\in\mathbf{X}_+$，$\|x\|\leqslant1$，可找到 α_x，使得 $f(x)\leqslant$

$f_{\alpha_\varepsilon}(x)+\varepsilon\leqslant\|f_{\alpha_\varepsilon}\|+\varepsilon\leqslant\sup\|f_\alpha\|+\varepsilon$. 由此 $\|f\|\leqslant\sup\|f_\alpha\|<\infty$. 从而 $f\in\mathbf{X}^*$, $f_\alpha\uparrow f$, 并且 $\|f\|=\sup\|f_\alpha\|$, 即在 $\mathbf{X}^*$ 中(C)和(B)成立. 因为 $\mathbf{X}^*\cap\mathbf{X}_n^\sim$ 是 $\mathbf{X}^*$ 中的带, 所以, 在这个空间中条件(B)和(C)也成立.

下面定理给出了具有条件(C)的空间的最重要性质.

定理 7(Nakano-Amemiya-Mori). 如果 $\mathbf{X}$ 是具有全的 $\mathbf{X}_n^\sim$ 的赋范 K-空间, 则下列命题等价:

1) 在 $\mathbf{X}$ 中条件(C)成立;

2) 对于任何 $x\in\mathbf{X}$, $\|x\|=\sup\{|f(x)|:f\in\mathbf{X}^*\cap\mathbf{X}_n^\sim, \|f\|\leqslant1\}$;

3) 典型嵌入 $\pi:\mathbf{X}\to(\mathbf{X}_n^\sim\cap\mathbf{X}^*)^*$ 保持范数.

证. 1)⇒2). 把定理 VI. 1.6 搬到没有 σ-有限测度这个条件的赋范理想空间上. 再应用定理 2.5.

2)⇒3) 显然成立.

3)⇒1). 因为根据定理 6, 在 $(\mathbf{X}_n^\sim\cap\mathbf{X}^*)^*$ 中条件(C)成立.

如果 $\mathbf{X}$ 是完备的, 则 $\mathbf{X}_n^\sim\subset\mathbf{X}^*$, 我们可以考察从 $\mathbf{X}^*$ 诱导到 $\mathbf{X}_n^\sim$ 上的范数. 这时确定了 Banach K-空间 $(\mathbf{X}_n^\sim)^*$ 和 $(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim$.

定理 8. 如果 $\mathbf{X}$ 是具有全的 $\mathbf{X}_n^\sim$ 的 Banach K-空间, 则下列命题等价:

1) 在 $\mathbf{X}$ 中条件(B)和(C)成立;

2) 典型嵌入 κ: $\mathbf{X}\to(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim$ 是 $\mathbf{X}$ 到 $(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim$ 上的等距嵌入;

3) 如果 π: $\mathbf{X}\to\mathbf{X}^{**}$ 是自然嵌入, 则存在从 $\mathbf{X}^{**}$ 到 $\pi(\mathbf{X})$ 上的范数为 1 的投影算子 P;

4) $\mathbf{X}$ 中任意闭球有心系都有非空交.

证. 1)⇒2). 根据定理 7, κ 保持范数. 我们来证明 $\kappa(\mathbf{X})=(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim$. 在 2.3 中已指出, $\kappa(\mathbf{X})$ 是 $(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim$ 中的基. 因此对于任意的 $F\in(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim$, $F>0$, 可以找到有向列 $\{x_\alpha\}\subset\mathbf{X}_+$, 使得 $\kappa(x_\alpha)\uparrow F$. 这时 $\|x_\alpha\|=\|\kappa(x_\alpha)\|\leqslant\|F\|$, 又根据条件(B), $x=\sup x_\alpha$ 存在. 因为映射 κ 保界, 所以 $F=\kappa(x)\in\kappa(\mathbf{X})$.

2)⇒1). 从定理 6 及 2.2 可得.

2)⇒3). 对于 $F\in\mathbf{X}^{**}$, 用 F_1 表示 F 在 $\mathbf{X}_n^\sim$ 上的限制. 令 $F_2=[(x_n^\sim)_n^\sim](F_1)$. 这时 $F_2\in(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim=\kappa(\mathbf{X})$, 因此可找到 $x_F\in\mathbf{X}$, 使得 $F_2=\kappa(x_F)$. 令 $P(F)=\pi(x_F)$. 我们来验证 P 是所要求的投影算子. 我们来证明, 对于任何 $F=\pi(x)$ 有

$$P(F)=F.$$

因为集合 $\mathbf{X}_n^\sim$ 在 $\pi(\mathbf{X})$ 上是全的，所以只要证明 $x=x_F$. 根据

$$F_1(f)=f(x) \qquad (f\in\mathbf{X}_n^\sim),$$

可知 $F_2=\kappa(x)$. 由此 $x=x_F$.

余下要验证 $\|P\|=1$. 设 $F\in\mathbf{X}^{**}$, $\|F\|\leqslant 1$, 并且 $P(F)=\pi(x_F)$. 我们有明显的估计式

$$\|P(F)\|=\|\pi(x_F)\|=\|x_F\|=\|\kappa(x_F)\|=\|F_2\|\leqslant\|F_1\|\leqslant\|F\|.$$

由此$\|P\|\leqslant 1$. 因为已证明P把 $\pi(\mathbf{X})$ 中的元素变为本身，所以$\|P\|=1$.

3)⇒4). 设$\{B_\xi\}$是$\mathbf{X}$中闭球有心系，$\overline{B}_\xi$是 $\pi(B_\xi)$在 $\mathbf{X}^{**}$ 中的 (*)-弱闭包. 由于这些球是(*)-弱紧的，故$\bigcap\overline{B}_\xi$ 在 $\mathbf{X}^{**}$ 中非空. 设 $F\in\bigcap\overline{B}_\xi$, 这时 $P(F)\in\bigcap B_\xi$.

4)⇒1). 这是不久前 A. A. Седаев [1] 完成的一个有趣的结果. 我们请读者自己查阅此著作及其证明. 还要强调一下，性质 4)显然是等距不变的.

在 Лозановский [2] 的著作中还给出了具有条件(B)和(C)的空间的一些有趣性质.

4.4. 满足条件(A_σ)和(B_σ)的 Banach K-空间叫做 KB-空间. 在 4.2 中已指出，在 KB-空间中条件(A)也成立. 根据定理 VII. 6. 3(Вулих-I)，在 KB-空间中条件(B)也成立. 因此根据定理 8, KB-空间是(o)-自反的.

定理 9. 如果$\mathbf{X}$是 Banach 格，则下列命题等价:

1) $\mathbf{X}$是 KB-空间;

2) 如果 $\pi:\mathbf{X}\to\mathbf{X}^{**}$ 是典型嵌入，则 $\pi(\mathbf{X})$是 $\mathbf{X}^{**}$ 中的带;

3) $\mathbf{X}$ 是弱序列完备的;

4) 在$\mathbf{X}$ 中不存在这样的闭子空间 $\mathbf{Y}$, 它按 B-空间理论的意义与空间 $\mathbf{c}_0$ 同构;

5) 如果 $0\leqslant x_n\uparrow$, $x_n\in\mathbf{X}$ 且 $\sup\|x_n\|<\infty$, 则序列$\{x_n\}$按范数收敛.

证. 1)⇒2). 因为在$\mathbf{X}$ 中条件(A)成立，所以 $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}_n^\sim$. 这时，由于$\mathbf{X}$的$(o)$-自反性，根据定理 2.3, $\pi(\mathbf{X})$是 $\mathbf{X}^{**}$ 中的带.

2)⇒3). 根据定理 2.2, $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}_n^\sim$, 而这时根据定理 2.3, 空间$\mathbf{X}$ 是(o)-自反的. 由此根据定理 3.4 的推论 2, $\mathbf{X}$是弱序列完备的.

3)⇒4). 假设结论不成立. 这时在$\mathbf{X}$中存在同构于 $\mathbf{c}_0$ 的闭子空间 $\mathbf{Y}$. 因为$\mathbf{X}$是弱序列完备的，所以根据定理 III. 3. 2 的推论 1 和 3，空间 $\mathbf{Y}$ 及 $\mathbf{c}_0$ 也是弱序列完备的. 然而这是不成立的. 事实上，如果 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$，其中

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}1, & \text{如果 } k\leqslant n,\\ 0, & \text{如果 } k>n,\end{cases}$$

则从等式$(\mathbf{c}_0)^*=\mathbf{l}^1$容易得出，$\{x_n\}$是弱 Cauchy 序列. 它在$\mathbf{c}_0$中不收敛.

4)⇒5). 假设结论不成立，则可找到按范数有界的序列$\{x_n\}$，$0\leqslant x_n\uparrow$，它不按范数收敛. 令

$$\rho_n=\lim_{m\to\infty}\|x_m-x_n\|,\quad \rho=\inf\rho_n$$

(由于$\{x_n\}$的单调性，ρ_n定义中的极限是存在的). 因为$\{x_n\}$不是Cauchy 序列，所以$\rho>0$. 适当选取$\{x_n\}$，能使当$m<n$时

$$(3/4)\rho\leqslant\|x_n-x_m\|\leqslant(5/4)\rho.$$

设$\boldsymbol{\varphi}$是截断序列的空间（参见第四章3.4). 按下列公式定义算子$U:\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{X}$:

$$U(z)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x_{i+1}-x_i),$$

其中$z=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,0,0,\cdots)\in\boldsymbol{\varphi}$. 这时

$$U(z)\leqslant\|z\|(x_{m+1}-x_1),$$

由此

$$\|U(z)\|\leqslant\|z\|\|x_{m+1}-x_1\|\leqslant(5/4)\rho\|z\|. \tag{3}$$

现在，我们做$\|U(z)\|$的下界估计. 设

$$\lambda_i^+=\max(\lambda_i,0),\quad \lambda_i^-=\max(-\lambda_i,0).$$

令

$$u=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^+(x_{i+1}-x_i),\quad v=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^-(x_{i+1}-x_i).$$

这时

$$U(z)=u-v,\quad U(|z|)=u+v.$$

如果$h^+=\max\{\lambda_i^+:1\leqslant i\leqslant m\}$，$h^-=\max\{\lambda_i^-:1\leqslant i\leqslant m\}$，则$\|z\|=\max(h^+,h^-)$. 为确定起见，假设$\|z\|=h^+$. 因为

$$u=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^+(x_{i+1}-x_i)\geqslant\lambda_j^+(x_{j+1}-x_j),\quad 1\leqslant j\leqslant m,$$

所以

$$\|u\|\geqslant\lambda_j^+\|x_{j+1}-x_j\|\geqslant\lambda_j^+(3/4)\rho,\quad 1\leqslant j\leqslant m.$$

由此，$\|u\|\geqslant(3/4)\rho\|z\|$. 从而利用(3)可得

$$\|U(z)\|=\|u-v\|=\|2u-(u+v)\|\geqslant 2\|u\|-\|u+v\|$$
$$\geqslant(6/4)\rho\|z\|-\|U(|z|)\|\geqslant(1/4)\rho\|z\|. \qquad (4)$$

对照(3)式和(4)式，终于得到

$$(1/4)\rho\|z\|\leqslant\|U(z)\|\leqslant(5/4)\rho\|z\|, \quad z\in\boldsymbol{\varphi}.$$

因为空间 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\mathbf{c}_0$ 中是稠密的，所以U可扩张为 $\mathbf{c}_0$ 到$\mathbf{X}$的子空间上的同构，这与4)是矛盾的.

5)⇒1). 我们来证明，在$\mathbf{X}$中条件(A_σ)成立. 设 $x_n\downarrow 0$. 这时序列 $\{x_1-x_n\}$按范数有界，且 $0\leqslant x_1-x_n\uparrow$. 根据条件，$x_1-x_n$ 按范数收敛于某个元素 $\tilde{x}$. 因为 $x_1-x_n\uparrow x_1$，所以 $\tilde{x}=x_1$. 由此，按范数 $x_n=(x_n-x_1)+x_1\to 0$.

条件(B_σ)显然成立. 这时$\mathbf{X}$是满足条件(A_σ)和(B_σ)的 Banach K_σ-空间. 如在4.2的脚注中所指出的，$\mathbf{X}$是K-空间. 因此$\mathbf{X}$是KB-空间.

定理证明全部完毕.

定理9给出了在 Banach 格中弱序列完备的容易验证的判别条件，因为在一些具体空间中验证条件(A)和(B)是否成立，一般来说并不很困难. 首先指出，根据定理9，非自反空间 $\mathbf{L}^1(T,\Sigma,\mu)$是弱序列完备的. 此外，我们还要提到在具有有限连续测度空间上的 Orlicz 空间. 根据定理Ⅳ.3.9，Orlicz 空间$\mathbf{L}_M$是KB-空间的充要条件为函数M满足Δ_2-条件. 由此，$\mathbf{L}_M$是弱序列完备的充要条件为M满足Δ_2-条件. 类似地可得，如果M不满足Δ_2-条件，那末满足条件(A)的 Banach 基本空间$\mathbf{E}_M$也不是弱序列完备的.

KB-空间的概念还可以给出容易验证的自反性(按B-空间理论的意义)的判别准则.

定理 10(Ogasawara). 如果$\mathbf{X}$是 Banach 格，则下列命题等价:

1) $\mathbf{X}$是自反的;

2) $\mathbf{X}$与$\mathbf{X}^*$是KB-空间.

证. 1)⇒2). 因为$\mathbf{X}^*$也是自反的，所以只要证明$\mathbf{X}$是KB-空间. 但这可由自反性的定义及定理9的2)推出.

2)⇒1). 考察典型嵌入 $\pi:\mathbf{X}\to\mathbf{X}^{**}$. 因为$\mathbf{X}$是$KB$-空间，所以 $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}_n^\sim$ 并且 $\pi(\mathbf{X})=(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim=(\mathbf{X}^*)_n^\sim$. 由于$\mathbf{X}^*$是$KB$-空间，故 $\mathbf{X}^{**}=(\mathbf{X}^*)_n^\sim$，因而 $\pi(\mathbf{X})=\mathbf{X}^{**}$，可见$\mathbf{X}$是自反空间.

§5. 按测度收敛为闭的凸集

5.1. 在本节我们利用向量格理论中所述的结果证明，在(o)-自反理想

空间中研究按测度收敛为闭的有界凸集可以在确定意义下归结为在适当的拓扑向量空间中的凸紧集来研究. 并且，利用向量格的非平凡的结果的必要性，甚至在古典的 $\mathbf{L}^1(0,1)$ 空间的情况下就已经产生了.

我们先从某些预备结果开始.

设 $\mathbf{X}$ 是向量格, $\mathbf{Y}$ 是在 $\mathbf{X}$ 上全的 K-空间 $\mathbf{X}^\sim$ 中的理想. 考察在 $\mathbf{X}$ 上由半范数集合

$$p_f(x)=f(|x|),\quad x\in\mathbf{X}$$

生成的局部凸拓扑 $|\sigma|(\mathbf{X},\mathbf{Y})$，其中 f 取遍整个 $\mathbf{Y}_+$.

先指出局部凸空间 $(\mathbf{X},|\sigma|(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$ 的两个性质:

1) 拓扑 $|\sigma|(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 是在 $\mathbf{Y}$ 中的所有区间组成的集上的一致收敛的拓扑.

2) 拓扑 $|\sigma|(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 与对偶 $\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle$ 是协调的.

由关系式

$$p_f(x)=f(|x|)=\sup\{|g(x)|:|g|\leqslant f\}$$

可知 1) 成立.

根据引理 3.1 的推论，在 $\mathbf{Y}$ 中所有区间都是 $\sigma(\mathbf{Y},\mathbf{X})$-紧的, 所以由 1) 及 Mackey-Arens 定理(参见定理 III. 3.8) 可推出 2) 成立.

本节下面部分总设 $\mathbf{X}$ 是在 (T,Σ,μ) 上的基本空间, 其中测度 μ 是 σ-有限的. $\mathbf{X}_n^\sim$ 在 $\mathbf{X}$ 上是全的. 大家知道, 这时 $\mathbf{X}_n^\sim$ 与 $\mathbf{X}'$ 同构且 $\operatorname{supp}\mathbf{X}'=T$ (定理 VI. 1.1).

引理 1. 设 $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}_n^\sim$ 中的基. 如果按拓扑 $|\sigma|(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 有向列 $x_\alpha\to 0$, 则 $x_\alpha\to 0(\mu)$.

证. 由于 $\mathbf{X}_n^\sim$ 和 $\mathbf{X}'$ 是同构的, 所以基 $\mathbf{Y}$ 可与 $\mathbf{X}'$ 中的基本空间等同起来. 根据引理 IV. 3.1 的推论 2, 存在集合 T 的分划 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, 使对于任意的 $n\in N$, $\chi_{A_n}\in\mathbf{Y}$, 且 $0<\mu(A_n)<+\infty$. 这时, 对于任意的 $n\in N$ 有

$$\int_{A_n}|x_\alpha|d\mu\to 0.$$

由此, 在每个 A_n 上 $x_\alpha\to 0(\mu)$, 从而 $x_\alpha\to 0(\mu)$.

引理 2. 设 $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}_n^\sim$ 中的基. 如果有向列 $x_\alpha\to 0(\sigma(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$, 则可求得有向列 $y_\beta\to 0(\mu)$, 其中每个元素 y_β 都是 $\{x_\alpha\}$ 中元素凸组合.

证. 因为 $(\mathbf{X},|\sigma|(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$ 的共轭是 $\mathbf{Y}$, 所以存在有向列 $y_\beta\to 0(|\sigma|(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$, 其中 y_β 就是上述类型的元素(参见定理 III. 3.2 推论 2). 根据引理 1,

$y_\beta \to 0(\mu)$.

引理 3. 设 $\mathbf{Y}$ 是 $\mathbf{X}_n^\sim$ 中的基，$\{x_\alpha\}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的有向列，x、$x_0 \in \mathbf{X}$. 如果存在 $y \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$，使得对于任何 α，$|x_\alpha| \leqslant y$，而 $x_\alpha \to x(\mu)$ 和 $x_\alpha \to x_0$ $(\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$，则 $x = x_0$.

证. 根据引理 IV.3.1 推论 2，可以认为测度 μ 是有限的，且 $y \in \mathbf{X}$. 如果 $x' \in \mathbf{Y}$，则存在序列 $\{x_{\alpha_n}\}$ 使得

$$\left|\int_T (x_{\alpha_n} - x_0) x' d\mu\right| < 1/n, \quad x_{\alpha_n} \to x(\mu).$$

这时，根据 Lebesgue 控制收敛定理可知，对于任何 $x' \in \mathbf{Y}$，$\int_T (x - x_0)\, x' d\mu = 0$. 由此 $x_0 = x$.

如果 M 是 $\mathbf{S} = \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中的子集，用 $\tau(M)$ 表示从 $\mathbf{S}$ 诱导到 M 上的拓扑.

引理 4. 设 $\mathbf{X}$ 是(o)-自反的，集 $M \subset \mathbf{X}$ 按弱拓扑 $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n^\sim)$ 是有界的，则下列命题等价：

1) 在拓扑向量空间 $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ 中 M 是闭的；

2) M 在 $(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$ 中是闭的.

证. 1)⇒2) 显然成立.

2)⇒1). 因为 M 是 $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n^\sim)$ 有界的，所以它是 $|\sigma|(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n^\sim)$-有界的(参见定理 III.3.3). 设 $\{x_\alpha\} \subset M$. $x \in \mathbf{S}$，且 $x_\alpha \to x(\mu)$. 我们来证明 $x \in \mathbf{X}$. 因为 $\mathbf{X} = \mathbf{X}''$，所以只须证明对于任意 $x' \in \mathbf{X}'$ 有 $\int |xx'| d\mu < \infty$，但从 M 是 $|\sigma|(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n^\sim)$ 有界的及 Fatou 定理可知它显然成立.

5.2. 再设 $\mathbf{X}$ 是基本空间，并且 $\mathbf{X} = \mathbf{X}''$，即 $\mathbf{X}$ 是 (o)-自反的. 用 κ 表示 $\mathbf{X}$ 到 $(\mathbf{X}_n^\sim)^\sim$ 的典型嵌入，则 $\kappa(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim$ 是 K-空间 $(\mathbf{X}_n^\sim)^\sim$ 中的带. 用 Pr 表示到带 $\kappa(\mathbf{X})$ 上的投影算子.

引理 5. 设 $\{x_\alpha\}$ 是 $\mathbf{X}$ 中的有向列，若按弱拓扑 $\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$ $\kappa(x_\alpha) \to F$ 并且 $\mathrm{Pr}\, F = \pi(x)$，$x \in \mathbf{X}$，则在 $\mathbf{X}_n^\sim$ 中存在基 $\mathbf{Y}$，使得 $x_\alpha \to x(\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$.

证. 根据定理 3.6 K-空间 $(\mathbf{X}_n^\sim)^\sim$ 可分解为两个离析的带 $(\mathbf{X}_n^\sim)_n^\sim = \kappa(\mathbf{X})$ 与 $(\mathbf{X}_n^\sim)_s^\sim$ 之和. 如果 $F_1 = F - \kappa(x)$，则 $F_1 \in (\mathbf{X}_n^\sim)_s^\sim$. 这时集 $\mathbf{Y} = \{f \in \mathbf{X}_n^\sim : |F_1|(|f|) = 0\}$ 是 $\mathbf{X}_n^\sim$ 中的基. 此外，对于任何 $f \in \mathbf{Y}$ 有

$$f(x_\alpha) = [\kappa(x_\alpha)](f) \to F(f) = [\kappa(x)](f) + F_1(f) = f(x),$$

即 $x_\alpha \to x(\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$.

引理 2 和 5 是证明下面本节中基本定理的关键.

定理 1. 设$\mathbf{X}$是(o)-自反的基本空间，V是$\mathbf{X}$中的非空凸子集，W是集合$\kappa(V)$的$\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$-闭包，这时

a) 如果V在$(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$中是闭的，则

$$\mathrm{Pr}\ W=\kappa(V); \tag{1}$$

b) 如果V是$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n^\sim)$-有界的，并满足条件(1)，则$V$在$(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$中是闭的.

证. a) 设V在$(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$中闭. 显然$\kappa(V)\subset \mathrm{Pr}W$. 设$F\in W$且$\kappa(x)=\mathrm{Pr}\ F$. 这时存在有向列$\{x_\alpha\}\subset V$，使得在拓扑$\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$下$\kappa(x_\alpha)\to F$. 根据引理 5，在$\mathbf{X}_n^\sim$中存在基$\mathbf{Y}$，使得$x_\alpha\to x$ $(\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$. 因为$V$是凸的且为$(\mu)$-闭的，所以根据引理 2，$x\in V$，因而$\kappa(x)\in\kappa(V)$.

b) 因为集$\kappa(V)$是$\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$-有界的，所以根据引理 3.1 的推论，它按这个拓扑是相对紧的，因而W是紧的.

因为测度μ是σ-有限的，所以为了证明V是(μ)-闭的，只要验证由$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset V$, $x_n\to x$ a.e, $x\in\mathbf{X}$可推出$x\in V$. 因为$x_n\to x$ a.e，所以存在$y\in\mathbf{S}$，使得$|x_n|\leqslant y\,(n\in N)$.

由于W的紧性，在$\{x_n\}$中存在子有向列$\{x_\alpha\}$按拓扑$\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$收敛于某个$F\in W$. 这时根据条件(1)及引理 5，在$\mathbf{X}_n^\sim$中存在基$\mathbf{Y}$及元素$x_0\in V$，使得$x_\alpha\to x_0(\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$. 因为作为$\mu$-收敛序列的有向子列$x_\alpha\to x$ (μ)，所以由引理 3，$x=x_0\in V$. 定理全部证毕.

有了定理 1 就可以把凸有界(μ)-闭集合的研究归结为考察$\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$-紧集. 和前面一样，设$\mathbf{X}$是$(o)$-自反的基本空间.

定理 2. 设V_1和V_2是$\mathbf{X}$中互不相交的非空凸集，它们在$(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$中是闭的. 如果其中至少有一个是$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n^\sim)$-有界的. 则它们可以用$\mathbf{X}_n^\sim$中的泛函严格分离，即存在$f\in\mathbf{X}_n^\sim$，使得$\sup\{f(x):x\in V_1\}<\inf\{f(x):x\in V_2\}$.

证. 设W_i是集合$\kappa(V_i)\,(i=1,2)$的$\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$-闭包. 这时由(1)可知$W_1\cap W_2=\varnothing$. 如果，比方说，设$V_1$是有界的，则$W_1$是$\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$-紧的（参见这节定理 1 中 b）的证明）. 再用普通的分离性定理（参见定理 III.2.6)，即可得证.

定理 3. 设$\{V_\xi\}\,(\xi\in\Xi)$是空间$\mathbf{X}$中凸的、$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n^\sim)$-有界的、在$(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$中闭的子集的有心系，则$\bigcap\limits_{\xi\in\Xi} V_\xi$非空.

证. 设W_ξ是$\kappa(V_\xi)$的$\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$-闭包. 因为在此拓扑下$W_\xi$是

紧的，所以 $\bigcap W_\xi$ 非空. 这时根据定理 1 的 a)，$\bigcap_{\xi\in\Xi} V_\xi$ 非空.

定理 4. 设 V_1 和 V_2 是空间 $\mathbf{X}$ 中凸的、$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n^\sim)$-有界的，在 $(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$ 中闭的子集. 则 $V=V_1+V_2$ 是 $(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$ 中的闭集.

证. 设 W_i 是 $\kappa(V_i)$ $(i=1, 2)$ 的 $\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$-闭包，这时若 $W=W_1+W_2$，则根据定理 1 的 a)

$$\mathrm{Pr}W=\mathrm{Pr}W_1+\mathrm{Pr}W_2=\kappa(V_1)+\kappa(V_2)=\kappa(V).$$

因为 W 显然是 V 的 $\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^\sim, \mathbf{X}_n^\sim)$-闭包，则由定理 1 的 b) 可知 V 是 μ-闭的.

定理 5. 设 $\mathbf{X}$ 是具有条件(B)和(C)的 Banach 基本空间. 设 V_1 和 V_2 是 $\mathbf{X}$ 中非空凸集，它们在 $(\mathbf{X}, \tau(\mathbf{X}))$ 中是闭的. 如果其中至少有一个按 $\mathbf{X}$ 中的范数是有界的，则存在 $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$ 使得

$$\|v_1-v_2\|_{\mathbf{X}}=\inf\{\|x_1-x_2\|_{\mathbf{X}}: x_1\in V_1, x_2\in V_2\}.$$

证. 设 V_1 按范数有界. 因此最接近 V_1 的元 $v_2\in V_2$ 可以在 V_2 和半径充分大的闭球的交集中找到. 由条件(C)，根据引理 IV.3.4，这个交集是 (μ)-闭的. 所以也可认为 V_2 是按范数有界的. 设 W_i 是 $\kappa(V_i)$ $(i=1, 2)$ 的 $\sigma((\mathbf{X}_n^\sim)^*, \mathbf{X}_n^\sim)$-闭包. 因为 W_i 是 $(*)$-弱紧的，所以存在 $\widetilde{F}_1\in W_1$, $\widetilde{F}_2\in W_2$ 使得

$$\|\widetilde{F}_1-\widetilde{F}_2\|_{(\mathbf{X}_n^\sim)^*}=\inf\{\|F_1-F_2\|_{(\mathbf{X}_n^\sim)^*}: F_1\in W_1, F_2\in W_2\}.$$

因为 κ: $\mathbf{X}\to(\mathbf{X}_n^\sim)^*$ 是等距，故容易看出，根据定理 1 的 a) 属于 V_i 的元素 $v_i=\mathrm{Pr}\widetilde{F}_i$ $(i=1, 2)$ 就是所要求的.

定理 1—5 在凸分析和最优控制理论中都有应用(参见 Левин[2]；我们在 5.3 中引用了此项著作的一个结果)，5.1 和 5.2 中所述的结果是由 A. B. Бухвалов 和 Г. Я. Лозановский 得到的(参见[1]，这里还包含着其他的应用及其推广).

5.3. 利用定理 3 我们来证明关于凸泛函在按测度收敛为闭的凸集上达到极小的定理.

设泛函 p 在 $\mathbf{L}^1(T, \Sigma, \mu)$ 上给定，它可以取值 $+\infty$. 如果

$$\text{从 } x_n\to x(\mu) \text{ 可推出 } p(x)\leqslant\varliminf_{n\to\infty} p(x_n),$$

则称 p 是按测度收敛下半连续的.

泛函 p 叫做凸的，如果对于所有 $x, y\in\mathbf{L}^1$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 有

$$p(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda p(x)+(1-\lambda)p(y).$$

定理 6. 按测度收敛下半连续的凸泛函 p 在任何 $(\mathbf{L}^1, \tau(\mathbf{L}^1))$ 中闭的按范数有界的集合 $V\subset\mathbf{L}^1$ 上达到极小值.

证. 设

$$m=\inf\{p(x):\ x\in V\}.$$

取单调下降趋于 m 的数列 m_n $(m_n>m)$. 考察集合

$$V_n=\{x\in V:\ p(x)\leqslant m_n\}.$$

因为 $m_n>m$, 所以每个 V_n 都是非空的, 又因为 $m_n\downarrow$, 所以集合 V_n 的序列下降且是有心的. 由于 p 是凸的, 故 V_n 是凸集, 又由于 p 的下半连续性, 它是 $\tau(\mathbf{L}^1)$-闭的. 根据定理 3 可知, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\neq\varnothing$. 如果 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, 则 $x_0\in V$ 且对于所有 $n\in\boldsymbol{N}$, $p(x_0)\leqslant m_n$, 由此 $p(x_0)=m$.

第十一章 积分算子

§1. 算子的积分表示

1.1. 积分算子是在应用中经常遇到的一类重要的算子. 在第五章§2中,我们已经见到过积分算子. 然而,那里主要注意的是在$\mathbf{C}[a,b]$中具有连续核的算子. 本节我们要考察在理想空间中给定的具有任意可测核的积分算子.

设(S,Σ_S,ν)及(T,Σ_T,μ)是具有σ-有限测度的空间,(R,Σ_R,λ)是这两个空间的乘积空间(参见I.6.8),即$R=S\times T$及$\lambda=\nu\times\mu$.

其次,在这一节中,我们用$\mathbf{X}$表示在(T,Σ_T,μ)上的某个基本空间,而用$\mathbf{Y}$表示在(S,Σ_S,ν)*)上的某个基本空间.

称U: $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$是积分算子,如果存在λ-可测函数$K(s,t)$ $(s\in S, t\in T)$,使得对于任意的$x\in\mathbf{X}$,值$y=U(x)$是下列函数:

$$y(s)=\int_T K(s,t)x(t)d\mu(t). \tag{1}$$

函数$K(s,t)$叫做积分算子U的核. 容易看出,核是λ-几乎处处有限的.

积分算子(1)叫做从$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$内的正则算子,如果由关系式

$$z=|U|(x),\quad z(s)=\int_T |K(s,t)|x(t)d\mu(t)\quad (x\in\mathbf{X}), \tag{2}$$

*) 为确定起见,本章假设所有的空间都是实的,虽然这些结果在复的情况也成立.

所定义的算子$|U|$把 $\mathbf{X}$ 变到$\mathbf{Y}$内．并且，算子$|U|$叫做算子U的模*）．

设U：$\mathbf{X}\to\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)$ 是积分算子（1），现在列出它的一些性质：

I．算子U是线性的．

II．对于所有 $x\in\mathbf{X}_+$，$U(x)\geqslant\mathbf{0}$ 的充要条件为 $K(s,t)\geqslant 0$ λ-a. e.

命题 II 的充分性是明显的．现证必要性．据引理 IV. 3. 1 推论 2，可以认为 $\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma_T,\mu)\subset\mathbf{X}$．如果 $\mathbf{1}_T$ 是在T上恒等于一的函数，则对于 ν-几乎所有的 s 有

$$\left|\int_T K(s,t)d\mu(t)\right|=|[U(\mathbf{1}_T)](s)|<+\infty.$$

由此对于 ν-几乎所有的 s 得

$$y(s)=\int_T|K(s,t)|d\mu(t)<+\infty.$$

因为函数 $y(s)$ ν-几乎处处有限，所以存在集 S 的分划$\{B_n\}$，使得$y\chi_{B_n}\in\mathbf{L}^1(S,\Sigma_S,\nu)(n\in N)$．因此，可认为 $y\in\mathbf{L}^1(S,\Sigma_S,\nu)$，这时根据 Tonelli 定理（定理 I. 6. 12）

$$\int_R|K(s,t)|d\lambda(s,t)=\int_S y(s)d\nu(s)<+\infty,$$

即 $K\in\mathbf{L}^1(R,\Sigma_R,\lambda)$．因此由 Fubini 定理，对于任意可测集 $B\subset S$ 及 $A\subset T$ 有

$$\int_{B\times A}K(s,t)d\lambda(s,t)=\int_B[U(\chi_A)](s)d\nu(s)\geqslant 0,$$

由此 $K(s,t)\geqslant 0$ λ-a. e.（参见 I. 6. 8）．

将命题 II 用于算子 U 及$-U$，便得

---

*）积分算子 U 按此定义是正则的充要条件为 $U\in L^\sim(\mathbf{X},\mathbf{Y})$．此时，$|U|$ 正是 K-空间 $L^\sim(\mathbf{X},\mathbf{Y})$中的模（参见 I. 2. 1）．

III. 算子 $U=\mathbf{0}$ 的充要条件为 $K(s,t)=0$ λ-a. e.

IV. 由公式(2)给出的算子 $|U|$ 把 $\mathbf{X}$ 变到 $\mathbb{S}(S,\Sigma_S,\nu)$ 内.

事实上，由(1)推出，对于任何 $x\in\mathbf{X}$，对 ν-几乎所有的 $s\in S$

$$\int_T|K(s,t)x(t)|d\mu(t)<+\infty.$$

由此得出在(2)中函数 $z=|U|(x)$ 的几乎处处有限性.

V. 如果 $x_n\to\mathbf{0}(\mu)$，$|x_n|\leqslant x\in\mathbf{X}(n\in N)$，则 $[U(x_n)](s)\to 0$ ν-a. e.

性质 V 可以从 IV 及 Lebesgue 定理推出. 下面的性质 VI 是性质 V 的推论:

VI. 如果 $x_n\to\mathbf{0}$ μ-a. e. 且 $|x_n|\leqslant x\in\mathbf{X}(n\in N)$，则 $[U(x_n)](s)\to 0$ ν-a. e.

VII. 如果 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是 Banach 基本空间，而 U 是从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的积分算子，则算子 U 连续，即 $U\in B(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

这个命题可由闭图象定理(参见后面的定理XII.1.4)、引理 IV.3.2 及性质 V 推出. 用核 $K(s,t)$ 的述语来描述从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内作用的算子 U 的问题是极困难的，在这方面的一些结果到 §§2 和 3 再讨论.

VIII. 如果 U 是从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的正则积分算子(1)，而 $V:\mathbf{Y}'\to\mathbf{X}'$ 是这样的算子，使对于任何 $x\in\mathbf{X}$, $y'\in\mathbf{Y}'$ 有

$$\int_S U(x)y'd\nu=\int_T xV(y')d\mu,$$

则对于 $z=V(y')$ 有

$$z(t)=\int_S K(s,t)y'(s)d\nu(s)\quad(y'\in\mathbf{Y}'),$$

即 $V:\mathbf{Y}'\to\mathbf{X}'$ 也是正则积分算子，其核为 $K^*(t,s)=K(s,t)$.

事实上，因为算子 U 是正则的，所以对于任何 $x\in\mathbf{X}$，函数 $\int_T|K(s,t)|x(t)d\mu(t)$ 属于 $\mathbf{Y}$. 这时根据 Tonelli 定理，对于所

有的 $x\in\mathbf{X}_+$, $y'\in\mathbf{Y}'_+$ 有

$$\int_R |K(s,t)|x(t)y'(s)d\lambda(s,t)$$
$$=\int_S\left\{\int_T |K(s,t)|x(t)d\mu(t)\right\}y'(s)d\nu(s)<+\infty.$$

从而，根据 Fubini 定理，对于所有的 $x\in\mathbf{X}_+$, $y'\in\mathbf{Y}'_+$，得

$$\int_T xV(y')d\mu=\int_S U(x)y'd\nu$$
$$=\int_S\left\{\int_T K(s,t)x(t)d\mu(t)\right\}y'(s)d\nu(s)$$
$$=\int_T\left\{\int_S K(s,t)y'(s)d\nu(s)\right\}x(t)d\mu(t)=\int_T zxd\mu.$$

由此推出，函数 $V(y')$和 z 在 $\mathbf{X}$ 上定义了同一个(o)-连续泛函，根据定理 VI. 1. 1 得知，$z=V(y')$.

1.2. 本节我们要寻求从一个基本空间到另一个基本空间内的线性算子U是积分算子的条件，即可用(1)式表示的条件.

立即可看出，在离散测度的情况下事情很简单. 即，设测度μ是离散的. 这时任何从 (T,Σ_T,μ) 上的基本空间 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)$ 内的线性算子U若满足条件 VI，则它是积分算子，即在这种情况下，条件 VI 是算子为积分算子的充要条件. 事实上，因为测度 μ 是离散的，所以集合T可表示为可数个原子$\{A_n\}$的并的形式. 这时，任何 $x\in\mathbf{X}$ 可唯一地表示为

$$x=\sum_n \lambda_n \chi_{A_n}$$

的形式，其中右边的级数是几乎处处收敛的. 因为算子U满足 VI，所以

$$U(x)=\sum_n \lambda_n U(\chi_{A_n}),$$

在这里级数也是几乎处处收敛的. 当 $t\in A_n$ $(n\in N)$时，令

$$K(s,t)=\frac{1}{\mu(A_n)}[U(\chi_{A_n})](s).$$

显然，函数 $K(s,t)$是 $\nu\times\mu$-可测的．我们来证明，$K(s,t)$是算子 U 的核．对于任何 $x\in\mathbf{X}$，有

$$\int_T K(s,t)x(t)d\mu(t)=\sum_n\frac{1}{\mu(A_n)}[U(\chi_{A_n})](s)\lambda_n\mu(A_n)$$

$$=\sum_n\lambda_n[U(\chi_{A_n})](s)=[U(x)](s),$$

这就是所要证明的．

容易看出，当 $\mathbf{X}$ 是序列的基本空间时，则线性算子U: $\mathbf{X}\to\mathbf{s}$ 是积分算子的充要条件为它是矩阵算子．这就是说，存在无穷矩阵 $\{a_{ik}\}_{i=1,}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty}$，使得若 $y=U(x)$，$x=\{\xi_k\}\in\mathbf{X}$，$y=\{\eta_i\}\in\mathbf{s}$，则

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k.$$

在连续测度情形事情相当复杂，而在这种情况下从算子理论观点来看又是最有兴趣的．这时，(必要)条件 VI 已经不是充分的了．事实上，我们考察具有连续测度的空间(T,Σ_T,μ)上的基本空间 $\mathbf{X}$．用 I 表示在 $\mathbf{X}$ 上的恒等算子，则 I 显然满足条件 VI，但不满足必要条件 V，因为在连续测度情况下，容易在 $\mathbf{X}$ 中建立序列$\{x_n\}$，使它在 $\mathbf{X}$ 中有界且按测度收敛，但不是几乎处处收敛的(例如，参见 Вулих-III)．

但是，条件 V 对一般情形就是充要条件了．我们给出这个结果的精确表述，对于 $\mathbf{L}^2(D)$中的算子，这个结果已不再是平凡的了．

定理 1． 设 $\mathbf{X}$ 是(T,Σ_T,μ)上的基本空间，U:$\mathbf{X}\to\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu,$ 是线性算子，则下列命题等价：

1) U 是积分算子；

2）如果 $x_n \to 0(\mu)$ 且 $|x_n| \leqslant x \in \mathbf{X}(n \in N)$，则$[U(x_n)](s) \to 0$ ν-a.e.；

3）算子U满足条件 VI，并且由 $\chi_{A_n} \leqslant x \in \mathbf{X}(n \in N)$，$\mu(A_n) \to 0$可推出 $[U(\chi_{A_n})](s) \to 0$ ν-a.e.

前面已经指出，1）$\Longrightarrow$2）成立(参见 V)．2）$\Longrightarrow$3）显然成立．定理 1 是A. B. Бухвалов得到的(参见 Бухвалов[3]，读者可以从此文章中看到 3）$\Longrightarrow$1)的证明)，它推广了 Nakano 较早的工作．

推论．设函数 $\Phi(s, t)$(一般来说是不可测的)具有这样的性质：对于任何 $x \in \mathbf{X}$，它确定一个 ν-几乎处处有限的 ν-可测函数 $y(s) = \int_T \Phi(s, t) x(t) d\mu(t)$．我们定义算子 $U(x) = y$ $(x \in \mathbf{X})$．则存在一个 λ-可测函数 $K(s, t)$，使对于任意 $x \in \mathbf{X}$，对于 ν-几乎所有的 s(一般说，除掉的集合是与x 有关的)，有

$$[U(x)](s) = \int_T \Phi(s, t) x(t) d\mu(t) = \int_T K(s, t) x(t) d\mu(t).$$

证．对于任何 $x \in \mathbf{X}$ 有

$$\left| \int_T \Phi(s, t) x(t) d\mu(t) \right| \leqslant \int_T |\Phi(s, t) x(t)| d\mu(t) < +\infty \quad \nu\text{-a.e.}$$

(我们指出，在此不等式右边的函数可能是不可测的)，利用 Lebesgue 定理可以验证，算子U满足定理 1 的条件 2)，由此可得要求的结论．

此推论允许把核改为可测的．如果空间(T, Σ_T, μ)是可分的，则从推论容易得出，对于 ν-几乎所有的 s，等式 $K(s, t) = \Phi(s, t)$ 对于 μ-几乎所有的 t 成立(Грибанов[2])．可以指出，没有可分

这个条件时这个命题不成立.

本节余下部分，我们给出两个关于某些特殊类型算子的积分表示的定理. 利用定理 1 可容易地得出这些定理，但我们不这样做，因为它的证明和定理 1 的证明不同，不要求大量的辅助工具. 此外，在证明定理 1 时利用定理 6 的一个特殊情况.

1.3. 先考虑一个辅助命题，它本身也是有意义的.

设 E 是函数 $x\in \mathbf{S}(T, \Sigma_T, \mu)$ 的任意的非空集合，$K(s, t)$ 是在 $R=S\times T$ 上的 λ- 可测 λ-几乎处处有限的函数. 如果下面两个条件成立，则称集合 E 和函数 $K(s, t)$ 是相容的：

1) 存在这样的集合 $S_0'\subset S$，$\nu(S_0')=0$，使得对于任何 $x\in E$，对所有的 $s\in S\setminus S_0'$，函数 $K(s, t)x(t)$ 是 μ-可测的且 $\int_T K(s, t)\, x(t)d\mu(t)$ 存在*)；

2) 存在这样的集合 $S_0''\subset S$，$\nu(S_0'')=0$，使得对于任何 $x\in E$，对所有的 $s\in S\setminus S_0''$，函数

$$x_s(t)=\begin{cases}(\operatorname{sign}K(s, t))\,|x(t)|, & \text{如果 } K(s, t)\neq 0,\\ |x(t)|, & \text{如果 } K(s, t)=0\end{cases}$$

属于集合 E.

如果记 $S_0=S_0'\cup S_0''$，则 $\nu(S_0)=0$. 对于任何这样的 E 和 K，对所有 $s\in S\setminus S_0$，令

$$d_{K,E}(s)=\sup\left\{\int_T K(s, t)x(t)d\mu(t): x\in E\right\}. \tag{3}$$

现在我们来证明，逐点求上界得出的 $d_{E,K}$ 是 ν-可测的. 当 E 是不可数的且测度 μ 是不可分的情况，验证起来不很简单. E 和 K 相容的例子是：E 由非负 μ-可测函数组成而 λ-可测函数 $K(s, t)\geqslant 0$ λ-a.e. 取 $S_0''=\varnothing$，条件 2) 显然成立. 根据 Fubini 定理，

*) 并不假设这个积分有限，参见 I.6.4.

对 ν-几乎所有的 s，函数 $K(s,\cdot)\mu$-可测，而且对于 ν-几乎处处的 s 有 $K(s,t)\geqslant 0$(对 μ-几乎所有的 t 成立). 现在条件 1) 显然成立. 下面我们还要遇到其他的例子.

我们指出，对于所有的 $s\in S\setminus S_0$ 下面的等式成立:

$$d_{K,E}(s)=\sup\left\{\int_T|K(s,t)||x(t)|d\mu(t):x\in E\right\}. \tag{4}$$

事实上，显然 $d_{K,E}(s)$不大于等式(4)的右端. 如果 $x\in E$，则 $x_s\in E$，所以

$$\begin{aligned}&\int_T|K(s,t)||x(t)|d\mu(t)\\&=\int_T K(s,t)(\operatorname{sign}K(s,t))|x(t)|d\mu(t)\\&=\int_T K(s,t)x_s(t)d\mu(t)\leqslant d_{K,E}(s),\end{aligned}$$

由此得出反向的不等式. 故(4)式得证.

定理 2. 设集合 E 和函数 $K(s,t)$ 是相容的. 这时函数 $d_{K,E}(s)$ ν-可测，并且，存在函数序列 $x_n\in E$，使得

$$\sum_{i=1}^{i_0}\chi_{B_i}(s)g_i(t)$$

的全体函数的集合，其中 $B_i\in\Sigma_S(\nu)$ 两两不相交，而 $g_i\in\mathbf{L}^1(T,\Sigma_T,\mu)\cap\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma_T,\mu)$ $(1\leqslant i\leqslant i_0)$. 则集合 H 在 B-空间 $\mathbf{L}^1(R,\Sigma_R,\lambda)$ 中处处稠密.

我们记得(参见 I. 6. 4)，记号 $[x]_n$ 表示函数 x 的截断，令 $E_n=\{[x]_n: x\in E\}(n\in N)$. 这时每个集合 E_n 与函数 K 都相容. 根据 Fatou 定理，利用公式(4)可得，对于任何 $s\in S$

$$d_{K,E_n}(s)\uparrow d_{K,E}(s). \tag{5}$$

设函数

$$K_m(s,t)=\sum_{i=1}^{i_0}\chi_{B_i}(s)g_i(t)\in H.$$

显然，函数 K_m 与每个集合 E_n 都相容. 这时，因为 $B_i\cap B_{i'}=\varnothing$ $(i\neq i')$，所以对于任何 $s\in S$ 有

$$d_{K_m,E_n}(s)=\sum_{i=1}^{i_0}\left[\sup_{x\in E}\int_T g_i(t)[x]_n(t)d\mu(t)\right]\chi_{B_i}(s).$$

从而函数 d_{K_m,E_n} 是可测的，显然存在这样一个至多可数的集合 $E(n,m)\subset E$，使得对于任意的 $s\in S$

$$d_{K_m,E_n}(s)=\sup\left\{\int_T K_m(s,t)[x]_n(t)d\mu(t): x\in E(n,m)\right\}. \tag{6}$$

设函数 $K\in\mathbf{L}^1(R,\Sigma_R,\lambda)$，根据引理 1，存在这样的函数序列 $K_m\in H$，使对于任意的 m 有 $\|K_m-K\|_{\mathbf{L}^1}\leqslant 2^{-m}$. 这时在 $\mathbf{L}^1(R,\Sigma_R,\lambda)$ 中级数

$$L(s,t)=\sum_{m=1}^{\infty}|K_m(s,t)-K(s,t)|$$

收敛(因而也是 λ-几乎处处收敛的). 所以

$$|K_m(s,t)-K(s,t)|\underset{m\to\infty}{\to}0 \quad \lambda\text{-a.e},$$

并且

$$|K_m(s,t)-K(s,t)|\leqslant L(s,t) \quad \lambda\text{-a.e.}$$

我们来定义集合 $S_1\subset S$，当且仅当下列条件同时成立时 $s\in S$ 才属于集合 S_1:

1) $|K_m(s,t)-K(s,t)|\underset{m\to\infty}{\to}0 \quad \mu\text{-a.e.}$;

2) 对于所有的 $m\in N$, $|K_m(s,t)-K(s,t)|\leqslant L(s,t)$ $\mu\text{-a.e.}$;

3) 函数 $L(s,\cdot)$ μ-可积;

4) 对于所有的 m, $n\in N$, $d_{K_m,E_n}(s)<+\infty$ 且 $d_{K,E_n}(s)<+\infty$.

利用 Fubini 定理容易证明，条件 1) —4) 中的每一个对于 ν-几乎所有的 s 都成立，因而 S_1 是可测的且 $\nu(S\backslash S_1)=0$.

对于每个 $s\in S_1$ 及任意 $m,n\in N$ 有

$$|d_{K_m,E_n}(s)-d_{K,E_n}(s)|\leqslant d_{|K_m-K|,E_n}(s). \tag{7}$$

根据在积分号下取极限的 Lebesgue 定理，对于任意 $s\in S_1$ 可得

$$d_{|K_m-K|,E_n}(s)\leqslant n\int_T |K_m(s,t)-K(s,t)|d\mu(t)\xrightarrow[m\to\infty]{}0. \tag{8}$$

由(7)和(8)，对于 $s\in S_1$ 有

$$d_{K_m,E_n}(s)\xrightarrow[m\to\infty]{}d_{K,E_m}(s).\quad n\in N. \tag{9}$$

因为已经证明过，函数 d_{K_m,E_n} 是 ν-可测的，故由此推出函数 d_{K,E_n} 是 ν-可测的. 令 $E(n)=\bigcup_{m=1}^{\infty}E(n,m)$，这时，根据(6)和(9)对于所有的 $s\in S_1$ 下式成立:

$$d_{K,E_n}(s)=\sup\left\{\int_T K(s,t)[x]_n(t)d\mu(t):x\in E(n)\right\},\ n\in N \tag{10}$$

因为集合$E(n)$是至多可数的集合，所以函数 d_{K,E_n} 是ν-可测的. 这时，根据(5)函数 $d_{K,E}$也是 ν-可测的，并且根据(5)和(10)，对于所有的 $s\in S_1$ 有

$$d_{K,E}(s)=\sup\left\{\int_T K(s,t)x(t)d\mu(t):x\in E_0\right\},$$

其中$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(n)$是至多可数的集合. 这样，如果函数 $K(s,t)\lambda$-可积，则定理已证完.

在一般情况下，指定两个序列$S_n\uparrow S$, $T_n\uparrow T$，其中$S_n\in\Sigma_S(\nu)$, $T_n\in\Sigma_T(\mu)$. 函数 $K_n(s,t)=[K]_n(s,t)\chi_{S_n\times T_n}(s,t)$ 是 λ-可积的. 利用公式(4)和Fatou定理可得，对于 ν-几乎所有的 s 有$d_{K_n,E}(s)\uparrow d_{K,E}(s)$. 因为对于函数$K_n(s,t)$定理已得证，由此对$K(s,t)$定理也成立. 定理全部证毕.

推论. 如果 U: $\mathbf{X}\to\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)$是积分算子(1)，则对于所有的 $x\in\mathbf{X}_+$，在 $\mathbf{X}$ 中可以找到这样的序列$\{x_n\}$，使得$|x_n|=x$. 并且对于 ν-几乎所有的 s(一般来说，除掉的集合是与x 有关的)，

$$|U|(x)(s)=\int_T|K(s,t)|x(t)d\mu(t)$$
$$=\sup_n\int_T K(s,t)x_n(t)d\mu(t).$$

证. 指定 $x\in\mathbf{X}_+$，考察集合 $E=\{\tilde{x}\in\mathbf{X}:|\tilde{x}|=x\}$，令 $S_0=\left\{s\in S:\int_T|K(s,t)|x(t)d\mu(t)=+\infty\right\}$. 根据 IV, $\nu(s_0)=0$. 因为$\int_T|K(s,t)\tilde{x}(t)|d\mu(t)=\int_T|K(s,t)|x(t)d\mu(t)$，所以对于任意 $\tilde{x}\in E$,对于所有的 $s\in S\setminus S_0$, $\int_T K(s,t)\tilde{x}(t)d\mu(t)$存在且有限. 因此，集合$E$和函数$K(s,t)$相容，再应用定理(2)及公式(4)即可.

定理 2 较弱一些的形式，由 Ю. И. Грибанов[1]得到.

1.4. 同以前一样，首先设**X**是(T, Σ_T, μ)上的基本空间，**Y**是(S, Σ_S, ν)上的基本空间．假设**Y**是具有条件 (C)的 Banach 基本空间，以 **X**[**Y**] 表示满足下列两个条件的所有 λ-可测函数 $K(s, t)$所构成的空间:

1) 对于 μ-几乎所有的 $t \in T$, 函数 $s \to K(s, t)$属于**Y**.

2) 函数 $w_{\mathbf{Y}}(K)(t) = \|K(\cdot, t)\|_{\mathbf{Y}}$ 属于**X**;

甚至 **X**[**Y**] 是线性集合这个事实也要求应用定理 2．问题在于，函数 $w_{\mathbf{Y}}(K)$也许是不可测的(一般说，当**Y**不满足条件 (C)就有这样的可能)．设 $K(s, t)$ 是满足条件 1) 的 λ-可测函数．我们来验证函数 $w_{\mathbf{Y}}(K)$是μ-可测的．因为在**Y**中满足条件(C)，所以根据 Nakano-Amemiya-Mori 定理(参见定理 VI. 1. 6)，对于μ-几乎所有的 t 都有

$$\|K(\cdot, t)\|_{\mathbf{Y}}$$

$$= \sup\left\{\left|\int_S K(s, t) y'(s) d\nu(s)\right| : y' \in \mathbf{Y}', \|y'\| \leqslant 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\int_S |K(s, t)| y'(s) d\nu(s) : y' \in \mathbf{Y}'_+, \|y'\| \leqslant 1\right\}.$$

显然，集合 $E = \{y' \in \mathbf{Y}'_+ : \|y'\| \leqslant 1\}$和函数$|K|$相容．这时根据定理 2，函数 $w_{\mathbf{Y}}(K)$ μ-可测，且可找到序列$\{y'_n\} \subset \mathbf{Y}'_+$，$\|y'_n\| \leqslant 1$，使得

$$\|K(\cdot, t)\|_{\mathbf{Y}} = \sup_n\left\{\int_S |K(s, t)| y'_n(s) d\nu(s)\right\} \qquad \mu\text{-a. e.}$$

现在显然**X**[**Y**]是 $\mathbf{S}(R, \Sigma_R, \lambda)$ 中的线性集合，并且还是(R, Σ_R, λ)上的基本空间．

如果**X**是 Banach 基本空间，则在 **X**[**Y**] 中按公式 $\|K\| = \|w_{\mathbf{Y}}(K)\|_{\mathbf{X}}$ ($K \in \mathbf{X}[\mathbf{Y}]$)引进范数．显然，这个范数是单调的，而 **X**[**Y**]

是赋范基本空间. 可以证明，在这些条件下X[Y]按范数完备，但我们不去证明它，因为我们并不需要这个结果（参见 Бухвалов [2], [4]，那里还给出空间 X[Y] 的其他性质）. 空间 X[Y]通常叫做具有混合范数的空间.

当X是(T, Σ_T, μ)上具有条件(C)的 Banach 基本空间，而Y是(S, Σ_S, ν)上的基本空间时，类似于上面的作法，对调(S, Σ_S, ν)和(T, Σ_T, μ)的位置，可以定义空间 Y[X]和函数 $w_X(K)$.

空间 $\mathbf{L}^p$ 的推广空间 $\mathbf{L}^{p_1,p_2}$ 是具有混合范数空间的重要例子. 设 $1\leqslant p_1,\ p_2\leqslant\infty$; $\mathbf{L}^{p_1}=\mathbf{L}^{p_1}(s, \Sigma_S, \nu)$, $\mathbf{L}^{p_2}=\mathbf{L}^{p_2}(T, \Sigma_T, \mu)$. 空间 $\mathbf{L}^{p_1,p_2}$ 定义为具有混合范数的空间 $\mathbf{L}^{p_2}[\mathbf{L}^{p_1}]$，即 $\mathbf{L}^{p_1,p_2}$ 中的范数由下式给出:

$$\|K\|=\begin{cases}\left(\int_T\left(\int_S |K(s,t)|^{p_1}d\nu(s)\right)^{p_2/p_1}d\mu(t)\right)^{1/p_2}, & 1\leqslant p_1,\ p_2<\infty,\\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T}\left(\int_S |K(s,t)|^{p_1}d\nu(s)\right)^{1/p_1}, & 1\leqslant p_1<\infty,\ p_2=\infty,\\ \left(\int_T(\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in S}|K(s,t)|)^{p_2}d\mu(t)\right)^{1/p_2}, & p_1=\infty,\ 1\leqslant p_2<\infty,\\ \operatorname*{vrai\,sup}_{(s,t)\in R}|K(s,t)|, & p_1=p_2=\infty.\end{cases}$$

利用 Fubini 定理容易验证，如果 $p_1=p_2=p$，则 $\mathbf{L}^{p_1,p_2}=\mathbf{L}^{p_1}[\mathbf{L}^{p_2}]=\mathbf{L}^p(R, \Sigma_R, \lambda)$. 我们指出，对于其他的 Banach 基本空间，类似的性质不能成立，即如果 $\mathbf{X}\neq\mathbf{L}^p(T, \Sigma_T, \mu)$及 $\mathbf{Y}\neq\mathbf{L}^p(S, \Sigma_S, \nu)$，则空间 X[Y]和Y[X]，一般来讲是不同的.

引理 2. 如果X和Y是具有条件(A)的 Banach 基本空间，则

1) 在 X[Y]中条件(A)成立;

2) 形如

$$\sum_{i=1}^{i_0}\chi_{B_i}(s)x_i(t)$$

的全体函数的集合 H_1 在 $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$ 中处处稠密，其中集合 $B_i\in\Sigma_S(\nu)$ 两两不相交，$\chi_{B_i}\in\mathbf{Y}$，$x_i\in\mathbf{X}\cap\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma_T,\mu)(1\leqslant i\leqslant i_0)$.

证. 1) 如果在 $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$中 $K_n\downarrow 0$，则对于 μ-几乎所有的 t，对于ν-几乎所有的 s 有 $K_n(s,t)\downarrow 0$. 因为在$\mathbf{Y}$中条件(A)成立，所以$w_{\mathbf{Y}}(K_n)\downarrow 0$，而因为在$\mathbf{X}$中条件(A)也成立，故$\|K_n\|=\|w_{\mathbf{Y}}(K_n)\|_{\mathbf{X}}\to 0$.

2) 因为在 $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$中条件(A)成立，所以下述的函数 $K\in\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$ 的全体组成的集合在 $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$中处处稠密，这里函数 K 在某个集 $B\times A$ 之外为零，其中 $B\in\Sigma_S(\nu)$, $A\in\Sigma_T(\mu)$, $\chi_B\in\mathbf{Y}$, $\chi_A\in\mathbf{X}$. 因此，不失一般性，可以认为 $\mu(T)$、$\nu(S)<\infty$及$\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma_T,\mu)\subset\mathbf{X}$, $\mathbf{L}^\infty(S,\Sigma_S,\nu)\subset\mathbf{Y}$，根据引理 IV. 3. 3，形如

$$\sum_{i=1}^{i_0}\lambda_i\chi_{C_i}\qquad(C_i\in\Sigma_R)$$

的全体函数所成的集合在 $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$中稠密. 现在，要证明引理，显然只要用 H_1 中的函数去逼近任意的函数 χ_C, $C\in\Sigma_R$. 根据 I. 6. 8，存在集合序列 $C_n=\bigcup_{k=1}^{k(n)}B_k\times A_k$，其中 $B_k\in\Sigma_S$, $A_k\in\Sigma_T$，使得在空间 $\mathbf{L}^1(R,\Sigma_R,\lambda)$中 $\chi_{C_n}\to\chi_C$. 可以认为 $\chi_{C_n}(s,t)\to\chi_C(s,t)$ λ-a. e.（如果需要的话，可以取其中的子序列）. 因为 $\mathbf{L}^\infty(R,\Sigma_R,\lambda)\subset\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$且在 $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$中(A)成立，所以按 $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$中的范数$\chi_{C_n}\to\chi_C$，因而形如

$$L(s,t)=\sum_{i=1}^{i_0}\lambda_i\chi_{B'_i}(s)\chi_{A_i}(t)$$

的全体函数所成的集合在 $\mathbf{X}[\mathbf{Y}]$ 中稠密. 我们来证明 $L\in H_1$. 存在这样的两两不相交的集合 $B_j\in\Sigma_S$ $(1\leqslant j\leqslant j_0)$，使得每个集合 B_j

至少包含在集 $B'_1, \cdots, B'_{i_0}$ 的一个之中，而每个集 B'_i 都是某些集 $B_j(1\leqslant j\leqslant j_0)$ 的并. 考察指标集 $I_j=\{p:\quad B_j\subset B'_p,\ 1\leqslant p\leqslant i_0\}$，这时，显然，

$$L(s,t)=\sum_{j=1}^{j_0}\chi_{B_j}(s)\left(\sum_{p\in I_j}\lambda_p\chi_{A_p}(t)\right)=\sum_{j=1}^{j_0}\chi_{B_j}(s)x_j(t),$$

并且

$$x_j=\sum_{p\in I_j}\lambda_p\chi_{A_p}\in\mathbf{X}\cap\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma_T,\mu),\quad 1\leqslant j\leqslant j_0.$$

引理全部证毕.

下面我们将看到，具有混合范数的空间在算子的积分表示中起着重要的作用.

1.5. 设 $\mathbf{X}$ 是 (T,Σ_T,μ) 上的 Banach 基本空间，$\mathbf{Y}$ 是 (S,Σ_S,ν) 上的 Banach 基本空间.

如果线性算子 $U:\mathbf{X}\to\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)$ 把空间 $\mathbf{X}$ 中的单位球 $B_{\mathbf{X}}$ 变换为 $\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)$ 中的按序有界集，则称 U 是具有抽象范数的算子. 因此，在序空间 $\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)$ 中存在元素

$$|U|=\sup\{|U(x)|:\quad x\in B_{\mathbf{X}}\},$$

并称之为算子 U 的抽象范数. 具有抽象范数的算子全体的集合记为 $L_A(\mathbf{X},\mathbf{S})$. 我们指示，算子 $U\in B(\mathbf{X},\mathbf{L}^\infty)$ 的充要条件为 $U\in L_A(\mathbf{X},\mathbf{S})$ 且 $|U|\in\mathbf{L}^\infty$，并且 $\|U\|=\||U|\|_{\mathbf{L}^\infty}$. 因此，具有抽象范数的算子类是类 $B(\mathbf{X},\mathbf{L}^\infty)$ 的推广.

我们记得，在 Banach 基本空间 $\mathbf{X}'$ 中条件(C)总是成立的.

定理 3. 如果 U 是积分算子(1)，则 $U\in L_A(\mathbf{X},\mathbf{S})$ 的充要条件为 $K\in\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)[\mathbf{X}']$；并且 $|U|=w_{\mathbf{X}'}(K)$.

证. 如果 $K\in\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)[\mathbf{X}']$，则对于 $x\in\mathbf{X}$，对 ν-几乎所有的 s，有

$$|[U(x)](s)|\leqslant\int_T|K(s,t)||x(t)|d\mu(t)\leqslant$$

$$\leqslant \|K(s,\cdot)\|_{X'}\|x\|_X,$$

由此 $|U| \leqslant w_{X'}(K)$

要证明逆命题和反向不等式，需要下述引理.

引理 3. 如果积分算子 $U\in L_A(\mathbf{X},\mathbf{S})$，则算子 $|U|$（参见(2)）也是具有抽象范数的算子，并且 $|U| = \big| |U| \big|$

证. 设 $U\in L_A(\mathbf{X},\mathbf{S})$，根据定理 2 的推论，对于任意的元素 $x\in \mathbf{X}_+$，$\|x\|\leqslant 1$，存在这样的序列 $\{x_n\}$，使得 $|x_n|=x$，且

$$|U|(x)(s)=\sup_n\left|\int_T K(s,t)x_n(t)d\mu(t)\right|.$$

这时

$$|U|(x)=\sup_n|U(x_n)|\leqslant |U|,$$

由此 $|U|\in L_A(\mathbf{X},\mathbf{S})$，且 $\big| |U| \big|\leqslant |U|$. 不等式 $|U|\leqslant \big| |U| \big|$ 显然成立.

现在继续证明定理 3. 设 $U\in L_A(\mathbf{X},\mathbf{S})$，把空间 $\mathbf{X}'$ 的范数延拓到整个 $\mathbf{S}(T,\Sigma_T,\mu)$ 上，如果 $x\notin \mathbf{X}'$，便设 $\|x\|_{\mathbf{X}'}=\infty$. 这时，对于任何 $s\in\mathbf{S}$ 有

$$\|K(s,\cdot)\|_{\mathbf{X}'}$$
$$=\sup\left\{\int_T|K(s,t)|x(t)d\mu(t):\ x\in\mathbf{X}_+,\ \|x\|\leqslant 1\right\}. \qquad (11)$$

显然，$K(s,\cdot)\in\mathbf{X}'$ 的充要条件是(11)式的右端有限. 明显地，集合 $E=\{x\in\mathbf{X}_+ : \|x\|\leqslant 1\}$ 和函数 $|K(s,t)|$ 是相容的. 根据定理 2，可求出这样的序列 $\{x_n\}\subset\mathbf{X}_+$，$\|x\|\leqslant 1$，使对于 ν-几乎所有的 s 有

$$\|K(s,\cdot)\|_{\mathbf{X}'}=\sup_n\int_T|K(s,t)|x_n(t)d\mu(t).$$

从而利用引理 3，对于 ν-几乎所有的 s 我们得到

$$\|K(s,\cdot)\|_{\mathbf{X}'}=\sup_n|U|(x_n)(s)\leqslant \big| |U| \big|(s)=|U|(s).$$

由此 $K\in\mathbf{S}(S,\Sigma_S,\nu)[\mathbf{X}']$ 且 $w_{\mathbf{X}'}(K)\leqslant |U|$，定理证毕.

从定理 3 推知，积分算子 U 是 Hilbert-Schmidt 算子的充要

条件为 $U\in L_A(\mathbf{L}^2, \mathbf{S})$ 且 $|U|\in\mathbf{L}^2(S, \Sigma_S, \nu)$,

现在考察从空间 $\mathbf{L}^1=\mathbf{L}^1(T, \Sigma_T, \mu)$ 到 Banach 基本空间 $\mathbf{Y}$ 内的积分算子，我们前面已经指出(参见 VII, 1.1)，任何这样的算子都是连续的.

引理 4. 如果积分算子 $U\in B(\mathbf{L}^1, \mathbf{Y})$，其中 $\mathbf{Y}$ 是具有条件(B)和(C)的 Banach 基本空间，则积分算子 $|U|$ 也是由 $\mathbf{L}^1$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的算子，即 U 是正则的. 并且 $\|U\|=\||U|\|$*).

证. 指定元素 $x\in\mathbf{L}^1$, $x\geqslant 0$ 且考察形如

$$y=|U(x\chi_{A_1})|+\cdots+|U(x\chi_{A_n})|$$

的全体元素组成的集合 E_x，其中 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是集合 T 的一个分划. 如果 $y_1, y_2\in E_x$，则取对应于 y_1 和 y_2 的分划的子分划，得 $y\in E_x$，使得 $y\geqslant y_1\vee y_2$，因而集合 E_x 按递增有向. 对于每个 $y\in E_x$ 有

$$\|y\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|U(x\chi_{A_i})\|\leqslant\|U\|\sum_{i=1}^{n}\|x\chi_{A_i}\|_{\mathbf{L}^1}=\|U\|\|x\|_{\mathbf{L}^1}. \qquad (12)$$

所以集合 E_x 按 $\mathbf{Y}$ 中的范数有界. 根据定理 2 的推论存在序列 $\{x_n\}$，使得 $|x_n|=x$，且

$$|U|(x)(s)=\sup_n\left|\int_T K(s, t)x_n(t)d\mu(t)\right| \quad \nu\text{-a.e.}$$

如果 $A_1^n=\{t: x_n(t)>0\}$, $A_2^n=\{t: x_n(t)<0\}$, $A_3^n=\{t: x_n(t)=0\}$，则

$$|U(x_n)|\leqslant|U(x\chi_{A_1^n})|+|U(x\chi_{A_2^n})|+|U(x\chi_{A_3^n})|\in E_x.$$

设 $z_m=\sup_{n=1}^{m}|U(x_n)|$. 这时 $0\leqslant z_m\uparrow$，又因为 E_x 按递增有向，所以序列 $\{z_m\}$ 按 $\mathbf{Y}$ 中的范数有界. 由于在 $\mathbf{Y}$ 中条件 (B) 成立. 所以 $\sup z_m\in\mathbf{Y}$ 存在. 但根据 $\{x_n\}$ 的选法有 $z_m\uparrow|U|(x)$，从而 $|U|(x)$

---

*) 事实上，任意从 $\mathbf{L}^1$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的连续算子都按 I.2.1 中定义的意义是正则的. 并且所作的证明也都通得过.

$\in\mathbf{Y}$. 因为元素 x 是任意的, 所以算子 U 是正则的.

由于在 $\mathbf{Y}$ 中(C)成立, 故 $\|z_m\|\uparrow\||U|(x)\|$. 又由(12)式显然有 $\|z_m\|\leqslant\|U\|\|x\|_{\mathbf{L}^1}(m\in N)$, 所以 $\||U|\|\leqslant\|U\|$, 反向不等式显然成立. 引理证毕.

为简单起见, 记 $\mathbf{L}^1=\mathbf{L}^1(T,\Sigma_T,\mu)$, $\mathbf{L}^\infty=\mathbf{L}^\infty(T,\Sigma_T,\mu)$.

定理 4. 设 $\mathbf{Y}$ 是具有条件(B)和(C)的 Banach 基本空间, 如果 U 是积分算子(1), 则 $U\in B(\mathbf{L}^1,\mathbf{Y})$ 的充要条件为 $K\in\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]$. 并且 $\|U\|=\|K\|_{\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]}=\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in T}\|K(\cdot,t)\|_{\mathbf{Y}}$.

证. 如果 $K\in\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]$, 则对于任何 $x\in\mathbf{L}^1$ 及 $y'\in\mathbf{Y}'$, 根据 Tonelli 定理有

$$\begin{aligned}&\int_S|[U(x)](s)y'(s)|d\nu(s)\\&\quad\leqslant\int_S\left\{\int_T|K(s,t)||x(t)|d\mu(t)\right\}|y'(s)|d\nu(s)\\&\quad=\int_T\left\{\int_S|K(s,t)||y'(s)|d\nu(s)\right\}|x(t)|d\mu(t)\\&\quad\leqslant\operatorname{vrai}\sup_{t\in T}\|K(\cdot,t)\|_{\mathbf{Y}}\|y'\|\|x\|_{\mathbf{L}^1}=\|K\|_{\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]}\|y'\|\|x\|_{\mathbf{L}^1}.\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{Y}$ 满足条件 (C), 所以根据定理 VI.1.6, $\|U(x)\|\leqslant\|K\|\|x\|$, 由此 $U\in B(\mathbf{L}^1,\mathbf{Y})$, 且 $\|U\|\leqslant\|K\|$.

反之, 设 $U\in B(\mathbf{L}^1,\mathbf{Y})$. 这时共轭算子 $U^*\in B(\mathbf{Y}^*,\mathbf{L}^\infty)$. 如果 V 是 U^* 在 $\mathbf{Y}_n^\sim$ 上的限制, 则 $V\in B(\mathbf{Y}_n^\sim,\mathbf{L}^\infty)$. 由于 $\mathbf{Y}_n^\sim$ 与 $\mathbf{Y}'$ 同构, 算子 V 可以看作是从 $\mathbf{Y}'$ 到 $\mathbf{L}^\infty$ 内的算子. 这时利用 VI.1.1 中的表示, 对于任何 $x\in\mathbf{X}$ 及 $y'\in\mathbf{Y}'$, 有

$$\int_S U(x)y'd\nu=f_{y'}(U(x))=f_x(U^*(f_{y'}))=f_x(V(f_{y'}))=\int_T xV(y')d\mu.$$

因为根据引理 4, 算子 U 是正则的, 所以利用 1.1 中的性质 VIII 可得, $V:\mathbf{Y}'\to\mathbf{L}^\infty$ 是具有核 $K^*(t,s)=K(s,t)$ 的积分算子, 即对于任何 $y'\in\mathbf{Y}'$ 有

$$V(y')(t)=\int_S K^*(t, s)y'(s)d\nu(s).$$

根据定理 3, $K^*\in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}'']$ 及 $|V|=w_{\mathbf{Y}''}(K^*)$, 但由于 $w_{\mathbf{Y}''}(K^*)(t)=\|K^*(t,\cdot)\|_{\mathbf{Y}''}=\|K(\cdot, t)\|_{\mathbf{Y}''}=w_{\mathbf{Y}''}(K)(t)$, 所以 $K\in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}'']$ 且 $|V|=w_{\mathbf{Y}''}(K)$. 由定理 VI. 1. 7, $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}''$ (按元素相同及范数相等的意义). 因此 $K\in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]$ 及 $|V|=w_{\mathbf{Y}}(K)$. 其次,

$$\|U\|=\|U^*\|\geqslant\|V\|=\||V|\|_{\mathbf{L}^\infty}=\|K\|_{\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]},$$

从而 $\|U\|=\|K\|$.

1.6. 现在我们可以证明关于算子的积分表示定理. 在下述定理中设

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu), \mathbf{L}^1=\mathbf{L}^1(S, \Sigma_S, \nu), \mathbf{L}^\infty=\mathbf{L}^\infty(S, \Sigma_S, \nu).$$

定理 5. 设 $\mathbf{X}$ 是在 (T, Σ_T, μ) 上具有条件 (A) 的 Banach 基本空间, 类 $L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ 中算子 U 的一般形式由下式

$$U(x)(s)=\int_T K(s, t)x(t)d\mu(t), \quad x\in \mathbf{X} \tag{1}$$

给出, 其中 $K\in \mathbf{S}[\mathbf{X}']$, 并且 $|U|=w_{\mathbf{X}'}(K)$.

证. 不失一般性可以假设对于任何 $s\in \mathbf{S}$ 有, $|U|(s)>0$. 考察用公式

$$V(x)(s)=\frac{1}{|U|(s)}U(x)(s)$$

给出的在 $\mathbf{X}$ 上给定的算子 V. 因为 $U\in L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$, 所以 $V\in B(\mathbf{X}, \mathbf{L}^\infty)$. 如果我们证明了

$$V(x)(s)=\int_T K_1(s, t)x(t)d\mu(t), \quad x\in \mathbf{X},$$

则令 $K(s, t)=K_1(s, t)|U|(s)$, 便得

$$U(x)(s)=|U|(s)[V(x)](s)$$
$$=\int_T K_1(s, t)|U|(s)x(t)d\mu(t)=$$

$$=\int_T K(s,t)x(t)d\mu(t).$$

因而，如果我们能证明对于任意算子 $V\in B(\mathbf{X},\mathbf{L}^\infty)$ 积分表达式存在，那么注意到公式 $|U|=w_{\mathbf{X}'}(K)$ 是从定理 3 推出的，便得定理的结论.

于是，我们认为 $U\in B(\mathbf{X},\mathbf{L}^\infty)$，考察形如

$$L(s,t)=\sum_{i=1}^{i_0}\chi_{B_i}(s)x_i(t)$$

的全体函数构成的集合 H_2，其中集合 $B_i\in\Sigma_S(\nu)$ 两两不相交而 $x_i\in\mathbf{X}(1\leqslant i\leqslant i_0)$. 显然，$H_2$ 是线性集合. 根据引理 2，H_2 在 $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$ 中稠密；我们用下式定义在 H_2 上的线性泛函 φ:

$$\varphi(L)=\sum_{i=1}^{i_0}\int_S U(x_i)(s)\chi_{B_i}(s)d\nu(s).$$

请读者自行证明这个定义的合理性. 因为集合 B_i 是两两离析的，故有

$$|\varphi(L)|\leqslant\sum_{i=1}^{i_0}\int_{B_i}|U(x_i)|d\nu\leqslant\sum_{i=1}^{i_0}\nu(B_i)\|U\|\|x_i\|$$
$$=\|U\|\|L\|_{\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]},$$

如果我们把 $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$ 中的范数诱导到 H_2 上，则 φ 是 H_2 上的线性连续泛函. 因此，在空间 $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$ 上存在泛函 φ 的唯一连续扩张，我们仍用同一个符号表示它. 因为根据引理 2，在 $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$ 中条件(A)成立，所以根据定理 VI. 1. 4 的推论 2，可找到 λ-可测函数 $K(s,t)$，使得

$$\varphi(L)=\int_R L(s,t)K(s,t)d\lambda(s,t),\quad L\in\mathbf{L}^1[\mathbf{X}].$$

特别地，对于 $L(s,t)=\chi_B(s)x(t)$, $B\in\Sigma_S(\nu)$, $x\in\mathbf{X}$, 我们得到，

$$\int_B U(x)d\nu=\varphi(L)=\int_R K(s,t)\chi_B(s)x(t)d\lambda(s,t).\tag{13}$$

因为根据定理 VI. 1. 1, 函数$|K(s, t)|$在 $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$ 也生成了一个线性连续泛函, 所以用 Fubini 定理把(13)式右端变形, 便得

$$\int_B U(x)d\nu = \int_B \left\{\int_T K(s, t)x(t)d\mu(t)\right\}d\nu(s).$$

由 $B\in\Sigma_S(\nu)$ 的任意性, 就推出了表达式(1), 定理证毕.

推论. 设$\mathbf{X}$是(T, Σ_T, μ) 上具有条件 (A)的 Banach 基本空间. $\mathbf{L}^\infty=\mathbf{L}^\infty(S, \Sigma_S, \nu)$. 类 $B(\mathbf{X}, \mathbf{L}^\infty)$ 中算子U的一般形式由公式(1)给出, 其中 $K\in\mathbf{L}^\infty[\mathbf{X}']$; 并且$\|U\| = \operatorname{vrai}\sup\limits_{s\in S}\|K(s, \cdot)\|_{\mathbf{X}'}$.

从定理 5 推出了 Hilbert-Schmidt 算子和 Carleman 算子(参见 Коротков[1])的抽象特征.

在下面的定理中, 设 $\mathbf{L}^1=\mathbf{L}^1(T, \Sigma_T, \mu)$, $\mathbf{L}^\infty=\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma_T, \mu)$.

定理 6. 设$\mathbf{Y}$是 (S, Σ_S, ν) 上具有条件 (A)的 Banach 基本空间, 类 $B(\mathbf{L}^1, \mathbf{Y}')$中算子$U$的一般形式由公式

$$U(x)(s)=\int_T K(s, t)x(t)d\mu(t), \quad x\in\mathbf{L}^1 \tag{1}$$

给出, 其中 $K\in\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}']$, 并且$\|U\| = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in T}\|K(\cdot, t)\|_{\mathbf{Y}'}$.

证. 因为在 $\mathbf{Y}'$ 中条件(B)及(C)成立, 所以根据定理(4), 只须证明任何算子 $U\in B$ $(\mathbf{L}^1, \mathbf{Y}')$ 都可用积分表达式 (1)表示. 考察共轭算子 $U^*\in B((\mathbf{Y}')^*, \mathbf{L}^\infty)$. 将空间$\mathbf{Y}$典型嵌入到$(\mathbf{Y}')^*$之内, 并根据定理 VI. 1. 6, 这个嵌入是保范的. 用V表示算子 U^* 在 $\mathbf{Y}$ 上的限制. 这时 $V\in B(\mathbf{Y}, \mathbf{L}^\infty)$, 根据定理 5, 存在核 $K\in\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}']$, 使得

$$V(y)(t)=\int_S K(t, s)y(s)d\nu(s), \qquad y\in\mathbf{Y}.$$

根据引理 4, V 是正则算子, 而这时利用 1. 1 中 VIII, 用类似于定理 4 的证法容易得到, 对于U表示式(1)成立.

下面的推论是上述定理的一个重要特殊情形.

推论. 设 $\mathbf{L}^p=\mathbf{L}^p(S,\Sigma_S,\nu)$, $1<p\leqslant\infty$. 则在类$B(\mathbf{L}^1,\mathbf{L}^p)$中算子$U$的一般形式用公式

$$U(x)(s)=\int_T K(s,t)x(t)d\mu(t),\qquad x\in\mathbf{L}^1,$$

给出, 其中 $K\in\mathbf{L}^{p,\infty}$. 并且 $\|U\|=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T}\left(\int_S|K(s,t)|^p d\nu(s)\right)^{1/p}$, 如果 $1<p<\infty$; $\|U\|=\operatorname*{vrai\,sup}_{(s,t)\in R}|K(s,t)|$, 如果 $p=\infty$.

注. 这个推论不能推广到 $p=1$ 情形, 因为在 $\mathbf{L}^1(0,1)$中的恒等算子不能用积分表达式表示(参见 1.2).

算子的积分表示问题, 很早就为许多数学家所注意. 定理 5 和定理 6 的一些重要的特殊情形早在本世纪卅年代就得出了(参见 Гельфанд[1], Dunford 和 Pettis[1], Канторович 和 Вулих [1], 也可参见 Канторович, Вулих 和 Пинскер)*⁾, 在这些著作中通常用具有 Lebesgue 测度的区间 [0, 1] 代替具有测度的抽象空间, 以适当的 $\mathbf{L}^p$ 空间代替抽象 Banach 基本空间.

1.5 和 1.6 中现在这种形式的定理是在Бухвалов 文章[4]中得到的, 我们的叙述就是按此著作来写的. 在Бухвалов[3], [4] 和 Коротков[2]中我们可以找到有关在理想空间中算子积分表示的另外一些定理. 算子解析表示的许多著作都利用向量值函数(例如参见 Dinculeanu, Diestel, Phillips[1], Grothendieck[2], Коротков[2], Бухвалов[5]).

§2. 序列空间中的算子

2.1. 我们给出从空间 $\mathbf{l}^p$ 到 $\mathbf{l}^r$ 内$(1<p<\infty, 1\leqslant r\leqslant\infty)$ 连续的、特别是紧的线性算子的描述.

设U是从 $\mathbf{l}^p$ 到 $\mathbf{l}^r$ 内的连续线性算子:

---

*) 通常称定理 5 为 Канторович-Вулих 定理, 称定理 6 为 Dunford-Pettis 定理.

$$y=U(x),\quad (x=\{\xi_k\}\in \mathrm{l}^p,\quad y=\{\eta_i\}\in \mathrm{l}^r).$$

记 $f_i(x)=\eta_i$ $(i=1,2,\cdots)$. 因为

$$|f_i(x)|=|\eta_i|\leqslant\|y\|\leqslant\|U\|\|x\|,$$

所以 f_i 显然是空间 l^p内的连续线性泛函，并且 $\|f_i\|\leqslant\|U\|$. 根据关于在空间 l^p 中泛函的一般形式定理，泛函 f_i 可表示为

$$\eta_i=f_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k,$$

$$\left(z_i=\{a_{ik}\}\in \mathrm{l}^q;\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;\ \|z_i\|=\|f_i\|;\ i=1,2,\cdots\right). \tag{1}$$

这样，算子 U 自然确定了矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$a_{ik}=f_i(x_k)\quad (x_k=\underset{1}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{k-1}{0},\underset{k}{1},\underset{k+1\cdots}{0,\cdots};\ i,k=1,2,\cdots).$$

设 $x=\{\xi_k\}\in \mathrm{l}^p$, $y=\{\eta_k\}\in \mathrm{l}^r$. 仍用关于“截断”元素的表示法

$$[x_n]=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n,0,\cdots),\ [y]_n=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,\cdots),$$

除了算子 U 外，我们还考察算子 U_n 和 U_{nm}:

$$U_n(x)=[U(x)]_n,\quad U_{nm}(x)=U_n([x]_m)\qquad (x\in \mathrm{l}^p).$$

还设 $[a_{ik}]_n=\begin{cases}a_{ik} & (i\leqslant n)\\ 0 & (i>n),\end{cases}$ $\quad[a_{ik}]_{mn}=\begin{cases}a_{ik} & (i\leqslant n,\ k\leqslant m)\\ 0 & (i>n \text{ 或 } k>m).\end{cases}$

并且引进矩阵

$$[A]_n=\begin{pmatrix} [a_{11}]_n & [a_{12}]_n & \cdots & [a_{1k}]_n & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ [a_{i1}]_n & [a_{i2}]_n & \cdots & [a_{ik}]_n & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$[A]_{nm}=\begin{pmatrix} [a_{11}]_{nm} & [a_{12}]_{nm} & \cdots & [a_{1k}]_{nm} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [a_{i1}]_{nm} & [a_{i2}]_{nm} & \cdots & [a_{ik}]_{nm} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

不难验证，这些矩阵正好对应于算子 U_n 和 U_{nm}. 事实上，保持元素 x 和 $y=U(x)$ 原来的记法，此外，设 $U_n(x)=\{[\eta_k]_n\}$，$U_{nm}(x)=\{[\eta_k]_{nm}\}$，可得

$$[\eta_i]_n=\begin{cases} \eta_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k & (i\leqslant n) \\ 0 & (i>n), \end{cases}$$

即

$$[\eta_i]_n=\sum_{k=1}^{\infty}[a_{ik}]_n\xi_k \qquad (i=1, 2, \cdots).$$

由此

$$[\eta_i]_{nm}=\sum_{k=1}^{m}[a_{ik}]_n\xi_k=\sum_{k=1}^{\infty}[a_{ik}]_{nm}\xi_k \qquad (i=1, 2, \cdots).$$

我们来证明，算子序列 $\{U_n\}$ 和 $\{U_{nm}\}$ 在 l^p 中每个元素上收敛

于U.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}[y]_n=y$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}U_n(x)=\lim_{n\to\infty}[U(x)]_n=U(x)\qquad(x\in l^p).$$

还要指出, 由明显的不等式$\|[y]_n\|\leqslant\|y\|$可知$\|U_n(x)\|\leqslant\|U(x)\|\leqslant\|U\|\|x\|$, 即

$$\|U_n\|\leqslant\|U\|. \tag{3}$$

取N、M使当$m\geqslant M$, $n\geqslant N$时,

$$\|[x]_m-x\|<\varepsilon,\quad \|U_n(x)-U(x)\|<\varepsilon,$$

这时, 如果$m\geqslant M$, $n\geqslant N$, 则

$$\|U(x)-U_{nm}(x)\|\leqslant\|U(x)-U_n(x)\|+\|U_n(x)-U_n([x]_m)\|$$
$$<\varepsilon+\|U_n\|\|x-[x]_m\|\leqslant\varepsilon+\|U\|\varepsilon.$$

从而

$$\lim_{n,m\to\infty}U_{nm}(x)=U(x)\qquad(x\in l^p).$$

如果U是紧算子, 则$U_n\to U$和$U_{nm}\to U$按线性算子空间中的范数收敛.

定理1. U是紧算子的充要条件为$U_n\xrightarrow[n\to\infty]{}U$或$U_{nm}\xrightarrow[n,m\to\infty]{}U$, 即下列式子中有一个成立:

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n-U\|=0\quad 或\quad \lim_{n,m\to\infty}\|U_{nm}-U\|=0. \tag{4}$$

证. 充分性. 因为算子U_n和U_{nm}把l^p变换为有限维(n维)空间, 所以它们都是紧的. 这时, 根据定理IX.2.3, 算子$U=\lim U_n=\lim U_{nm}$也是紧的.

必要性. 用Γ表示$\|x\|\leqslant1$时值$U(x)$的集合, 因为U是紧的, 所以Γ是相对紧集. 其次考察算子V_n:

$$V_n(y)=[y]_n\qquad(y\in l^r;\ n=1,2,\cdots).$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty} V_n(y) = y \qquad (y \in \mathrm{l}^r). \tag{5}$$

因此，根据 Гельфанд 定理（定理 IX. 1. 3）在相对紧集Γ上(5)式一致收敛，即对于所有 $y\in\Gamma$ 及充分大的 n $(n\geqslant N)$有

$$\|[y]_n - y\| < \varepsilon,$$

或同样地

$$\|U_n(x) - U(x)\| < \varepsilon \qquad (\|x\| < 1,\ n\geqslant N),$$

这就意味着

$$\|U_n - U\| < \varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{6}$$

因此(4)中的第一个式子得证.

为了证明第二个式子，我们从下式开始:

$$U_N(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_N(x), 0, \cdots).$$

如果令

$$f_{im}(x) = f_i([x]_m) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\xi_k \qquad (x = \{\xi_k\} \in \mathrm{l}^p),$$

则对于充分大的 m $(m\geqslant M)$有

$$\|f_i - f_{im}\| = \left\{\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_{ik}|^q\right\}^{1/q} < \varepsilon/N \qquad (i = 1, 2, \cdots, N).$$

在此情况下

$$\begin{aligned}
&\|U_N(x) - U_{Nm}(x)\| \\
&= \|(f_1(x) - f_{1m}(x), f_2(x) - f_{2m}(x), \cdots, f_N(x) - f_{Nm}(x), 0, \cdots)\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{N}\|x\|\,\|(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots)\| = \frac{\varepsilon}{N}\|x\| N^{1/r} \leqslant \varepsilon\|x\|.
\end{aligned}$$

最后，由此及由(6)式推出的不等式$\|U_n - U_N\| \leqslant 2\varepsilon$ $(n\geqslant N)$可得

$$\begin{aligned}
&\|U_n(x) - U_{nm}(x)\| = \|U_n(x) - U_n([x]_m)\| \\
&\leqslant \|U_n(x) - U_N(x)\| + \|U_n([x]_m) - U_N([x]_m)\| \\
&+ \|U_N(x) - U_N([x]_m)\| \leqslant 2\varepsilon\|x\| + 2\varepsilon\|[x]_m\| + \varepsilon\|x\| \leqslant 5\varepsilon\|x\|.
\end{aligned}$$

此外，因为$\|U_n-U\|\leqslant\varepsilon$，故

$$\|U_{nm}-U\|\leqslant 6\varepsilon \qquad (n\geqslant N,\ m\geqslant M),$$

定理证毕.

注. 可以用另一种形式来叙述这个定理. 首先可以只限于用算子U_{nn}代替算子U_{nm}，并用自收敛来代替收敛于U. 因此可以这样叙述：算子U是紧算子的充要条件为对于任意的$\varepsilon>0$有

$$\|U_{nn}-U_{pp}\|<\varepsilon \qquad (n,\ p\geqslant N_\varepsilon).$$

现在指出，

$$\|U_{nn}\|=\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ \|x'\|\leqslant 1}}\left|\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k'\right| \tag{7}$$

$$\left(x=\{\xi_k\}\in\mathbf{l}^p,\ \ x'=\{\xi_k'\}\in\mathbf{l}^s,\ \ \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\right).$$

事实上，设$\mathbf{X}$是B-空间，用F_x表示空间$\mathbf{X}^*$中由元素$x\in\mathbf{X}$确定的泛函(参见 V. 7. 3)，这时

$$\|x\|=\|F_x\|=\sup_{\|f\|\leqslant 1}|F_x(f)|=\sup_{\|f\|\leqslant 1}|f(x)| \qquad (f\in\mathbf{X}^*).$$

如果算子U将$\mathbf{X}$变换到空间$\mathbf{Y}$内，则

$$\|U\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|U(x)|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\ \sup_{\|g\|\leqslant 1}|g(U(x))| \qquad (x\in\mathbf{X},\ g\in\mathbf{Y}^*). \tag{8}$$

把$\mathbf{X}$看成是空间$\mathbf{l}^p$，把$\mathbf{Y}$看成是空间$\mathbf{l}^r$，并取算子U_{nn}作为U，则有

$$g(U(x))=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k' \qquad (x=\{\xi_k\}\in\mathbf{l}^p), \tag{9}$$

其中序列$x'=\{\xi_k'\}\in\mathbf{l}^s$确定了泛函$g$ ($\|g\|=\|x'\|$). 比较(8)和(9)即得(7)式.

把(7)式用于差$U_{nn}-U_{pp}$(认为$n\geqslant p$)，可以把前面的条件写为下列形式：当$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\leqslant 1$，$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k'|^s\leqslant 1$时，

$$\left|\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k' - \sum_{i,k=1}^{p} a_{ik}\xi_i\xi_k'\right| < \varepsilon \qquad (p \geqslant N).$$

换言之，定理也可这样叙述：

U 是紧算子的充要条件为：对应于“截断”矩阵 $[A]_{nn}$ 的双线性形式的序列在空间 $\mathbf{l}^p$ 和 $\mathbf{l}^s$ 的单位球上一致自收敛.

这个命题实质上仍是 Hilbert 给出的.

2.2. 上面我们从给定的线性算子 U 出发，根据它确定矩阵(2). 而使我们感兴趣的是下面的问题：在什么条件下预先给定的矩阵(2)才是对应于某连续算子或紧算子的矩阵.

我们可以利用“截断”矩阵来表示算子 U_{nm}. 设

$$y = U_{nm}(x) \qquad (x = (\xi_k) \in \mathbf{l}^p,\ y = \{\eta_k\} \in \mathbf{l}^r),$$

$$\eta_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\xi_k & (i \leqslant n), \\ 0 & (i > n). \end{cases}$$

定理 2. 矩阵(2)是某个从 $\mathbf{l}^p$ 到 $\mathbf{l}^r$ 内的连续线性算子 U 的矩阵的充要条件为按此矩阵确定的算子 U_{nn}(或 U_{nm})按范数有界：

$$\|U_{nn}\| \leqslant K \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad [\text{或} \|U_{nm}\| \leqslant K (n, m = 1, 2, \cdots)]. \tag{10}$$

U 是紧算子的充要条件为算子序列 U_{nn} 自收敛：

$$\lim_{n, p \to \infty} \|U_{nn} - U_{pp}\| = 0^{*)}. \tag{11}$$

证. **必要性**. 如果算子 U 存在，则上面已证，在 $\mathbf{l}^p$ 中 $U_{nn} \to U$. 根据空间 $\mathbf{l}^p$ 和 $\mathbf{l}^r$ 的完备性，算子 U_{nn} 的范数总体有界 (Banach-Steinhaus 定理；VII. 1. 2).

当 U 是紧算子时，根据定理 1，$\lim_{n \to \infty} U_{nn} \to U$，由此直接推出(11)

---

*) 对于 $\mathbf{l}^2$ 空间的情况，定理是 Hilbert 证明的(参见 Hilbert).

式.

充分性. 首先考察算子 U_{nn} 在截断元素上的情况. 设给出元素 $x\in\mathbf{l}^p$, 使得 $[x]_m=x$. 设 $n>m$, 则

$$U_{nn}(x)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,\cdots)$$

$$(\eta_i=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\xi_k;\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,0,\cdots);\ i=1,2,\cdots,n).$$

同时, 由(10)

$$\|U_{nn}(x)\|=\left[\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^r\right]^{1/r}\leqslant K\|x\|.$$

在这种情况下序列 $\{\eta_i\}\in\mathbf{l}^r$. 因而存在

$$y=\lim_{n\to\infty}U_{nn}(x)=\{\eta_i\}.$$

于是, 序列 $\{U_{nn}\}$ 在 $\mathbf{l}^p$ 中截断元素组成的稠密集上收敛, 又因为这些算子的范数序列有界, 所以在整个 $\mathbf{l}^p$ 空间也收敛. 设

$$U(x)=\lim_{n\to\infty}U_{nn}(x)\qquad(x\in\mathbf{l}^p).$$

因为对于任意的 $x\in\mathbf{l}^p$,

$$U([x]_m)=\lim_{n\to\infty}U_{nn}([x]_m)=(\eta_1^{(m)},\eta_2^{(m)},\cdots,\eta_i^{(m)},\cdots),$$

$$\eta_i^{(m)}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\xi_k\qquad(x=\{\xi_k\};\ i=1,2,\cdots),$$

所以当 $m\to\infty$ 时得

$$U(x)=\lim_{m\to\infty}U([x]_m)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i,\cdots),$$

其中

$$\eta_i=\lim_{m\to\infty}\eta_i^{(m)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k\qquad(i=1,2,\cdots),$$

即算子 U 对应于矩阵(2).

如果条件(11)成立, 则显然

$$U=\lim_{n\to\infty}U_{nn}.$$

又因为算子 U_{nn} 是紧的，所以算子 U 也是紧的.

定理证毕.

我们给出几个推论.

推论 1. 如果 A 是对称矩阵，则它对应一个从 l^2 到 l^2 内的连续线性算子的充要条件为

$$\sup_n|\lambda_1^{(n)}|<\infty, \tag{12}$$

其中 $\lambda_1^{(n)}$ 是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

按模最大的特征值.

事实上，算子 U_{nn} 实质上是 n 维空间中的算子，这个空间是由从 $n+1$ 项开始的所有坐标均为零的元素构成的. 而这时

$$\|U_{nn}\|=|\lambda_1^{(n)}|,$$

因此，(12)式表示$\sup\limits_n\|U_{nn}\|<\infty$，这与条件(10)一致.

推论 2. 如果矩阵(2)满足条件

$$B=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\right]^{r/q}\right\}^{1/r}<\infty \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right), \tag{13}$$

则这个矩阵对应一个紧算子 U，并且

$$\|U\|\leqslant B.$$

事实上，我们估计算子 U_{nn} 的范数，有

$$\|U_{nn}(x)\|^r=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_k\right|^r\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^q\right]^{r/q}\left[\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right]^{r/p}\leqslant B^r\|x\|^r.$$

因此，$\|U_{nn}\|\leqslant B$，即(10)式成立. 所以矩阵 A 对应线性算子 U，并且 $\|U\|\leqslant B$.

设 U_n 为 2.1 中定义的算子，把对算子 U 的范数求得的估计用于差 $U-U_n$:

$$\|U-U_n\|\leqslant\left\{\sum_{i=n+1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\right]^{r/q}\right\}^{1/r},$$

由此显然有 $\lim_{n\to\infty}\|U-U_n\|=0$，所以 U 是紧的.

注 1. 如果 $p=r=2$，则条件(13)成为

$$B=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^2\right\}^{1/2}<\infty.$$

注 2. 如果 $p=1$，则条件(13)成为

$$B=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sup_k|a_{ik}|^r\right\}^{1/r}<\infty, \qquad (14)$$

其证明可以类似地进行.

§3. 函数空间中的积分算子

本节将指出，在怎样的条件下积分算子

$$y=U(x),\quad y(s)=\int_D K(s,t)x(t)\,dt \qquad (s\in D') \qquad (1)$$

是把一个函数空间 $\mathbf{X}$ 变换到另一个空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续(或紧)算子. 大部分结果是针对 $\mathbf{X}=\mathbf{L}^p(D)$，$\mathbf{Y}=\mathbf{L}^q(D')$ $(1\leqslant p,q\leqslant\infty)$ 的情况，其中 D 和 D' 分别为 μ 维和 ν 维欧氏空间*) 中的有界区域. 不失

*) 在 §§3, 4 中由于足标数量太多，我们不象本书其余部分那样用 $\mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{R}^n$ 表示有限维空间，而是用 $\mathbf{R}^\mu$ 和 $\mathbf{R}^\nu$ 来表示.

一般性，下面认为 mes $D=1$.

下面假定算子 U 的核函数 $K(s,t)$ 在 $(\mu+\nu)$ 维空间区域 $D'\times D$ 中是可测的. 因而，对于几乎所有的 $s\in D'$，函数 $K(s,t)$ 关于 t 可测，且对于几乎所有的 $t\in D$ 关于 s 可测.

本节得到的结果在 § 4 中叙述 С. Л. Соболев 嵌入定理时起着重要的作用，而嵌入定理在数学物理的微分方程理论中起着重大的作用.

本节的大部分结果是关于位势型积分的 С. Л. Соболев 定理的推广，这里和 § 4 中所叙述的材料取自 Л. В. Канторович 的论文[11].

3.1. 定理 1. 设下列条件成立:

1) 对于几乎所有的 $s\in D'$,

$$\left[\int_D |K(s,t)|^r dt\right]^{1/r}\leqslant C_1 \qquad (r>0). \tag{2}$$

2) 对于几乎所有的 $t\in D$,

$$\left[\int_{D'} |K(s,t)|^\sigma ds\right]^{1/\sigma}\leqslant C_2 \qquad (\sigma>0). \tag{3}$$

3) $q\geqslant p,\ q\geqslant\sigma,\ (1-\sigma/q)p'\leqslant r$ *) $\qquad (p,q\geqslant 1). \qquad (4)$

这时，积分算子(1)是从空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 到 $\mathbf{L}^q(D')$ 内的连续线性算子，并且**)

$$\|U\|\leqslant C_1^{1-\sigma/q}C_2^{\sigma/q}. \tag{5}$$

证. 我们对 $|y(s)|$ 做一个明显的估计:

$$|y(s)|\leqslant\int_D |K(s,t)|\,|x(t)|\,dt$$

$$=\int_D [|K(s,t)|^\sigma|x(t)|^p]^{1/q}|x(t)|^{p(1/p-1/q)}|K(s,t)|^{1-\sigma/q}dt.$$

---

*) 这里和后面撇号表示"共轭"指数，它由等式 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 确定.

**) 所述的定理是由 Х. Л. Смолицкий[1]推广的.

对后面的积分应用指数为

$$\lambda_1=q,\quad \lambda_2=\frac{1}{1/p-1/q},\quad \lambda_3=p'=\frac{p}{p-1}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}=1\right)^{*)}$$

的广义 Hölder 不等式(IV. 2. 4), 得

$$|y(s)|\leqslant\left[\int_D|K(s,t)|^{\sigma}|x(t)|^p dt\right]^{1/q}\left[\int_D|x(t)|^p dt\right]^{1/p-1/q}$$

$$\left[\int_D|K(s,t)|^{p'(1-\sigma/q)}dt\right]^{1-1/p}. \tag{6}$$

记

$$\lambda=p'(1-\sigma/q),$$

注意到 mes $D=1$ 及根据(4)有 $\lambda\leqslant r$, 再由 2)式便得

$$\left[\int_D|K(s,t)|^{\lambda}dt\right]^{1-1/p}=\left[\int_D|K(s,t)|^{\lambda}dt\right]^{\frac{1}{\lambda}(1-\sigma/q)}$$

$$\leqslant\left[\int_D|K(s,t)|^{r}dt\right]^{\frac{1}{r}(1-\sigma/q)}\leqslant C_1^{1-\sigma/q}.$$

把上式代入(6)式, 得$|y(s)|$的估计:

$$|y(s)|\leqslant\left[\int_D|K(s,t)|^{\sigma}|x(t)|^p dt\right]^{1/q}\|x\|^{1-p/q}C_1^{1-\sigma/q}. \tag{7}$$

籍助此式来估计$\|y\|$, 得

$$\|y\|=\left[\int_{D'}|y(s)|^q ds\right]^{1/q}$$

$$\leqslant\left\{\int_{D'}\int_D|K(s,t)|^{\sigma}|x(t)|^p dt\,ds\right\}^{1/q}\|x\|^{1-p/q}C_1^{1-\sigma/q}$$

$$=C_1^{1-\sigma/q}\left\{\int_D|x(t)|^p\left(\int_{D'}|K(s,t)|^{\sigma}ds\right)dt\right\}^{1/q}\|x\|^{1-p/q}\leqslant$$

---

*) 我们假设 $q>p>1$, 请读者考虑 $p=q$ 的情况. 在注 3 中考虑了 $p=1$ 的情况.

$$\leqslant C_1^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q} \|x\|,$$

这就证明了定理的论断.

注 1. 如果条件 3) 中的要求 $q \geqslant \sigma$ 不满足，那么关于(1) 是从 $\mathbf{L}^p$ 到 $\mathbf{L}^q$ 内的连续算子的基本结果仍然成立. 事实上，如果 $q < \sigma$, 则用 $q_1 = \sigma$ 代替 q, 不等式(4)是成立的. 而这时 U 是从 $\mathbf{L}^p$ 到 $\mathbf{L}^{q_1}$ 内的连续算子，它也是从 $\mathbf{L}^p$ 到 $\mathbf{L}^q$ 内的连续算子（因为 $q < q_1$).

如果条件 $q \geqslant p$ 也不成立，则由(4)式用 $q_1 = p$ 代替 q 得到的不等式

$$p'(1-\sigma/p) \leqslant r \tag{8}$$

成立时, U 也是从 $\mathbf{L}^p$ 到 $\mathbf{L}^q$ 内的连续算子.

我们指出, 如果 $\sigma \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, 则(8)式成立.

注 2. $\operatorname{mes} D = 1$ 的限制显然不是本质性的. 对区域 D 作相似变换, 总可以使其满足要求. 此时, 在某些估计中可能出现只依赖于 $\operatorname{mes} D$ 和指数的因子 A.

注 3. 我们指出当 $p=1$ 时定理的极限情况，即讨论从 $\mathbf{L}^1(D)$ 到 $\mathbf{L}^q(D')$ 内的算子. 在这种情况下，定理的条件简化了，即只要对于几乎所有的 $t \in D$, 条件

$$\left[\int_{D'} |K(s, t)|^q ds\right]^{1/q} \leqslant C_2 \tag{3'}$$

成立, 算子 U 就是从 $\mathbf{L}^1(D)$ 到 $\mathbf{L}^q(D')$ 内的连续算子. 并且对于算子 U 的范数有估计式

$$\|U\| \leqslant C_2.$$

于是, 条件 1) 和 3) 去掉了, 而条件 2) 对 $\sigma = q$ 时应成立.

在这种情况下, 定理的证明也简化了，因为在给出(6)式时少了最后的因子, 只要利用通常的 Hölder 不等式就够了.

注 4. 我们指出另一种重要的, 即 $q = \infty$ 时的情况. 在这种情

况下，定理可这样叙述：如果条件(2)对某个 $r\geqslant p'$ 成立，则积分算子(1)把 $\mathbf{L}^p(D)$ 变换到 $\mathbf{L}^\infty(D')$ 内，算子 U 的范数估计的不等式为

$$\|U\|\leqslant C_1.$$

在这种情况下，直接把 Hölder 不等式用于(1)，就可以得到它的证明.

注 5. 当不等式(2)的右端与 s 有关时，即不等式(2)和(3)变为下式时：

$$\left[\int_D |K(s,t)|^r dt\right]^{1/r}\leqslant C_1\Psi(s), \tag{2a}$$

$$\left\{\int_{D'}[|K(s,t)|(\Psi(s))^{q/\sigma-1}]^\sigma ds\right\}^{1/\sigma}\leqslant C_2, \tag{3a}$$

定理仍然成立，特别，不等式(5)也成立.

3.2. 我们转而描述紧算子. 首先证明一个简单的定理.

定理 2. 如果积分算子(1)的核在区域 $D\times D'$ 内 r' 次可积，这里 $r=\min(p,q')$，即有

$$\left[\int_{D'}\int_D |K(s,t)|^{r'} dt\,ds\right]^{1/r'}\leqslant C<\infty, \tag{9}$$

则它是从 $\mathbf{L}^p(D)$ 到 $\mathbf{L}^q(D')$ 内的紧算子. 并且

$$\|U\|\leqslant AC, \tag{10}$$

其中可取

$$A=[\operatorname{mes} D']^{\frac{1}{q(r'/q)'}}$$

证. 首先证明上述对算子 U 的范数的估计的正确性. 利用 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}|y(s)|&\leqslant\left[\int_D |K(s,t)|^{r'} dt\right]^{1/r'}\left[\int_D |x(t)|^r dt\right]^{1/r}\\&\leqslant\left[\int_D |K(s,t)|^{r'} dt\right]^{1/r'}\left[\int_D |x(t)|^p dt\right]^{1/p}\\&=\|x\|\left[\int_D |K(s,t)|^{r'} dt\right]^{1/r'}.\end{aligned}$$

由此

$$\|y\|=\left[\int_{D'}|y(s)|^{q}ds\right]^{1/q}$$

$$\leqslant\|x\|\left\{\int_{D'}\left[\int_{D}|K(s,t)|^{r'}dt\right]^{q/r'}ds\right\}^{1/q}.$$

注意到 $r\leqslant q'$，因而有 $r'\geqslant q$. 对于外层积分应用指数为 r'/q 和 $(r'/q)'$ 的 Hölder 不等式得

$$\|y\|\leqslant\|x\|\left\{\int_{D'}\left[\int_{D}|K(s,t)|^{r'}dt\right]ds\right\}^{1/r'}$$

$$\left\{\int_{D'}1^{(r'/q)'}ds\right\}^{\left(q\left(\frac{r'}{q}\right)'\right)^{-1}}$$

$$\leqslant AC\|x\|,$$

由此推出(10).

核K是空间 $\mathbf{L}^{r'}(D'\times D)$中的元素，所以，可求得这样的连续核$K_n$的序列，使得

$$\left[\int_{D'}\int_{D}|K(s,t)-K_n(s,t)|^{r'}dt\,ds\right]^{1/r'}\leqslant\varepsilon_n$$

$$(n=1,2,\cdots),\qquad(11)$$

其中 $\varepsilon_n\to 0$. 用 U_n 表示核为 $K_n(s,t)$的积分算子，我们得到 U_n是紧的(参见 IX. 2. 1)，根据(10)和(11)

$$\|U_n-U\|\leqslant A\varepsilon_n\qquad(n=1,2,\cdots),$$

即序列$\{U_n\}$收敛于U. 于是，算子U也是紧的(定理 IX. 2. 3).

注. 如果核 $K(s,t)$满足条件

$$B=\left\{\int_{D'}\left[\int_{D}|K(s,t)|^{p'}dt\right]^{q/p'}ds\right\}^{1/q}<\infty,\qquad(12)$$

则算子U是从 $\mathbf{L}^{p}(D)$到 $\mathbf{L}^{q}(D')$内的紧算子，并且$\|U\|\leqslant B$.

此命题的证明与定理的证明类似.

定理 3. 设定理 1 中条件 1）和 2）仍成立，而条件 3）具有更强的形式

$$q \geqslant p,\ \ q > \sigma,\ \ (1-\sigma/q)p' < r, \tag{13}$$

则积分算子(1)是从 $\mathbf{L}^p(D)$ 到 $\mathbf{L}^q(D')$ 内的紧算子.

证. 取数 $\rho < r$, 使得条件(4)

$$(1-\sigma/q)p' < \rho$$

成立, 引进核 $K_n(s, t)$, 令

$$K_n(s, t) = \begin{cases} -n & (-n > K(s, t)), \\ K(s, t) & (-n \leqslant K(s, t) \leqslant n), \\ n & (K(s, t) > n). \end{cases}$$

估计量

$$C_1^{(n)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in D'} \left\{ \int_D |K(s, t) - K_n(s, t)|^\rho dt \right\}^{1/\rho}$$

$$\leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in D'} \left\{ \int_{A_n(s)} |K(s, t)|^\rho dt \right\}^{1/\rho},$$

其中 $A_n(s)$ 表示 D 中满足条件 $|K(s, t)| > n$ 的点的全体. 如果 $t \in A_n(s)$, 则因为 $|K(s, t)| > n$,

$$|K(s, t)|^\rho \leqslant \frac{1}{n^{r-\rho}} |K(s, t)|^r,$$

因此

$$C_1^{(n)} \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in D'} \left\{ \int_{A_n(s)} \frac{1}{n^{r-\rho}} |K(s, t)|^r dt \right\}^{\frac{1}{r} \cdot \frac{r}{\rho}}$$

$$\leqslant n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho}.$$

和前面一样, 用 U_n 表示核为 $K_n(s, t)$ 的算子, 对算子 $U - U_n$ 应用定理 1 的估计式(5)(以 $C_1^{(n)} \leqslant n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho}$ 替代 C_1), 得

$$\|U - U_n\| \leqslant (n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho})^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q},$$

由此推出 $\lim\limits_{n\to\infty} \|U - U_n\| = 0$.

因为算子 U_n 的核有界, 所以它的任意次幂是可积的; 于是, 根据定理 2, 算子 U_n 是紧的. 因而, 作为紧算子序列极限的算子 U 也是紧的(定理 IX. 2. 3).

注 1. 如果在条件(13)中第三式等号成立，但存在这样的递增函数 $\Phi(\lambda)(\lambda\geqslant 0)$，使得 $\Phi(\lambda)/\lambda$ 是递增的，且当 $\lambda\to\infty$时它趋于无穷，并且不等式(2)在较强形式

$$\left\{\int_D[\Phi(|K(s,t)|)]^r dt\right\}^{1/r}\leqslant C_1$$

下成立，这时定理的结论仍然有效。

注 2. 当D和D'是任意的具有有限测度的空间时，定理 1—3 仍成立(在证明时只需作不大的改变)。并且还可以把它推广到广泛的理想空间类上去。

3.3. 下面我们引进函数空间 $\mathrm{Lip}\beta$，它是由定义在区域 D' 内并在其中满足指数为 β $(0<\beta\leqslant 1)$的 Lipschitz 条件的全体函数构成的；于是，$y\in\mathrm{Lip}\beta$ 就意味着存在常数 B 使得

$$|y(s+\Delta s)-y(s)|\leqslant B|\Delta s|^\beta \quad (\text{线段}[s,s+\Delta s]\text{属于 } D'),$$

其中把$|\Delta s|$理解为在 ν 维空间中向量 Δs 的长度。显然，任何函数 $y\in\mathrm{Lip}\beta$ 都可以唯一地连续延拓到闭包 $\bar{D}'$ 上。事实上，如果 $s_n\to s$，$s_n\in D'$，$s\in\bar{D}'$，则

$$|y(s_n)-y(s_m)|\leqslant B|s_n-s_m|^\beta\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0.$$

因而$\{y(s_n)\}$是 Cauchy 序列，由此，$y(s)=\lim y(s_n)$存在。又利用 Lipschitz 条件可验证 $y(s)$ 不依赖于 $s_n\to s$ 的选法。因为延拓后的函数 y 显然在 $\bar{D}'$ 上满足指数为 β 的 Lipschitz 条件，所以 y 在紧集 $\bar{D}'$ 上连续。于是，$\mathrm{Lip}\beta$ 自然嵌入 $\mathbf{C}(D')$内(参见 IV.4.4)。在 $\mathrm{Lip}\beta$ 中范数用下列式子

$$\|y\|=\sup_{[s,s+\Delta s]\subset D'}\frac{|y(s+\Delta s)-y(s)|}{|\Delta s|^\beta}+\sup_{s\in D'}|y(s)|=C_\beta(y)+\|y\|_{\mathbf{C}}$$

来定义。读者自行验证，这时 $\mathrm{Lip}\beta$ 构成 B-空间。

下面我们更详细地考察当集合D和D'在同一个空间中，而核$K(s,t)$的所有奇点都集中在集合 $D'\times D$ 的“对角线”上，即 $s=t$ 时这种情况下的积分算子 (1)。对于 $s\neq t$ 假设核关于点 s 的坐标可微。用$|s-t|$表示点 s 和 t 之间的距离，换句话说，表示向量 $s-t$ 的长度。

对于上述情况，下述定理成立。

定理 4. 设核$K(s,t)$满足条件

1) $$\left\{\int_D[|\mathrm{grad}_s K(s,t)|\cdot|s-t|^{1-\beta}]^r dt\right\}^{1/r}\leqslant E, \tag{14}$$

其中用 grad_s 表示关于变量 s 的梯度；

2) $$\left\{\int_D\left[\frac{|K(s,t)|}{|s-t|^\beta}\right]^r dt\right\}^{1/r}\leqslant F. \tag{15}$$

这时积分算子(1)把空间 $\mathbf{L}^{r'}(D)$ (及任意的 $L^p(D)$, $p\geqslant r'$) 映射为空间 $\mathrm{Lip}\beta$, 并且

$$C_\beta(y)\leqslant[E+(2^\beta+3^\beta)F]\|x\|. \tag{16}$$

证. 任取一个完全属于 D' 内的线段 $[s, s+\Delta s]$. 对于函数 $y=U(x)$ 沿着这个线段的增量有

$$\begin{aligned}|y(s+\Delta s)-y(s)|&=\left|\int_D[K(s+\Delta s,t)-K(s,t)]x(t)dt\right|\\&\leqslant\left[\int_D|K(s+\Delta s,t)-K(s,t)|^r dt\right]^{1/r}\|x\|_{L^{r'}}.\end{aligned} \tag{17}$$

为了估计第一个因子, 把积分区域分为两部分: D_1 是 D 和球 $|t-s|\leqslant 2|\Delta s|$ 的交集而 $D_2=D\backslash D_1$. 对于 $|K(s,t)|^r$ 关于 D_1 的积分有

$$\left[\int_{D_1}|K(s,t)|^r dt\right]^{1/r}=\left[\int_{D_1}\left(\frac{|K(s,t)|}{|s-t|^\beta}\right)^r|s-t|^{\beta r}dt\right]^{1/r}\leqslant(2|\Delta s|)^\beta F.$$

因为

$$|s+\Delta s-t|\leqslant|s-t|+|\Delta s|\leqslant 3|\Delta s|,$$

对 $|K(s+\Delta s,t)|^r$ 的积分有类似的估计, 只是因子用 3^β 代替 2^β. 由此可得

$$\begin{aligned}I_1&=\left[\int_{D_1}|K(s+\Delta s,t)-K(s,t)|^r dt\right]^{1/r}\\&\leqslant\left[\int_{D_1}|K(s+\Delta s,t)|^r dt\right]^{1/r}+\left[\int_{D_1}|K(s,t)|^r dt\right]^{1/r}\\&\leqslant(2^\beta+3^\beta)F|\Delta s|^\beta.\end{aligned} \tag{18}$$

其次

$$\begin{aligned}I_2&=\left[\int_{D_2}|K(s+\Delta s,t)-K(s,t)|^r dt\right]^{1/r}\\&\leqslant\left\{\int_{D_2}\left[\int_s^{s+\Delta s}|\mathrm{grad}_s K(\lambda,t)|d\lambda\right]^r dt\right\}^{1/r}\ ^{*)}.\end{aligned}$$

同时, 因为 $t\in D_2$, 所以

---

*) 表达式 $\int_s^{s+\Delta s}\varphi(\lambda)d\lambda$ 应理解为在线段 $[s, s+\Delta s]$ 上的积分.

$$|\lambda-t|\geqslant|s-t|-|\lambda-s|\geqslant|s-t|-|\Delta s|\geqslant\frac{1}{2}|s-t|,$$

因而

$$I_2\leqslant 2^{1-\beta}\left\{\int_{D_2}\left[\int_s^{s+\Delta s}|\mathrm{grad}_s K(\lambda,t)|\,|\lambda-t|^{1-\beta}d\lambda\right]^r\frac{dt}{|s-t|^{r(1-\beta)}}\right\}^{1/r}$$

$$\leqslant 2^{1-\beta}\left\{\int_{D_2}\left[\int_s^{s+\Delta s}(|\mathrm{grad}_s K(\lambda,t)|\,|\lambda-t|^{1-\beta})^r d\lambda\right]\right.$$

$$\left.\left[\int_s^{s+\Delta s}1\cdot d\lambda\right]^{r/r'}\frac{dt}{|s-t|^{r(1-\beta)}}\right\}^{1/r}$$

$$\leqslant\frac{2^{1-\beta}|\Delta s|^{1/r'}}{(2|\Delta s|)^{1-\beta}}\left\{\int_s^{s+\Delta s}d\lambda\int_{D_2}[|\mathrm{grad}_s K(\lambda,t)|\,|\lambda-t|^{1-\beta}]^r dt\right\}^{1/r}$$

$$\leqslant|\Delta s|^{\frac{1}{r'}+\beta-1+\frac{1}{r}}E=|\Delta s|^{\beta}E. \tag{19}$$

对照(18)和(19)得

$$\left[\int_D|K(s+\Delta s,t)-K(s,t)|^r dt\right]^{1/r}\leqslant I_1+I_2\leqslant[E+(2^\beta+3^\beta)F]|\Delta s|^\beta,$$

而这时根据(17),

$$\frac{|y(s+\Delta s)-y(s)|}{|\Delta s|^\beta}\leqslant[E+(2^\beta+3^\beta)F]\|x\|,$$

从而得(16)式.

由条件(15), U 是从 $\mathbf{L}^r(D)$ 到 $\mathbf{L}^\infty(D')$ 内的连续算子 (参见定理 1 的注 4), 由此可得 $y(s)$ 模的最大值的估计

$$\max|y(s)|\leqslant A\|x\|.$$

由这个不等式及(16)式便证得算子 U 的连续性.

注 1. 因为在 $\mathrm{Lip}\beta$ 中范数有界的函数是同等连续和一致有界的, 所以从证得的定理可知, 若核 $K(s,t)$ 关于某个 $\beta>0$ 满足条件(14)和(15), 则把算子(1)看作从 $\mathbf{L}^r(D)$ 到 $\mathbf{C}(D')$ 内的算子, 它便是紧的.

注 2. 当 $p=\infty$ 时定理的结论仍成立. 即如果条件(14)和(15)对 $r=1$ 和某个 $\beta>0$ 成立, 则算子 U 是从 $\mathbf{L}^\infty(D)$ 到 $\mathrm{Lip}\beta$ 内的连续算子, 并且

$$C_\beta(y)\leqslant[E+(2^\beta+3^\beta)F]\|x\|.$$

同上面一样, 把 U 看作从 $\mathbf{L}^\infty(D)$ 到 $\mathbf{C}(D')$ 内的算子, 它也是紧的.

在 Берколайко 和 Рутицкий[1] 的著作中把定理 4 推广到 Banach 基本空间上.

3.4. 现在考察算子 U 的核依赖参数的情况.

考虑函数 $K_\tau(s,t)$，如果对于任意的 $\varepsilon>0, h>0$ 及 s，可求出 $\delta>0$ 及集合 $A(s)$，使得当 $|\tau-\tau_0|<\delta, t\notin A(s)$ 时 $|K_\tau(s,t)-K_{\tau_0}(s,t)|<\varepsilon$，并且 $\text{mes}\,A(s)<h$，则称此函数在 $\tau=\tau_0$ 时按参数 τ 关于 s 和 t 是几乎一致连续的*)．

下面的定理利用了几乎一致连续的概念．

定理 5. 设积分算子的核当 $\tau=\tau_0$ 时按 τ 几乎一致连续，而对于每个 τ 定理 3 的条件都成立．并且，在该定理的式子中出现的所有常数(C_1, C_2, σ 等等)与 τ 无关．则积分算子 U_τ

$$y_\tau=U_\tau(x),\quad y_\tau(s)=\int_D K_\tau(s,t)x(t)dt$$

$$(x\in \mathbf{L}^p(D),\quad y_\tau\in \mathbf{L}^q(D')) \tag{20}$$

对参数是连续相依的，即

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\|U_\tau-U_{\tau_0}\|=0.$$

证. 我们有

$$y_{\tau_0}(s)-y_\tau(s)=\int_D[K_{\tau_0}(s,t)-K_\tau(s,t)]x(t)dt.$$

利用定理 3 证明中的记号，我们估计常数

$$C_1^{(\rho)}=\underset{s\in D'}{\text{vrai sup}}\left[\int_D|K_{\tau_0}(s,t)-K_\tau(s,t)|^\rho dt\right]^{\frac{1}{\rho}}.$$

设 $\varepsilon>0$，$h>0$ 及 s 是给定的，根据几乎一致连续性的定义，可求出与其对应的 $\delta>0$ 及 $A(s)\subset D$．这时，为简单起见假设 $\rho\geqslant1$**)，

$$\left[\int_D|K_{\tau_0}(s,t)-K_\tau(s,t)|^\rho dt\right]^{\frac{1}{\rho}}\leqslant$$

---

*) 参数 τ 的值是欧氏空间中的点，但也可以把 τ 看成是任意度量空间中的元素．

**) 如果 $\rho<1$，需要利用不等式 $(a+b)^{1/\rho}\leqslant2^{1/\rho-1}[a^{1/\rho}+b^{1/\rho}]$ $(a,b\geqslant0)$．

$$\leqslant\left[\int_{D'/A(s)}|K_{\tau_0}(s,t)-K_\tau(s,t)|^\rho dt\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

$$+\left[\int_{A(s)}|K_{\tau_0}(s,t)-K_\tau(s,t)|^\rho dt\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

$$\leqslant\varepsilon[\mathrm{mes}D]^{\frac{1}{\rho}}$$

$$+\left[\int_{A(s)}|K_{\tau_0}(s,t)-K_\tau(s,t)|^{\rho\frac{r}{\rho}}dt\right]^{\frac{1}{r}}\left[\int_{A(s)}dt\right]^{1/(\frac{r}{\rho})'\rho}$$

$$\leqslant\varepsilon[\mathrm{mes}\ D]^{1/\rho}+2C_1h^{1/\rho-1/r}.$$

因而，$C_1^{(\rho)}\leqslant\varepsilon[\mathrm{mes}\ D]^{1/\rho}+2C_1h^{1/\rho-1/r}$，即对于算子$U_{\tau_0}-U_\tau$量$C_1^{(\rho)}$可任意小．又根据定理1(参见(5))，

$$\|U_{\tau_0}-U_\tau\|\leqslant[C_1^{(\rho)}]^{1-\sigma/q}[2C_2]^{\sigma/q},$$

所以$\|U_{\tau_0}-U_\tau\|$也可以任意小，这就证明了定理的论断．

注．定理可直接用于$q=\infty$情况（参见定理1的注4)．确切地说，如果$r>p'$且对于任意的τ，(2)式成立，而核$K_\tau(s,t)$当$\tau=\tau_0$时按参数是几乎一致连续的，则算子(20)对参数τ是连续相依的．显然，这就表示根据$\eta>0$可找到$\lambda>0$，使得

$$|y_{\tau_0}(s)-y_\tau(s)|<\eta\qquad(|\tau_0-\tau|<\lambda,\ s\in D').$$

3.5. 最后我们考察特殊类型的核．设集合D和D'在同一空间中，讨论形如

$$K(s,t)=\frac{B(s,t)}{|s-t|^m}\tag{21}$$

的核，其中$B(s,t)$是有界函数，当$s\neq t$时连续，这种形式的核叫做位势型核．

如果$mr<\mu$，则这样的核关于t是r次可积的，或确切地说，条件(2)成立；如果$m\sigma<\nu$，则条件(3)成立．于是，可以分别取充分接近$\frac{\mu}{m}$和$\frac{\nu}{m}$的数作为r和σ．这时条件(4)可写成

$$q \geqslant p, \quad q > \frac{\nu}{m}, \quad \left(1-\frac{\nu}{mq}\right)p' < \frac{\mu}{m}.$$

利用定理 1 的注 1，便可知，条件

$$q < \frac{\nu p}{\mu-(\mu-m)p}, \nu > \mu-(\mu-m)p \tag{22}$$

保证了具有形如(21)的核的算子(1)的连续性(把它看成是从$L^p(D)$到$L^q(D')$内的算子)．因为此时定理 3 的条件也成立（注意类似的注)，则从(22)式也能推出算子U的紧性*)．特别当$m=\mu-1$时条件(22)具有下列形式：

$$q < \frac{\nu p}{\mu-p}, \quad \nu > \mu-p. \tag{23}$$

在下列条件下，定理 4 可应用到所考察的情况．因为，显然

$$|\mathrm{grad}_s K(s,t)| \leqslant \frac{|\mathrm{grad}_s B(s,t)|}{|s-t|^m} + m\frac{|B(s,t)|}{|s-t|^{m+1}},$$

所以，如果有

$$\sup_{s\in D'}\left[\int_D \frac{|\mathrm{grad}_s B(s,t)|^r}{|s-t|^{(m+\beta-1)r}}dt\right]^{1/r} \leqslant E', \tag{24}$$

$$(m+\beta)r < \mu. \tag{25}$$

就保证了条件(14)和(15)是成立的．

在这些条件下，算子(1)是从空间$L^p(D)$到空间 Lip β 内的连续算子．

如果把核$K(s+\Delta s, t)$看作是参数Δs的函数，则因为除去点s的某个任意小的邻域，核$K(s+\Delta s, t)$在$\Delta s=0$按参数Δs是一致连续的．根据定理 5 可知

$$\lim_{\Delta s\to 0}\|U_{\Delta s}-U\|=0,$$

其中$U_{\Delta s}$是具有核$K(s+\Delta s, t)$的积分算子，特别，当$\Delta s\to 0$时

$$\int_{D'}|y(s+\Delta s)-y(s)|^q ds \to 0 \quad **).$$

---

*）事实上，(22)中的第一式等价于不等式$\left(1-\frac{\nu}{mq}\right)p' < \frac{\mu}{m}$．如果这时$q<p$，则条件(22)的第二式保证了不等式(8)成立．

**）这里和以后总把y理解为算子U作用于某个$x\in L^p(D)$的结果：$y=U(x)$．

类似地，设 D' 是连续光滑地依赖于参数 τ 的 ν 维流形，$D'=D'_\tau$，即是由点 $s+\varphi(s,\tau)$ 构成的流形，其中 s 取遍区域 D'_0. 而当 $\tau\to0$ 时，$\varphi(s,\tau)\to0$（关于 s 是一致的），此外 $|\varphi(s,\tau)-\varphi(s',\tau)|\leqslant\alpha|s-s'|(\alpha<1)$. 这时，作为在流形 D'_τ 上考察的函数 y:

$$y_\tau(s)=y(s+\varphi(s,\tau))=\int_D K(s+\varphi(s,\tau),t)x(t)dt,$$

关于 τ 按空间 $\mathbf{L}^q(D'_0)$ 中的度量是连续的，即

$$\|y_0-y_\tau\|=\left\{\int_{D'_0}|y_0(s)-y_\tau(s)|^q ds\right\}^{1/q}\xrightarrow[\tau\to0]{}0.$$

综上所述，可形成下列两个定理.

定理 6. 如果条件(22)成立，则具有(21)型核的积分算子是从空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 到 $\mathbf{L}^q(D')$ 内的紧算子，其中 D 是 μ 维欧氏空间区域，D' 是其中 ν 维流形. 并且，如果这个流形对参数是连续相依的，则 $y=U(x)$ 对参数也是连续相依的. 特别

$$\lim_{\Delta s\to0}\left\{\int_{D'}|y(s+\Delta s)-y(s)^q ds\right\}^{1/q}=0. \tag{26}$$

注. 当 $q=\infty$ 时定理也成立. 这时条件(22)用下式

$$(\mu-m)p>\mu \tag{27}$$

来代替（参见定理 1 的注 4）.

在这种情况下关系式(26)变为

$$\sup_s|y(s+\Delta s)-y(s)|\xrightarrow[\Delta s\to0]{}0,$$

它意味着函数 y 的连续性，即在这种情况下，算子 U 实际上将 $\mathbf{L}^p(D)$ 映入 $\mathbf{C}(D')$ 内.

条件(27)可以改成 $mp'<\mu$. 这时，注意到定理 2 的注可得，U 是从 $\mathbf{L}^p(D)$ 到 $\mathbf{L}^\infty(D')$ 内（因此也是到 $\mathbf{C}(D')$ 内）的紧算子. 于是，有下述定理:

定理 7. 如果条件(27)成立，则具有位势型核的积分算子是

把空间 $\mathbf{L}^p(D)$映入空间 $\mathbf{C}(D')$内的紧算子.

§4. Соболев 嵌入定理

在数学物理和分析的其他领域的各种问题中，函数的微分性质之间的相互关系起很大的作用. 例如，大家都了解，知道了偏导数的积分估计就可以推断函数本身的有界性或甚至于它的连续性. 在很多情况下，可以根据函数在整个空间中的性态来判定它在某个曲面上的微分性质等等.

在第六章中我们已经用到过这种思想，即同一个函数可看成是不同泛函空间中的元素. 这里，要继续并且更系统地发挥这个思想. 本节所研究的空间是用其中函数的某些微分性质来描述的，因此，如果一个这样的空间是另一个的一部分(按集合论意义)，则用以描述第一个空间的一组性质就蕴涵了描述第二个空间元素的特征. 其次，在这种情况下，使作为第一个空间元素来考察的函数对应于可作为第二个空间元素来考察的这同一个函数，我们便得到了嵌入算子. 研究它，不仅可以使函数的各种性质之间已建立的定性联系精确化，而且也能定量地描述这些联系.

本节的结果基本上是属于 С. Л. Соболев 的 (参见 Соболев-I, II)，对在数学物理中的应用它起着奠基的作用.

4.1. 首先证明一个关于可微函数积分表示的引理(这里和下面所用的记号与前一节的记号一致)，用D表示 $\mathbf{R}^\mu$ 中具有充分光滑边界的有界区域.

引理 1. 设 $x(s)$ 是定义在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^\mu$ 内的连续可微函数，则下述恒等式成立:

$$x(s)=\frac{1}{\operatorname{mes} D}\int_D x(t)\,dt-\sum_{k=1}^{\mu}\int_D\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_k}dt, \tag{1}$$

其中$B_k(s,t)$ $(k=1,2,\cdots,\mu)$是有界函数,

$$|B_k(s,t)|\leqslant\frac{\delta^\mu}{\mu\,\mathrm{mes}D}\qquad(k=1,2,\cdots,\mu),\tag{2}$$

当$s\neq t$时连续. 这里$t_1,t_2,\cdots,t_\mu$表示点t的坐标, 而用δ表示区域D的直径.

证. 设s是区域D内指定的一点, l是单位向量. 这时在通过点s沿方向l的射线上的每一点$t\in D$都可表示为$t=s+Rl$,其中$R=|s-t|$是t到s的距离. 设$d=d(l)$是这条射线在区域D内的线段的长度. 令

$$F(t)=x(t)\int_R^d\rho^{\mu-1}d\rho=x(t)\frac{d^\mu-R^\mu}{\mu}\qquad(t=s+Rl),$$

显然

$$F(s)=F(t)\Big|_{R=0}=x(s)\frac{d^\mu}{\mu},\quad F(t)\Big|_{R=d}=0.$$

因此

$$\begin{aligned}x(s)\frac{d^\mu}{\mu}&=-\int_0^d\frac{\partial F}{\partial R}dR\\&=\int_0^d x(t)R^{\mu-1}dR-\int_0^d\frac{\partial x}{\partial R}\cdot\frac{d^\mu-R^\mu}{\mu}\cdot\frac{R^{\mu-1}}{R^{\mu-1}}dR.\end{aligned}$$

在此等式两边乘以μ维空间中单位球曲面元并按这曲面作积分, 利用公式

$$\int_D z(t)dt=\int_\omega d\omega\int_0^d z(t)R^{\mu-1}dR,$$

其中ω表示中心在点s的单位球面.

积分得

$$x(s)\,\mathrm{mes}\,D=\int_D x(t)dt-\int_D\frac{\partial x}{\partial R}\cdot\frac{d^\mu-R^\mu}{\mu}\cdot\frac{dt}{R^{\mu-1}}.$$

因为$\dfrac{\partial x(t)}{\partial R}=\sum\limits_{k=1}^{\mu}\dfrac{\partial x(t)}{\partial t_k}\cos(l,t_k)$, 故在等式两边除以mes D, 并记

$$B_k(s,t)=B(s,t)\cos(l,t_k)$$

$$\left(B(s,t)=\frac{d^{\mu}-R^{\mu}}{\mu\,\mathrm{mes}D};\ k=1,2,\quad\cdots,\mu\right),$$

便得关系式(1). 由此又得到了估计式(2)和函数的连续性.

注 1. 在更一般的形式下引理的结论也是正确的. 这就是, 区域 D 可以不是凸的, 只要 D 包含了这样的凸子域 D_1, 使得由 D 内任何点 s 出发与区域 D_1 相交的一切射线上从点 s 到最近交点间的线段构成的锥 D_2 属于 D *). 同时公式(1)由下式之一代替:

$$x(s)=\frac{1}{\mathrm{mes}D_1}\int_{D_1}x(t)dt-\sum_{k=1}^{\mu}\int_{D_1\cup D_2}\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x}{\partial t_k}dt, \tag{3}$$

或

$$x(s)=\frac{1}{\mathrm{mes}D_1}\int_{D_1}x(t)dt-\sum_{k=1}^{\mu}\int_{D}\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x}{\partial t_k}dt. \tag{3'}$$

类似于上面的讨论可得其证明.

注 2. 引理条件中区域 D 凸性的要求, 只是用来保证从区域 D 的任何内点出发的射线和区域的边界只有一个交点. 因此, 如果不假设区域是凸的, 表示式(1)对于所有这样的 $s\in D$ 仍然成立, 只要关于这些 s 区域 D 是星形的. 特别对于在注 1 中所述区域 D_1 中的所有 $s\in D_1$, 它是成立的.

注 3. 引理 1 可以推广. 这就是, 如果 $x(t)$ 在凸区域 D 内有直到 l 阶连续导数, 则恒等式

$$x(s)=\frac{1}{\mathrm{mes}D}\int_{D}x(t)\mathscr{L}(s,t)dt+$$

---

*) 这种类型的区域 D 叫做关于区域 D_1 是星形的.

$$+(-1)^l \sum_{i_1,\cdots,i_l=1}^{\mu} \int_D \frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1}\cdots\partial t_{i_l}} \mathscr{L}_{i_1\cdots i_l}(s,t) \frac{dt}{|s-t|^{\mu-l}} \qquad (4)$$

成立，其中*)

$$\mathscr{L}(s,t)=\sum_{i=0}^{l-1} b_i \left(1-\frac{R}{d}\right)^{l-1-i}\left(\frac{R}{d}\right)^i, \qquad (5)$$

b_i 是仅与 l 和 μ 有关的常数，

$$\mathscr{L}_{i_1\cdots i_l}(s,t) =\frac{(\mu+l-1)!}{\mu!(l-1)!}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_l} \frac{d^\mu}{\operatorname{mes} D}\left(\int_{\frac{R}{d}}^1 (1-u)^{l-1}u^{\mu-1}du\right), \qquad (5')$$

$$\alpha_i=\cos(\bar{l}, t_i) \quad (i=1,2,\cdots,\mu).$$

公式(4)的证明类似于公式(1)的证明，只是在证明中函数 $F(t)$ 由下式

$$F(t)=x(t)\frac{\partial^{l-1}}{\partial R^{l-1}}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\psi(R,d)\right] -\frac{\partial x(t)}{\partial R}\frac{\partial^{l-2}}{\partial R^{l-2}}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\psi(R,d)\right]+\cdots +(-1)^{l-1}\frac{\partial^{l-1}x(t)}{\partial R^{l-1}}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\psi(R,d)\right]$$

确定，其中

$$\psi(R,d)=\int_R^d (d-\rho)^{l-1}\rho^{\mu-1}d\rho=d^{\mu+l-1}\int_{\frac{R}{d}}^1 (1-u)^{l-1}u^{\mu-1}\cdot du.$$

这时，不难看出，

$$F(s)=F(t)\Big|_{R=0}=x(s)\psi(0,d)=x(s)\frac{(l-1)!(\mu-1)!}{(\mu+l-1)!}d^{\mu+l-1},$$

---

*) 我们利用在引理 1 的证明中所引进的记号.

$$F(t)\Big|_{R=d}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial R}=x(t)\frac{\partial^l}{\partial R^l}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\psi(R,d)\right]$$

$$+(-1)^{l-1}\frac{\partial^l x(t)}{\partial R^l}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\psi(R,d)\right].$$

象引理 1 的证明那样继续下去，并利用关系式

$$\frac{\partial^l x(t)}{\partial R^l}=\sum_{i_1,\cdots,i_l=1}^{\mu}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_l}\frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1}\cdots\partial t_{i_l}},$$

$$\alpha_i=\cos(l,t_i),$$

便得等式(4).

同前面一样，设D是$\mathbf{R}^\mu$内由充分光滑的曲面S所界定的凸区域. 设$B_k(s,t)$是引理 1 证明中给出的函数.

引理 2. 只要 $r<\frac{\mu}{\mu-1}$, 而$\beta>0$使$(\mu-1+\beta)r<\mu$成立，则函数$B_k(s,t)$使积分

$$\int_D\frac{|\mathrm{grad}_s B_k(s,t)|^r}{|s-t|^{(\mu-2+\beta)r}}dt \tag{6}$$

关于s一致有界.

证. 因为

$$B_k(s,t)=B(s,t)\cos(l,t_k),$$

所以

$$|\mathrm{grad}_s B_k(s,t)|$$
$$\leqslant|\mathrm{grad}_s B(s,t)||\cos(l,t_k)|+|B(s,t)||\mathrm{grad}_s\cos(l,t_k)|$$
$$\leqslant|\mathrm{grad}_s B(s,t)+K/R\qquad(R=|s-t|),$$

其中K是某个常数.

从条件$(\mu-1+\beta)r<\mu$可推出引理的论断对于加项K/R是正确的，我们对第一项来验证引理的论断. 因为$B(s,t)=$

$=\frac{1}{\mu \mathrm{mes} D}(d^\mu - R^\mu)$，而对于 R^μ 引理显然正确．余下只需对函数 d^μ 来证明引理．

用 u 表示由向量 l 确定的射线与区域 D 的边界的交点，而 $\bar{n}=(A_1, \cdots, A_\mu)$ 表示曲面 S 在点 u 的单位法向量(A_i，$1\leqslant i\leqslant \mu$，是向量 $\bar{n}$ 在坐标轴上的投影)，用 φ 表示 l 与 $\bar{n}$ 之间的夹角．

设 $\tilde{s}=s+he_j$ 是 s 附近的一点，其中 e_j 是第 j 个坐标轴方向上的单位向量．设 $\tilde{u}$ 是通过 $\tilde{s}$ 向 t 的方向的射线与区域 D 的边界的交点，而 $\tilde{\varphi}$ 表示这射线与上面所引向量 $\bar{n}$ 之间的夹角．最后，设 v 是曲面 S 在点 u 的切超平面上的点，它是从 $\tilde{u}$ 作此超平面的垂线的垂足．

把点 $u=(u_1, \cdots, u_\mu)$ 和 $\tilde{u}=(\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_\mu)$ 的坐标写成下列形式:

$$u_i=s_i+(t_i-s_i)r(s),\quad \tilde{u}_i=\tilde{s}_i+(t_i-\tilde{s}_i)r(\tilde{s})$$
$$(1\leqslant i\leqslant \mu),$$

则

$$d(s)=|u-s|=r(s)|t-s|=r(s)R(s),$$
$$d(\tilde{s})=|\tilde{u}-\tilde{s}|=r(\tilde{s})|t-\tilde{s}|=r(\tilde{s})R(\tilde{s}).$$

求函数 $d(s)$ 关于坐标 s_j 的导数，有

$$\begin{aligned} d'_{s_j}(s) &= \lim_{h\to 0}\frac{d(s+he_j)-d(s)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{r(\tilde{s})R(\tilde{s})-r(s)R(s)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{r(\tilde{s})-r(s)}{h}R(\tilde{s})+\frac{R(\tilde{s})-R(s)}{h}r(s)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

显然

$$\frac{R(\tilde{s})-R(s)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} R'_{s_j}(s)=\frac{s_j-t_j}{R(s)}. \tag{8}$$

为了求(7)式右端第一个式子的极限，我们把 $r(s)$ 和 $r(\tilde{s})$ 表示为：

$$r(s)=\frac{d(s)}{R(s)}=\frac{|u-s|\cos\varphi}{|t-s|\cos\varphi}=\frac{(u-s,\bar{n})}{(t-s,\bar{n})}=\frac{\sum_{i=1}^{\mu}A_i(u_i-s_i)}{\sum_{i=1}^{\mu}A_i(t_i-s_i)}, \tag{9}$$

$$r(\tilde{s})=\frac{d(\tilde{s})}{R(\tilde{s})_1}=\frac{|\tilde{u}-\tilde{s}|\cos\tilde{\varphi}}{|t-\tilde{s}|\cos\tilde{\varphi}}=\frac{(\tilde{u}-\tilde{s},\bar{n})}{(t-\tilde{s},\bar{n})}$$

$$=\frac{(\tilde{u}-v,\bar{n})+(v-u,\bar{n})+(u-\tilde{s},\bar{n})}{(t-\tilde{s},\bar{n})}$$

$$=\frac{|\tilde{u}-v|+\sum_{i=1}^{\mu}A_i(u_i-s_i)-A_jh}{\sum_{i=1}^{\mu}A_i(t_i-s_i)-A_jh}, \tag{10}$$

因为向量 $\tilde{u}-v$ 与向量 $\bar{n}$ 共线，而 $v-u$ 垂直于 $\bar{n}$，此外 $\tilde{s}=s+he_j=(s_1,\cdots,s_j+h,\cdots,s_\mu)$。

我们指出，根据关于区域 D 边界曲面的假设，

$$\frac{|\tilde{u}-v|}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}0\ ^{*)}. \tag{11}$$

利用(9)—(11)式并引进记号

---

*) 我们来证明这个关系式. 首先根据关于曲面的假设，

$$|\tilde{u}-v|\leqslant A|v-u|^2\leqslant A|\tilde{u}-u|^2, \tag{*}$$

其中 A 是与曲面性质有关的常数，线段 $\tilde{u}u$ 属于直线 stu 和 $\tilde{s}t\tilde{u}$ 所在的平面. 在直线 $\tilde{u}\tilde{s}$ 上取点 w 和 η，使得直线 uw 平行于 $s\tilde{s}$，而直线 $u\eta$ 垂直于 $\tilde{u}\tilde{s}$. 设 $\psi(\tilde{s})$ 是直线 $\tilde{u}u$ 和 $\tilde{u}\tilde{s}$ 之间的夹角. 这时

$$|\tilde{u}-u|=\frac{|u-\eta|}{\sin\psi(\tilde{s})}\leqslant\frac{|u-w|}{\sin\psi(\tilde{s})}=\frac{d-R}{R\sin\psi(\tilde{s})}|\tilde{s}-s|=\frac{d-R}{R\sin\psi(\tilde{s})}h. \tag{**}$$

比较(*)和(**)可得

$$|\tilde{u}-v|\leqslant A\left(\frac{d-R}{R\sin\psi(\tilde{s})}\right)^2h^2,$$

因为根据区域 D 的凸性可知当 $\tilde{s}\to s$ 时 $\sin\psi(\tilde{s})$ 异于零，由此推出(11)式.

$$P=\sum_{i=1}^{\mu}A_i(u_i-s_i)=d(s)\cos\varphi,$$

$$Q=\sum_{i=1}^{\mu}A_i(t_i-s_i)=R(s)\cos\varphi,$$

便得

$$\frac{r(\tilde{s})-r(s)}{h}=\frac{|\tilde{u}-v|}{h(Q-A_jh)}+\frac{1}{h}\left[\frac{P-A_jh}{Q-A_jh}-\frac{P}{Q}\right]$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{}\frac{A_j(P-Q)}{Q^2}=\frac{A_j(d(s)-R(s))}{R^2(s)\cos\varphi}. \tag{12}$$

于是，根据(7)，(8)和(12)有

$$d'_{s_j}(s)=\frac{A_j(d(s)-R(s))}{R(s)\cos\varphi}+\frac{s_j-t_j}{R^2(s)}d(s).$$

由此，因为$|A_j|\leqslant 1$及$\frac{|s_j-t_j|}{R(s)}\leqslant 1$，则有估计式

$$|d'_{s_j}(s)|\leqslant\frac{d-R}{R|\cos\varphi|}+\frac{d}{R}\leqslant 2\frac{d}{R|\cos\varphi|}$$

及

$$|\mathrm{grad}_s d|\leqslant 2\mu^{1/2}\frac{d}{R|\cos\varphi|}.$$

这样，

$$|\mathrm{grad}_s d^{\mu}|\leqslant 2\mu^{3/2}\frac{d^{\mu}}{R|\cos\varphi|}.$$

所以

$$\frac{|\mathrm{grad}_s d^{\mu}|^{r}}{R^{(\mu-2+\beta)r}}\leqslant 2^{r}\mu^{(3/2)r}\frac{d^{\mu r}}{R^{(\mu-1+\beta)r}|\cos\varphi|^{r}}.$$

为了估计这个式子的积分，我们指出，

$$dt=\frac{R^{\mu-1}}{d^{\mu-1}}\cos\varphi\, dS\, dR,$$

其中 dS 是区域D边界曲面S的面积元素．还要指出，根据引理条件

$$\mu r-(\mu-1+\beta)r+1>\mu r-\mu+1>0.$$

综上所述，得

$$\int_D \frac{d^{\mu r}}{R^{(\mu-1+\beta)r}}\frac{dt}{|\cos\varphi|^r}=\int_S \frac{\cos\varphi}{|\cos\varphi|^r}\left(\int_0^d \frac{d^{\mu r-(\mu-1)}R^{\mu-1}}{R^{(\mu-1+\beta)r}}dR\right)dS$$

$$\leqslant\frac{d^{\mu r-(\mu-1+\beta)r+1}}{\mu-(\mu-1+\beta)r}\int_S \frac{dS}{|\cos\varphi|^{r-1}}.$$

其次，因为$r<\frac{\mu}{\mu-1}\leqslant 2$，故 $r-1<1$，再注意到加在曲面上的条件，可得

$$\int_D \frac{dS}{|\cos\varphi|^{r-1}}\leqslant K_1,$$

联系前面的讨论即得所需的结果.

引理证毕.

注. 从 3.5 的讨论推知，在引理的条件成立时核$\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}$满足定理 3.4 的要求.

4.2. 基于前节得到的关于积分算子的定理，便可证明下述基本定理.

定理 1. (Соболев 不等式). 设 $x(s)$ 是凸区域D内的连续可微函数，并且

$$q<\frac{\mu p}{\mu-p}, \tag{13}$$

则有不等式

$$\|x-m(x)\|_{L^q(D)}=\left\{\int_D |x(t)-m(t)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$\leqslant A\||\mathrm{grad}x|\|_{L^p(D)}=A\left\{\int_D\left[\sum_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)^2\right]^{p/2}dt\right\}^{1/p}, \tag{14}$$

其中

$$m(x)=\frac{1}{\operatorname{mes}D}\int_D x(s)ds \tag{15}$$

是函数 x 在区域 D 内的平均值，而 A 是某个常数.

证. 根据引理 1 (注意到 $B_k(s,t)$ 的表达式)，有

$$|x(s)-m(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\mu}\left|\int_D\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x}{\partial t_k}dt\right|$$

$$\leqslant\int_D\frac{|B(s,t)|}{|s-t|^{\mu-1}}|\operatorname{grad}x|dt.$$

但在条件(13)之下具有核$\dfrac{|B(s,t)|}{|s-t|^{\mu-1}}$的积分算子 U 是从 $\mathbf{L}^p(D)$ 到 $\mathbf{L}^q(D)$内的连续算子(参见 3.5, 条件(23))，所以,

$$\|x-m(x)\|_{\mathbf{L}^q}\leqslant\|U\|\,\||\operatorname{grad}x|\|_{\mathbf{L}^p}.$$

如果取上述积分算子 U 的范数作为 A, 即证得(14)式成立.

注 1. 有时不等式(14)的另一种等价的形式

$$\|x\|_{\mathbf{L}^q}\leqslant M[\||\operatorname{grad}x|\|_{\mathbf{L}^p}+|m(x)|] \tag{16}$$

更便于利用.

注 2. 如果 $p=2$, 而 $\mu\geqslant2$, 则当 $q=2$ 时不等式(13)成立. 在这种情况下不等式(16)变为

$$\left[\int_D|x(s)|^2ds\right]^{1/2}\leqslant M\left\{\left|\int_D x(t)dt\right|+\left[\int_D\sum_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)^2dt\right]^{1/2}\right\}, \tag{17}$$

或，另一种形式

$$\int_D|x(s)|^2ds\leqslant M_1\left\{\left|\int_D x(t)dt\right|^2+\int_D\sum_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)^2dt\right\} \tag{18}$$

这就是著名的 Poincaré 不等式.

注 3. 在实际应用中，(14)式中常数 A 的大小可能起作用. 利用定理 3.1 可以估计具有核$\dfrac{|B(s,t)|}{|s-t|^{\mu-1}}$的积分算子 U 的范数，取

$\sigma=r$ 并从不等式$(1-r/q)\ p'\leqslant r$ 确定最小可能的 r, 则作为 A 可取量

$$A=C_1=C_2\leqslant\max|B(s,t)|\max_s\left[\int_D\frac{dt}{|s-t|^{(\mu-1)r}}\right]^{1/r}$$
$$\leqslant\frac{\delta^\mu}{\mu\mathrm{mes}D}\left\{\int_\omega d\omega\int_0^\delta\frac{R^{\mu-1}}{R^{(\mu-1)r}}dR\right\}^{1/r}$$
$$\leqslant\frac{\delta^{1+\mu/r}}{\mu\mathrm{mes}D}\left\{\frac{\mu\pi^{\mu/2}}{(\mu-(\mu-1)r)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}\right\}^{1/r}.$$

注 4. 在对 Соболев 不等式所作的证明中有区域 D 是凸的条件, 但是对于相当一般的区域也可以证明该不等式. 首先, 如果对某一个区域不等式成立, 而存在从另一个区域到这个区域的单值连续可微的且 Jacobi 行列式为 1 的变换, 则对另一个区域不等式亦成立. 此外, 依据下列命题可以把 Соболев 不等式推广到更一般的一类区域上.

定理 2. 如果区域 D 是具有正测度交集的两个区域 D_1 和 D_2 的并, 而对于其中的每一个不等式(14)都成立, 则对于整个区域 D 不等式也成立.

证. 设 $D=D_1\cup D_2$, 令

$$D_3=D_1\cap D_2,\quad D_4=D_2\backslash D_3.$$

用 $m(x), m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x)$ 分别表示 x 关于区域 D, D_1, D_2, D_3, D_4 的平均值, 把(14)用于 D_1 和 D_2 得

$$\|x-m_1(x)\|_{L^q(D_1)}\leqslant B_1J,\quad \|x-m_2(x)\|_{L^q(D_2)}\leqslant B_2J, \tag{19}$$

其中 J 表示 $\||\mathrm{grad}x|\|_{L^p(D)}$, 而 B_1 和 B_2 是某些常数.

其次,

$$|m_1(x)-m_2(x)|\leqslant\frac{1}{(\mathrm{mes}D_3)^{1/q}}[\|x-m_1(x)\|_{L^q(D_3)}$$
$$+\|x-m_2(x)\|_{L^q(D_3)}]\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\text{mes} D_3)^{1/q}} [\| x - m_1(x) \|_{L^q(D_1)} + \| x - m_2(x) \|_{L^q(D_2)}]$$

$$\leqslant B_3 J,$$

$$|m_4(x) - m_2(x)| = \frac{1}{\text{mes} D_4} \left| \int_{D_4} [x(s) - m_2(x)] ds \right|$$

$$\leqslant \frac{A}{\text{mes} D_4} \| x - m_2(x) \|_{L^q(D_2)} \leqslant B_4 J.$$

但按平均值的意义

$$\min[m_1(x), m_4(x)] \leqslant m(x) \leqslant \max[m_1(x), m_4(x)].$$

所以

$$|m(x) - m_1(x)| \leqslant |m_4(x) - m_1(x)|$$

$$\leqslant |m_4(x) - m_2(x)| + |m_2(x) - m_1(x)| \leqslant B_5 J,$$

由此还可得

$$|m(x) - m_2(x)| \leqslant |m(x) - m_1(x)| + |m_2(x) - m_1(x)|$$

$$\leqslant B_6 J.$$

最后

$$\| x - m(x) \|_{L^q(D)} \leqslant \| x - m(x) \|_{L^q(D_1)} + \| x - m(x) \|_{L^q(D_2)}$$

$$\leqslant \| x - m_1(x) \|_{L^q(D_1)} + \| x - m_2(x) \|_{L^q(D_2)}$$

$$+ |m(x) - m_1(x)| (\text{mes} D_1)^{1/q}$$

$$+ |m(x) - m_2(x)| (\text{mes} D_2)^{1/q} \leqslant B_7 J,$$

所以(14)型不等式对区域D成立.

利用引理 1 的注可得到 Соболев 不等式在其中成立的区域类的另一种推广. 即, 设区域 D 关于某个凸区域 $D_1 \subset D$ 是星形的; 用 $m_1(x)$表示函数 x 关于区域 D_1 的平均值, 利用表达式(3)得到关系式

$$\| x - m_1(x) \|_{L^q(D)} \leqslant A_1 J \qquad (J = \| |\text{grad}\, x| \|_{L^p(D)}).$$

但根据引理 1 的注 2, 式(1)对于所有 $s \in D_1$ 成立, 即

$$x(s)=m(x)+\sum_{k=1}^{\mu}\int_D \frac{B_k(s,\ t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x}{\partial t_k}\,dt \qquad (s\in D_1).$$

因为上式的右端显然给出了一个从 $\mathbf{L}^p(D)$ 到 $\mathbf{L}^q(D_1)$ 内的连续算子，所以

$$\|x-m(x)\|_{\mathbf{L}^q(D_1)}\leqslant A_2 J.$$

由此

$$|m_1(x)-m(x)|=\left|\frac{1}{\mathrm{mes}D_1}\int_{D_1}[x(s)-m(x)]ds\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\mathrm{mes}D_1}\|x-m(x)\|_{\mathbf{L}^q(D_1)}\leqslant\frac{1}{\mathrm{mes}D_1}A_2 J.$$

由这个不等式和前面得到的不等式，终于得到

$$\|x-m(x)\|\leqslant A_3 J,$$

这就是所要证明的.

4.3. 现在我们考察某些泛函空间，其元素是区域 D 内的所有可能的连续可微函数. 于是，不同空间的区别仅在于其中引进的范数不同.

首先考察空间 $\widetilde{W}_p^{(1)}=\widetilde{W}_p^{(1)}(D)$，令

$$\|x\|=\frac{1}{\mathrm{mes}D}\left|\int_D x(s)ds\right|+\left[\int_D|\mathrm{grad}\,x|^p dt\right]^{1/p}$$

$$=|m(x)|+\||\mathrm{grad}\,x|\|_{\mathbf{L}^p(D)}. \qquad (20)$$

容易看出，这样引进的范数满足赋范空间的所有公理(按自然方式线性化).

如果把元素 $x\in\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}$ 看作 $\mathbf{L}^q(D)$ 中的函数，则 Соболев 不等式((16)型的)可写成这样的形式:

$$\|x\|_{\mathbf{L}^q(D)}\leqslant M\|x\|_{\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}}. \qquad (21)$$

这样，嵌入算子，即使元素 $x\in\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}$ 对应于作为 $\mathbf{L}^q(D)$ 中元素

的同一个函数的算子是连续线性算子，我们证明嵌入算子是紧的.

设序列$\{x_n\}$在空间$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}$中是有界的，根据引理1有

$$x_n(s)=m(x_n)+\sum_{k=1}^{\mu}\int_D \frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}dt.$$

但在条件(13)之下具有核$\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}$的算子是紧的(定理3.6). 因为序列$\left\{\frac{\partial x_n}{\partial t_k}\right\}$$(k=1,2,\cdots,\mu)$在空间$\mathbf{L}^p(D)$中是有界的，所以，可选得足标序列$\{n_i\}$使得序列$\{y_{n_i}^{(k)}\}$

$$y_{n_i}^{(k)}(s)=\int_D \frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x_{n_i}}{\partial t_k}dt$$

$$(k=1,2,\cdots,\mu;\quad i=1,2,\cdots)$$

在$\mathbf{L}^q(D)$中收敛. 也可以认为数列$\{m(x_{n_i})\}$收敛. 在这种情况下，序列$\{x_{n_i}\}$在$\mathbf{L}^q(D)$中收敛，从而证明了嵌入算子的紧性. 于是，下述定理成立:

定理3(Соболев-Кондрашев)*). 在条件(13)之下，把$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}$中函数映射为看作$\mathbf{L}^q(D)$中元素的同一个函数的嵌入算子是紧的.

使定理3成立的区域类型D与使Соболев不等式成立的区域类型是一致的. 其中特别是关于某凸子域为星形的区域，或有限个这种类型区域的并(定理2).

再利用定理3.6，类似于定理3可获得更一般的结果.

定理4. 在条件

*) С.Л. Соболев证明了嵌入算子的连续性，В.И. Кондрашев证明了它的紧性.

$$q<\frac{\nu p}{\mu-p}, \qquad \nu>\mu-p \tag{22}$$

之下，把$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}$中函数映射为看作空间$\mathbf{L}^q(D')$中($D'$表示$D$内的$\nu$维曲面)元素的同一个函数的嵌入算子是紧的．并且，元素x与在曲面D'上的位移量是连续相依的，即

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left\{\int_{D'}|x(s+\Delta s)-x(s)|^q ds\right\}^{1/q}=0 \tag{23}$$

考察$\mu<p$这个特殊情况，利用定理 3.7 得：

定理 5. 在条件$\mu<p$之下，从$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}(D)$到$\mathbf{C}(D)$内嵌入算子是连续的和紧的．

注． 利用定理 3.4 及引理 2 的注，可以更强化这个定理．这就是，如果$\beta<\frac{p-\mu}{p}$，则从$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}$到 Lip β内的嵌入算子是连续的(同样参见Соболев-I, § 1.1)．

4.4. 与引进空间$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}(D)$类似，也可以定义其范数要借助高阶导数来定义的那种空间．即，以$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l)}=\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l)}(D)$表示在区域$D$内$l$次连续可微函数全体组成的空间，其中的范数由等式

$$\|x\|_{\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l)}(D)}=\|x\|_{\mathbf{L}^p(D)}+\sum_{i_1,\cdots,i_l=1}^{\mu}\left[\int_D\left|\frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1}\cdots\partial t_{i_l}}\right|^p dt\right]^{1/p} \tag{24}$$

定义．

定理 4(因而作为定理 4 特殊情况的定理 3)可以搬到高阶导数的情况，即下面的定理成立．

定理 6. 空间$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l)}(D)$($D$是凸区域)到空间$\mathbf{L}^q(D')$内($D'$是$D$中的$\nu$维曲面)的嵌入算子，在条件

$$q<\frac{\nu p}{\mu-lp}, \qquad \nu>\mu-lp \tag{25}$$

之下是紧的．并且当曲面D'依参数是连续形变时，这个算子对

参数是连续相依的.

证. 根据积分表达式(4)，对于任何函数$x \in \widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l)}(D)$及任意一点$S \in D'$，下式成立：

$$x(s)=\frac{1}{\operatorname{mes} D}\int_D x(t)\mathscr{L}(s,t)dt$$

$$+(-1)^l \sum_{i_1,\cdots,i_l}^{\mu}\int_D \frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1}\cdots\partial t_{i_l}}\cdot\frac{\mathscr{L}_{i_1\cdots i_l}(s,t)}{|s-t|^{\mu-l}}dt,$$

其中函数$\mathscr{L}(s,t)$和$\mathscr{L}_{i_1\cdots i_l}(s,t)$由(5)式及(5′)式来定义.

根据定理 3.6（这个定理的条件(27)与条件(25)在$m=\mu-l$时是一致的)，在条件(25)之下具有核$\frac{\mathscr{L}_{i_1\cdots i_l}(s,t)}{|s-t|^{\mu-l}}$的积分算子是从$\mathbf{L}^p(D)$到$\mathbf{L}^q(D')$上的紧算子；仍根据该定理，这个算子对于曲面$D'$的位移参数是连续相依的.

用上面表达式中第一项定义的积分算子显然也具有类似的性质，由所述的这些讨论便知定理成立.

最后，把定理 5 推广到高阶导数的情况得下列结果：在条件$\mu<lp$之下，嵌入算子是从$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l)}(D)$到$\mathbf{C}(D)$内的紧算子.

4.5. 空间$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l)}$显然是不完备的．但是，如果在其中添入某种广义可微的函数，则它将成为B-空间.

我们说，D内可积函数$x^{(i)}(s)$是函数x在区域D内的广义导数，如果存在区域D内的连续可微函数序列$\{x_k\}$，使得对于其闭包含于D的任何区域D_1都有

$$\begin{aligned}&\int_{D_1}|x_k(t)-x(t)|\,dt\xrightarrow[k\to\infty]{}0,\\&\int_{D_1}\left|\frac{\partial x_k}{\partial t_i}-x^{(i)}(t)\right|dt\xrightarrow[k\to\infty]{}0.\end{aligned}\tag{26}$$

设φ是区域D内的连续可微函数，在区域D的边界及其边界附近为零，即它仅在其闭包包含于D中的某个区域D_1内才异于

零，这时，下面的等式成立：

$$\int_D x(t)\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}dt=-\int_D \varphi(t)x^{(i)}(t)dt. \tag{27}$$

事实上，如果在(27)中用 x_k 代替 x，用 $\frac{\partial x_k}{\partial t_i}$ 代替 $x^{(i)}$，则(27)式就是大家知道的 Green 公式．取极限即得所要求的结果．

从等式(27)顺便推出了广义导数的唯一性．事实上，如果存在两个这样的广义导数 $x^{(i)}$ 和 $\tilde{x}^{(i)}$，则对于差 $\tilde{x}^{(i)}-x^{(i)}$ 可得

$$\int_D \varphi(t)[\tilde{x}^{(i)}(t)-x^{(i)}(t)]dt=0, \tag{28}$$

其中 φ 是上述类型的任意函数，由此借助 Лузин 定理容易推出，$\tilde{x}^{(i)}(t)=x^{(i)}(t)$ 几乎处处成立．

以后我们不随意选取逼近函数，而是用一种专门的方式，即按 Стеклов 平均值的方式来选取．

除了在 IX.1.1 中加于平均核上的要求外，我们还假设对于任何 $h>0$ 函数 ω_h 在 $[0,\infty)$ 内是连续可微的．

在 IX.1.1 中已建立了平均函数的下列性质：

a) $\|x_h\|_{L^p(D)}\leqslant M\|x\|_{L^p(D)}\quad(h>0)$； (29)

b) 如果 $x\in L^p(D)$ $(p\geqslant 1)$，则当 $h\to 0$ 时 $\|x-x_h\|_{L^p(D)}\to 0$；

c) 如果 $\|x_m-x\|_{L^p(D)}\to 0$，则 $\|(x_m)_h-x_h\|_{L^p(D)}\to 0$．

此外，由于函数 ω_h 的专门选法，还有

d) 如果 x 在 D 内有广义导数 $x^{(i)}$，则对于区域 D 中任一个内子域 $D_1(D_1\subset D)$，当 $h>0$ 充分小时，在 D_1 内成立等式

$$\frac{\partial}{\partial t_i}x_h=[x^{(i)}]_h. \tag{30}$$

我们来证明 d)．取 $\{x_k\}$ 使得(26)式成立．对于 x_k 等式(30)显然成立，因为在此情况下可以在积分号下求导数．但根据 c)

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial t_i}\right)_h\longrightarrow(x^{(i)})_h\qquad(\text{在 } L^p(D)\text{ 内}),$$

$$\frac{\partial}{\partial s_i}[(x_k)_h]=\int\frac{\partial}{\partial s_i}\omega_h(|s-t|)x_k(t)dt\longrightarrow$$

$$\int\frac{\partial}{\partial s_i}\omega_h(|s-t|)x(t)dt=\frac{\partial}{\partial s_i}x_h.$$

取极限是允许的，因为 $s\in D_1$，而积分区域(以 s 为中心，h 为半径的球 $K_h(s)$)当 h 充分小时是区域 D 的内子域.

我们指出，从(30)及 b)推知，在定义广义导数时，平均函数 x_h 可以起函数 x_k 的作用.

上面的讨论表明，可把 Соболев 不等式(16)推广到仅有广义导数的函数上. 事实上，设广义梯度 p 次幂可积. 则根据 b)，

$$\int_{D_1}\left|\frac{\partial x_h}{\partial t_i}-x^{(i)}\right|^p dt=\int_{D_1}\left|[x^{(i)}]_h-x^{(i)}\right|^p dt\xrightarrow[h\to 0]{}0,$$

类似的关系式对梯度也成立. 因此，对连续可微函数 x_h 应用 Соболев 不等式，得

$$\left[\int_{D_1}|x_h|^q dt\right]^{1/q}\leqslant M_1\left\{\frac{1}{\mathrm{mes}D_1}\left|\int_{D_1}x_h(t)dt\right|\right.$$
$$\left.+\left[\int_{D_1}|\mathrm{grad}\,x_h|^p dt\right]^{1/p}\right\},$$

然后令 $h\to 0$ 即得对 x 的 Соболев 不等式:

$$\left[\int_{D_1}|x|^q dt\right]^{1/q}\leqslant M_1\left\{\frac{1}{\mathrm{mes}D_1}\left|\int_{D_1}x(t)dt\right|\right.$$
$$\left.+\left[\int_{D_1}|\mathrm{grad}\,x|^p dt\right]^{1/p}\right\}.$$

并且常数 M_1 可认为与 D_1 无关(定理 1 注 3). 取区域 D_1 的扩张序列，其并是 D，则上式取极限便得到对区域 D 的不等式. 顺便还证明了函数 $|x|^q$ 的可积性，即 $x\in\mathrm{L}^q(D)$. 于是，最后有

$$\left[\int_D|x|^q dt\right]^{1/q}\leqslant M_1\left\{\frac{1}{\mathrm{mes}D_1}\left|\int_D x(t)dt\right|+\right.$$

$$+\left[\int_D |\mathrm{grad}\, x|^p dt\right]^{1/p}\Big\}.$$

如果在空间 $\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(1)}$ 中添加具有 p 次幂可积的广义导数的函数，所得的空间记为 $\mathbf{W}_p^{(1)}$*)，它已经是完备的了．事实上，设 $\|x_k - x_m\|_{\mathbf{W}_p^{(1)}} \to 0$. 这时序列 $\left\{\frac{\partial x_k}{\partial t_i}\right\}$ 在空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 中收敛于某个函数 $x^{(i)}$，而根据Соболев不等式，序列 $\{x_k\}$ 在空间 $\mathbf{L}^p(D)$ 中收敛于某函数 x. 余下只须证明 $x^{(i)}$ 是函数 x 的广义导数．因为如果是这样的话，则显然在 $\mathbf{W}_p^{(1)}$ 中 $x_k \to x$. 设 $\{D^{(n)}\}$ 是区域 D 的内子域序列，它是扩张的并且趋于区域 D，按(26)式，对于每个 $n=1, 2, \cdots$ 可求得连续可微函数 $\tilde{x}_n$，使得

$$\int_{D^{(n)}} |x_n - \tilde{x}_n|\, dt < \frac{1}{n},$$

$$\int_{D^{(n)}} \left| x_n^{(i)} - \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_i} \right| dt < \frac{1}{n} \qquad (i=1, 2, \cdots, \mu).$$

由此显然可知，序列 $\{\tilde{x}_n\}$ 和 $\left\{\frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_i}\right\}$ 在区域 D 的任何内子域内分别收敛于 x 和 $x^{(i)}$，证毕．

空间 $\mathbf{W}_p^{(1)}$ 是可分的．事实上，根据 b)和 d)容易看出，能够用连续可微函数逼近(在 $\mathbf{W}_p^{(1)}$ 中) $\mathbf{W}_p^{(1)}$ 中的任何函数，而这种连续可微函数也可以用具有有理系数的多项式来逼近．

我们也可以将等式 (27) 作为定义广义导数的基础．这就是说，如果存在函数 $x^{(i)}$，使对于所述形式的任何函数 φ，(27)式都成立，则 $x^{(i)}$ 是函数 x 的广义导数．事实上，对于区域 D 的任意内子域 D_1，当 h 充分小时，有

$$\frac{\partial x_h}{\partial s_i} = \int \frac{\partial}{\partial s_i} \omega_h(|s-t|) x(t)\, dt =$$

---

*) 空间 $\mathbf{W}_p^{(1)}$ 中的范数按公式(20)定义，只要以广义导数来代替通常的导数．

$$= -\int \frac{\partial}{\partial t}[\omega_h(|s-t|)]x(t)\,dt$$

$$+\left[\int_D\left[\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_l}\left(\frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1}\partial t_{i_2}\cdots\partial t_{i_l}}\right)^2\right]^{p/2}dt\right]^{1/p}\Big\},\tag{32}$$

其中B是常数. 事实上, 如果这样的常数不存在, 则存在序列$\{x_n\}$, 使得$\|x_n\|=1$且

$$|f_1(x_n)|+\cdots+|f_k(x_n)|$$
$$+\left\{\int_D\left[\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_l}\left(\frac{\partial^l x_n}{\partial t_{i_1}\partial t_{i_2}\cdots\partial t_{i_l}}\right)^2\right]^{p/2}dt\right\}^{1/p}=\varepsilon_n\to 0.\tag{33}$$

因为函数x_n及其直至$(l-1)$阶广义导数的平均值都不超过$\|x_n\|=1$, 所以从序列$\{x_n\}$中可以选出子序列$\{x_{n_k}\}$, 使得函数x_{n_k}的平均值及其导数的平均值构成收敛序列. 从(33)可知$\|x_{n_k}-x_{n_j}\|\to 0$. 由空间$\mathbf{W}_p^{(l)}$的完备性, 存在$y=\lim x_{n_k}\in\mathbf{W}_p^{(l)}$. 再应用(33)式可知, x满足条件(31), 于是$x=\mathbf{0}$. 但是, 这是不可能的.

上面我们证明了(32)式, 从泛函$f_1, f_2, \cdots, f_k$的连续性还可以推出反向的不等式. 这样, 作为$\mathbf{W}_p^{(l)}$中的范数可以取表达式:

$$\|x\|=|f_1(x)|+|f_2(x)|+\cdots+|f_k(x)|$$
$$+\left\{\int_D\left[\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_l}\left|\frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1}\partial t_{i_2}\cdots\partial t_{i_l}}\right|^2\right]^{p/2}dt\right\}^{1/p}.$$

作为$\mathbf{W}_p^{(l)}$中的范数还可以取其他的表达式. 例如, 可令

$$\|x\|=\left\{\int_D\left[\sum_{k=0}^{l}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{\mu}\left|\frac{\partial^k x}{\partial t_{i_1}\partial t_{i_2}\cdots\partial t_{i_k}}\right|^2\right]^{p/2}dt\right\}^{1/p}.$$

我们指出, 在这样定义范数之后空间$\mathbf{W}_2^{(l)}$成为Hilbert空间, 其中的内积定义为

$$(x, y)=\int_D\sum_{k=1}^{l}\sum_{i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial^k x}{\partial t_{i_1}\partial t_{i_2}\cdots\partial t_{i_k}}\,\frac{\partial^k y}{\partial t_{i_1}\partial t_{i_2}\cdots\partial t_{i_k}}dt.$$

再指出一个重要的情况. 设有空间嵌入$\mathbf{W}_q^{(m)}(S)\supset\mathbf{W}_p^{(l)}(D)$,

其中 S 是区域 D 中的 ν 维流形. 这时, 可对 $\mathbf{W}_p^{(l)}(D)$ 中的函数谈及它在曲面 S 上的 m 阶导数的值, 这个导数是 S 上的 q 次幂可积函数. 如果嵌入定理保证了某阶广义导数的连续性, 则容易验证, 这些导数在通常意义下也是存在的*).

最后, 指出下面一点也是有益的, 如果在 $\mathbf{W}_p^{(l)}(D)$ 中的函数上附加某些与曲面 S 上 m 阶导数值有关的线性条件, 并且 $\mathbf{W}_p^{(l)}(D) \subset \mathbf{W}_q^{(m)}(S)$, 则这些条件确定了空间 $\mathbf{W}_p^{(l)}(D)$ 中的闭(及线性)集.

4.6. 作为结尾, 我们应用上述结果来证明存在 Dirichlet 问题的变分解法.

考察边值问题

$$\Delta x=0 \qquad x|_S=\varphi. \tag{34}$$

我们从具有有限 Dirichlet 积分

$$H(x)=\int_D \sum_{k=1}^{\mu}\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right)^2 dt<\infty \tag{35}$$

的函数中寻求其解, 即认为 $x \in \mathbf{W}_2^{(1)}(D)$, 因此由定理 4 推出 $x \in \mathbf{L}^2(S)$. 事实上, 流形 S 的维数 ν 等于 $\mu-1$, 而

$$q=2<\frac{(\mu-1)2}{\mu-2}=2+\frac{2}{\mu-2}, \qquad \nu=\mu-1>\mu-2=\mu-p.$$

并且

$$\int_S |x(s+\Delta s)-x(s)|^2 ds \xrightarrow[\Delta s \to 0]{} 0,$$

即函数 x 在边界曲面上的值是其内部(在位移曲面上)值的(在平均意义下的)极限.

这样, 具有有限 Dirichlet 积分的函数在曲面上应有平方可积的边界值.

但是, 不是定义在 S 上的平方可积的任何函数 φ 都可以做为

---

*) 确切地说, 对应于元素 x 的等价函数之一将具有这种性质.

边界值．我们称 φ 是容许的，如果存在 $x\in\mathbf{W}_2^{(1)}(D)$，使得 $\varphi=x|_S$.

在边值问题(34)中将认为 φ 是容许的.

以 $\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$ 表示 $\mathbf{W}_2^{(1)}(D)$ 中在 S 上的边界值等于 φ 的函数的集合．对于 $x\in\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$ 有 $0\leqslant H(x)<\infty$，所以存在有限的

$$\inf\{H(x):\quad x\in\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)\}=d.$$

我们构造使泛函 H 极小化的序列 $\{x_n\}\subset\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$，即使得

$$d=\lim_{n\to\infty}H(x_n).$$

定理 7. 极小化序列 $\{x_n\}$ 在空间 $\mathbf{W}_2^{(1)}$ 中收敛；其极限函数属于 $\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$，并且给出了泛函 H 在 $\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$ 的函数中的极小值.

证. 如果在 $\mathbf{W}_2^{(1)}$ 中引进内积，令

$$(x,y)=\int_S x(s)y(s)ds+\int_D\sum_{k=1}^{\mu}\frac{\partial x}{\partial t_k}\,\frac{\partial y}{\partial t_k}dt$$

$$(x,y\in\mathbf{W}_2^{(1)}),$$

则 $\mathbf{W}_2^{(1)}$ 成为 Hilbert 空间．并且，任意元素 $x\in\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$ 的范数和泛函 H 在这个元素上的值的关系由下式给出：

$$\|x\|^2=\int_S|\varphi(s)|^2ds+H(x). \tag{36}$$

以 $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$ 表示在 S 上为零的所有元素 $x\in\mathbf{W}_2^{(1)}$ 的集合．如4.5最后所指出的，$\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$ 是空间 $\mathbf{W}_2^{(1)}$ 的闭子空间.

考察某个元素 $x_0\in\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$．可以认为 x_0 与子空间 $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$ 正交，事实上，如果不然，x_0 可表示为 $x_0=x_0'+x_0''$，其中 x_0' 与 $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$ 正交，而 $x_0''\in\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$．因为

$$x_0'|_S=x_0|_S-x_0''|_S=\varphi,$$

所以 $x_0'\in\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$，这样，可以考察元素 x_0' 以代替 x_0.

我们来证明 $H(x_0)=d$. 设 x 是 $\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$ 中任意的元素. 因为差 $x-x_0\in\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$, 所以它与元素 x_0 正交, 因而由(36)式得

$$H(x)-H(x_0)=\|x\|^2-\|x_0\|^2$$
$$=\|x-x_0\|^2\geqslant 0, \tag{37}$$

即

$$d\leqslant H(x_0)\leqslant\inf H(x)=d,$$

或换言之, $d=H(x_0)$.

在(37)式中令 $x=x_n$ 便得

$$H(x_n)-H(x_0)=\|x_n-x_0\|^2 \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

但 $H(x_0)=d$, 故 $H(x_n)-H(x_0)\to 0$, 由此可见 $x_n\to x_0$.

定理证毕.

注. 关系式(37)表明, 使泛函 H 达到极小的元素 $x_0\in\mathbf{W}_2^{(1)}(\varphi)$ 是唯一的.

我们不再证明使泛函 H 达到极小的函数 x_0 给出了边值问题(34)的解, 并且解还是唯一的. 对此以及嵌入定理在数学物理中的其他一些应用, 我们介绍读者参看 С. Л. Соболев 的书(参见 Соболев-I), 这本书详尽地叙述了这些问题.

希望进一步了解嵌入定理的读者可以继续读下列书:

Соболев-I, II; Бесов, Ильин 和 Никольский.

泛函分析及其相邻问题方面的专著

Александров П. С.

Введение в общую теорию множеств и функций. М., Гостехиздат, 1948.

Антоновский М. Я., Болтянский В. Г. и Сарымсаков Т. А.

Топологические алгебры Буля. Изд. АН УзССР, 1963.

Акилов Г. П., Макаров Б. М. и Хавин В. П.

Элементарное введение в теорию интеграла. Изд. ЛГУ, 1969.

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.

Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966.

Банах (Banach S.).

Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932. (Украинский перевод: Курс функционального аналізу, Київ, 1948).

Бакельман И. Я.

Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М., «Наука», 1965.

Бесов О. В. Ильин В. П. и Никольский С. М.

Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., «Наука», 1975.

Биркхоф Г. (Birkhoff G.).

Теория структур. М, ИЛ, 1952.

Бирман М. Ш. и др.

Функциональный анализ (в серии «Справочная математическая библиотека»). М., «Наука», 1972.

Бурбаки Н. (Bourbaki N.).

I. Теория множеств. М., «Мир», 1965.

II. Общая топология. Основные структуры. М., «Наука», 1968.

III. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959.

IV. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., «Наука», 1967.

V. Интегрирование. Векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представления. М., «Наука», 1970.

VI. Спектральная теория. М., «Мир», 1972.

Владимиров Д. А.

Булевы алгебры. М., «Наука», 1969.

Воробьев Ю. В.

Метод моментов в прикладной математике. М., Физматгиз, 1958.

Вулих Б. З.

I. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.

II. Введение в функциональный анализ. М., «Наука», 1967.

III. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., «Наука», 1973.

IV. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. Изд. КГУ, Калинин, 1977.

Гельфанд И. М. и Виленкин Н. Я.

Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961.

Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е.

Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1960.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.

Обобщенные функции.

Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.

Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.

Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

Гильберт (Hilbert D.).

Grundzüge einer allgemeine Theorie der Integralgleichungen.

Leipzig, 1912.
Глазман И. М. и Любич Ю. И.
Конечномерный линейный анализ. М., «Наука», 1969.
Гольштейн Е. Г.
Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., «Наука», 1971.
Гофман К. (Hoffman K.).
Банаховы пространства аналитических функций. М., ИЛ, 1963.
Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. (Dunford N. Schwartz J. T.).
I. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.
II. Линейные операторы. Спектральная теория. М., «Мир», 1966.
III. Линейные операторы. Спектральные операторы. М., «Мир», 1974.
Динкуляну (Dinculeanu N.).
Vector measures. Berlin, 1966.
Дистель (Diestel J.).
Geometry of Banach Spaces, Selected topics, Lecture Notes in Math. 485, Springer—Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1975.
Дьедонне Ж. (Dieudonné J.).
Основы современного анализа. М., «Мир», 1964.
Дэй М. М.
Линейные нормированные пространства. М., ИЛ, 1961.
Заанен (Zaanen A. C.).
I. Linear Analysis, Amsterdam, 1960.
II. Integration, Amsterdam, 1967.
Зигмунд А. (Zygmund A.).
Тригонометрические ряды, т. 1 и 2. М., «Мир», 1965.
Иосида К. (Yosida K.).
Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
Кадец М. И.
Геометрия нормированных пространств. В сб. «Матем анализ.

1975 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975.

Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г.

Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М. — Л., Гостехиздат, 1950.

Келли Дж. Л. (Kelley J. L.).

Общая топология. М., «Наука», 1968.

Колмогоров А. Н. и Фомин С. В.

Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.

Коротков В. Б.

Интегральные операторы. Новосибирск, изд-во НГУ, 1977.

Красносельский М. А.

I. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.

II. Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.

Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б.

Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Физматгиз, 1958.

Линденштраусс и Цафрири (Lindenstrauss J., Tzafriri L.).

Classical Banach spaces, Lecture Notes in Math., 338, Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1973.

Люксембург и Заанен (Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.).

Riesz Spaces, v. I, Amsterdam, 1971.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И.

Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.

Наймарк М. А.

Нормированные кольца. М., «Наука», 1968.

Накано (Nakano H.).

Modulared semi-ordered linear spaces, Tokyo, Maruzen Co., LTD, 1950.

Натансон И. П.

I. Конструктивная теория функций. М., Гостехиздат, 1949.

II. Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
Никайдо Х. (Nikaito H.).

Выпуклые структуры и математическая экономика. М., «Мир», 1972.

Петровский И. Г.

Лекции по теории интегральных уравнений. М., «Наука», 1965.

Рисс Ф, Секефальви-Надь Б.

Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.

Робертсон А. П., Робертсон В. (Riesz F. Sz.-Nagy).

Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1967.

Рудин У.

Функциональный анализ. М., «Мир», 1975.

Сегё Г (Szegö G.).

Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.

Соболев С. Л.

I. Некоторые применения Функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.

II. Введение в теорию кубатурных формул. М., «Наука», 1974.

Тихомиров В. М.

Некоторые вопросы теории приближений М., Изд-во МГУ, 1976.

Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н.

Вычислительные методы линейной алгебры, М., Физматгиз, 1963.

Фелпс Р. (Phelps R.).

Лекции о теоремах Шоке. М., «Мир», 1968.

Фихтенгольц Г. М.

Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I—III, М., «Наука», 1966.

Фремлин (Fremlin D. H.).

Topological Riesz spaces and measure theory, Cambridge Univ. Press, 1974.

Хавин В. П.

Пространства аналитических функций, В сб. «Мат. анализ, 1964

(Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)», М., 1966.

Халмош П. (Halmos P.).

Теория меры, «Мир», М., 1953.

Харди Г. Х., Литтльвуд Дж. Е. и Полиа Г. (Hardy G. H. Littlewood J. E. Pólya G.)

Неравенства. М., ИЛ, 1948.

Хаусдорф Ф. (Housdorff F.).

Теория множеств. М., Гостехиздат, 1937.

Хёрмандер Л. (Hormander L.).

Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., Мир, 1965.

Хилле Э. и Филлипс Р. (Hille E. Phillips R.).

Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962.

Шварц (Schwartz L.).

Théorie des distribution, t. I — II, Paris, 1950—1951.

Шефер Х. (Schäffer M.).

I. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971.

II. Banach lattices and positive operators, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg — New York, 1974.

Шилов Г. Е.

I. Математический анализ. Специальный курс. М., Физматгиз, 1961.

II. Математический анализ. Второй специальный курс. М., «Наука», 1965.

Шилов Г. Е. и Гуревич Б. Л.

Интеграл, мера и производная. М., «Наука», 1964.

Эдвардс Р. (Edwards R.).

Функциональный анализ. М., «Мир», 1969.

本书所使用的文献

Абрамович Ю. А.

[1] Некоторые теоремы о нормированных структурах. Вестник ЛГУ, № 13 (1971), 5—11.

Акилов Г. П.

[1] О распространении линейных операций. ДАН СССР, 57, № 7 (1947), 643—646.

[2] Необходимые условия распространимости линейных операций. ДАН СССР 59, № 3 (1948), 417—418.

[3] О применении одного метода решения нелинейных дифференциальных уравнений к исследованию систем дифференциальных уравнений. ДАН СССР 68, № 4 (1949), 645.

Алсынбаев К., Имомназаров Б., Рубинштейн Г. Ш.

[1] Задача перемещения массы на компакте с несимметричной метрикой. В сб.: Оптимизация, вып. 17 (34). Новосибирск, 1975, 94—107.

Андо (Ando T.).

[1] Linear functionals on Orlicz spaces. Nieuw Arch. Wiskunde 8, № 1 (1960), 4—16.

Банах (Banach S.).

[1] Sur les opérations dans des ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales. Fund. Math. 3 (1922), 133—181.

[2] Sur les fonctionelles lineaires II. Studia Math. 1 (1929), 223—240.

Банах и Штейнхаус (Banach S. Steinhaus H.).

[1] Sur le principe de la condensation de singularités. Fund. Math. 9 (1927), 50—61.

Берколайко М. З. и Рутицкий Я. Б.

刘

[1] Об операторах в обобщенных гильбертовых пространствах, Сиб. Матем. ж. 12, 5 (1971), 1015—1025.

Берман Д. Л.

[1] Об одном классе линейных операций. ДАН СССР 85, 1 (1952), 13—16.

Бухавалов А. В.

[1] О локально выпуклых пространствах, порожденных слабо компактными множествами. Вестник ЛГУ, № 7 (1973), 11—17.

[2] О пространствах со смешанной нормой. Вестник ЛГУ, № 19 (1973), 5—12.

[3] Об интегральном представлении линейных операторов. Зап. научн. семинаров *Ленингр. отд.* Матем. ин-та АН СССР, 47 (1974), 5—14.

[4] Интегральные операторы и представление вполне линейных функционалов на пространствах со смешанной нормой. Сиб. мат. ж., 16, № 3 (1975), 483—493.

[5] Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой. *Известия вузов, Матем.,* № 11 (1975), 21—32.

Бухвалов А. В. и Лозановский Г. Я.

[1] О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций. Труды Московского матем. об-ва, 34 (1976), 128—149.

Векслер А. И.

[1] О локальности функциональных векторных структур. Сиб. мат. ж. 12, № 1 (1971), 54—64.

Вершик А. М.

[1] Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования, УМН 25, 5 (1970), 117—124.

[2] О работах Д. Орнштейна, условиях слабой зависимости и классах стационарных мер, «Теория вероятностей и ее применения» 21, 3 (1976).

Владимиров В. С.

[1] Математические задачи односкоростной теории переноса частиц.

М., «Наука», 1961.

Гельфанд И. М.

[1] Abstrakte Functionen und lineare Operatoren. Мат. сб. 4 (46) (1938), 235—286.

Гильдебрандт (Hildebrandt T. H.).

[1] Über vollstetige lineare Transformationen. Acta Math. 51 (1928), 311—318.

Грибанов Ю. И.

[1] Об измеримости одной функции. Известия вузов, Матем., № 3 (1970), 22—26.

[2] Об измеримости ядер интегральных операторов. Известия вузов, Матем., № 7 (1972), 31—34.

Гротендик (Grothendieck A.).

[1] Sur les applications lineaires faiblement compact d'espaces du type C(K). Canad, J. Math. 5 (1953), 129—173.

[2] Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

Данфорд и Петтис (Dunford N. Pettis B. J.).

[1] Linear operators on summable functions. Trans. Amer. Math. Soc. 47, № 3 (1940), 323—392.

Дубовицкий А. Я. и Милюлин А. А.

[2] Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимальных управления со смешанными ограничениями типа неравенств. ЖВМ и МФ 8, № 4 (1968), 725—779.

Ехлаков Н. П.

[1] Существование оптимальных перевозок меры Лебега с плотностями. В сб.: Оптимизация, вып. 15 (32), Новосибирск, 1974, 90—114.

Забрейко П. П.

[1] Идеальные пространства функций. Вестник Яросл. ун-та, вып. 8 (1974), 12—52.

Кадец М. И. и Митягин Б. С.

[1] Дополняемые подпространства в банаховых пространствах. УМН

28, № 6 (1973), 77—94.

Какутани (Kakutani S.).

[1] Some characterization of Euclidean space. Jap. Jour. Math. 16, № 2 (1939), 93—98.

Канторович Л. В.

[1] Об одном новом методе приближенного решения уравнений в частных производных. ДАН СССР 2, № 8—9 (1934), 532—536.

[2] О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях втеории линейных операций. ДАН СССР 4 (1935), 11—14.

[3] Линейные полуупорядоченные пространства. Матем. сб. 2 (44) (1937), 121—168.

[4] О функциональных уравнениях. Уч. зап. ЛГУ 3 (17) (1937). 24—50.

[4a] Линейные операции в полуупорядоченных пространствах. Матем, сб. 7 (1940), 209—284.

[5] Математические методы организации и планирования производства. Изд. ЛГУ, Л, 1939.

[6] О перемещении масс. ДАН СССР 37, № 7—8 (1942), 227—229.

[7] Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала. ДАН СССР 48, № 7 (1945), 483—487.

[8] Об одной проблеме Монжа. УМН 3, № 2 (1948), 225—226.

[9] Функциональный анализ и прикладная математика. УМН 3, № 6 (1948), 89—185.

[10] Принцип мажорант и метод Ньютона. ДАН СССР 76 (1951), 17—20.

[11] Об интегральных операторах. УМН 11, № 2 (1956), 3—29.

[12] Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона. Вестник Ленингр. ун-та, № 7 (1957), 68—103.

Канторович Л. В. и Вулих Б. З.

[1] Sur la representation des operations linéaires. Comp. Math. 5 (1937), 119—165.

Канторович Л. В. и Гавурин М. К.

[1] Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. Сб. статей «Проблемы повышения эффективности работы транспорта». Изд. АН СССР, 1949, стр. 110—138.

Канторович Л. В. и Рубинштейн Г. Ш.

[1] Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. ДАН СССР 115, № 6 (1957), 1058—1061.

[2] Об одном пространстве вполне аддитивных функций. Вестник ЛГУ, № 7 (1958), 52—59.

Келли (Kelley J.).

[1] Banach spaces with the extension property. Trans. Amer. Math. Soc. 72, № 2 (1952), 323—326.

Киш (Kis O.).

[1] О сходимости метода совпадения. Acta Math., Acad. Sei. Hung., 17, 3—4 (1966).

Колмогоров А. Н.

[1] Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Math. 5 (1934), 29—33.

Коротков В. Б.

[1] Интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими условиям Карлемана и Ахиезера I, Сиб. мат. ж. 12, № 5 (1971), 1041—1055.

[2] Интегральные представления линейных операторов. Сиб. мат. ж. 15, № 3 (1974), 529—545.

Крейн С. Г., Петунин Ю. И.

[1] Шкалы банаховых пространств. УМН 21, 2 (1966), 89—168.

Крейн М. Г. и Рутман М. А.

[1] Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН 3, 1 (1948), 3—95.

Левин В. Л.

[1] К задаче о перемещении массы. ДАН СССР 224, № 5 (1975), 1016—1019.

[2] Экстремальные задачи с выпуклыми функционалами, полунепрерывными снизу относительно сходимости по мере. ДАН СССР 224, № 6 (1975), 1256—1259.

[3] О теоремах двойственности для задачи Монжа-Канторовича, УМН 32, (1977).

[4] Задача Монжа-Канторовича о перемещении массы. В кн. «Методы функционального анализа в математической экономике», М., «Наука», 1977.

Лозановский Г. Я.

[1] Об изоморфных банаховых структурах. Сиб. мат. ж. 10, № 1 (1969), 93—98.

[2] О некоторых банаховых структурах. Сиб. мат. ж. 10, № 3 (1969), 584—599.

[3] О локализованных функционалах в векторных структурах. Сб. «Теория функций, функц. ан. и их прилож.», Харьков, вып. 19 (1974), 66—80.

Лозинский С. М.

[1] Пространства $\widetilde{C}_\omega$ и $\widetilde{C}^*_\omega$ и сходимость интерполяционных процессов в них. ДАН СССР 59, № 8 (1948), 1389—1392.

[2] Обратные функции, неявные функции и решения уравнений. Вестник ЛГУ, № 7 (1957), 131—142.

Люксембург (Luxemburg W. A. J.).

[1] Notes on Banach Function Spaces. Proc. Acad. Sci. Amsterdam A 68 (1965), 229—248, 415—446, 646—667.

Люксембург и Заанен (Luxemburg W. A. J., Zaanen A.C.).

[1] Notes on Banach Function Spaces, Proc. Acad. Sci. Amsterdam A 66 (1973), 135—153, 239—263, 496—504, 655—681; A 67 (1964), 104—119, 360—376, 493—543.

Натансон И. П.

[1] Некоторые нелокальные теоремы о сингулярных интегралах. ДАН СССР 19, № 5 (1938), 357—360.

Нахбин (Nachbin L.).

[1] A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 68, № 1 (1950), 28—46.

Нейман (Neumann J. von).

[1] Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Ann. 102 (1929), 49—131.

Николаев В. Ф.

[1] К вопросу о приближении непрерывных функций полиномами, ДАН СССР 61, 2 (1948), 201—204.

Рвачев М. А.

[1] К задаче о перемещении массы. В сб.: Оптимизация, вып. 9 (26), Новосибирск, 1974, 203—208.

Реллих (Rellich F.).

[1] Spektral theorie in nichtseparablen Räumen. Math. Ann. 110 (1934), 342—356.

Рисс Ф. (Riesz F.).

[1] Sur les opérations fonctionelles lineaires. C. R. Acad. Sci. (Paris) 149 (1909), 974—977.

[2] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. 69 (1910), 449—497.

[3] Lecons sur ies systémes d'equations linéaires á une infinité d'inconnues, Paris, 1913.

[4] Sur la décomposition des opérations fonctionnelles, Atti Congresso Bologna 3 (1928), 143—148.

Рубинштейн Г. Ш.

[1] Несколько примеров двойственных экстремальных задач В кн.: Математическое программирование. М., «Наука», 1966.

[2] Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. УМН 25, 5 (155), (1970).

[3] О перемешиваниях массы на компакте. ДАН СССР 223 № 3 (1975), 572—575.

Седаев А. А.

[1] Об одной задаче Г. Я. Лозановского. Труды НИИМ ВГУ, Во-

ронеж, вып. 14 (1974), 63—67.

Семенов Е. М.

[1] Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. ДАН СССР 156, № 6 (1964), 1292—1295.

Сирвинт ю. Ф.

[1] Выпуклые множества и линейные функционалы в абстрактных пространствах Изв АН СССР, сер матем., 6 (1942), 143—170, 189—211.

Смолицкий Х. Л.

[1] О суммируемости потенциалов. УМН 12, № 4 (1957), 349—356.

Судаков В. Н.

[1] Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений, Труды МИАН 141, Л., «Наука», 1976.

Тулайков А. Н.

[1] Zur Kompaktheit im Raum Lp für $p=1$. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1, № 39 (1933), 167—170.

Филлипс (Phillips R. S.).

[1] On weakly compact subsets of a Banach space. Amer. J. Math. 65 (1943), 108—136.

Фрейденталь (Freudenthal H.).

[1] Teilweise geordnete Moduln, Proc. Acad. Sei. Amsterdam, 39 (1935), 641—651.

Фреше (Fréchet M.).

[1] Sur quelques points du calcul fonctionel. Rend. Math. di Palermo 22 (1906), 1—74.

[2] Sur les ensembles des fonctions et les opérations lineaires. C. R. Acad. Sci. (Paris) 144 (1907), 1414—1416.

Фридиан В. М.

[1] О сходимости методов типа наискорейшего спуска УМН 17, 3 (1962), 201—204.

Шаудер (Schauder J.).

[2] Über lineare vollstetige Operatoren. Studia Math. 2 (1930), 183—196.

Штейнгауз (Steinhaus H.).

[1] Additive und stetige Funktionaloperationen, Math. Zeitschr. 5 (1919), 186—221.

术语索引

一　画

二　画

三　画

四　画

五　画

六 画

七 画

八 画

九 画

十　画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

记 号 索 引

空 间

其 他 记 号

［General Information］
书名=泛函分析　上册
作者=（苏）Л．В．Канторович　Г．П．Акилов
页数=545
SS号=10098418
出版日期=1982年8月第1版